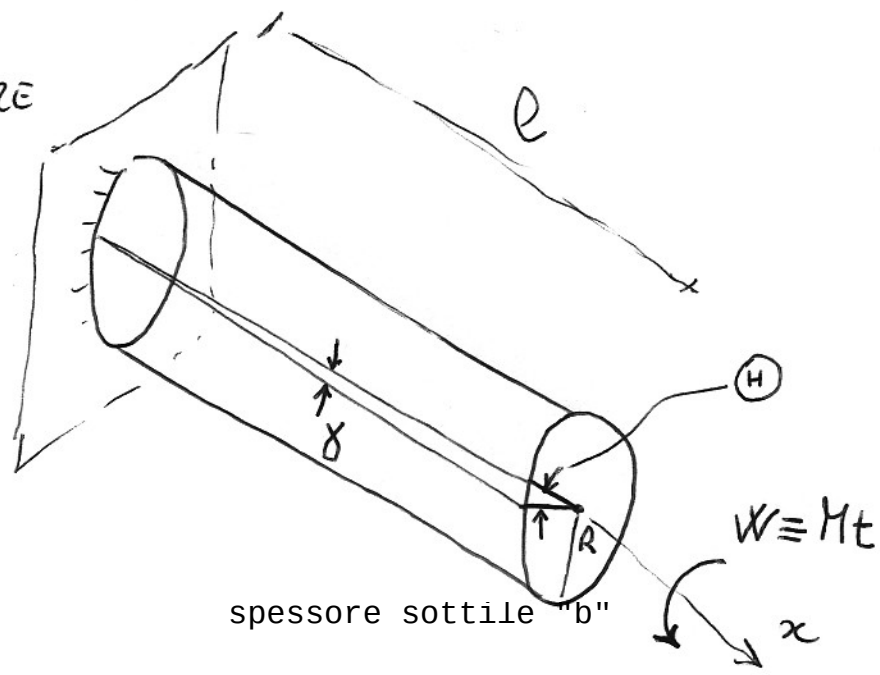


PROVA DI TORSIONE
SU PROVINO DI
SEZIONE CIRCOLARE
CAVA
~~INTERNA~~ MOLTO
SOTTILE



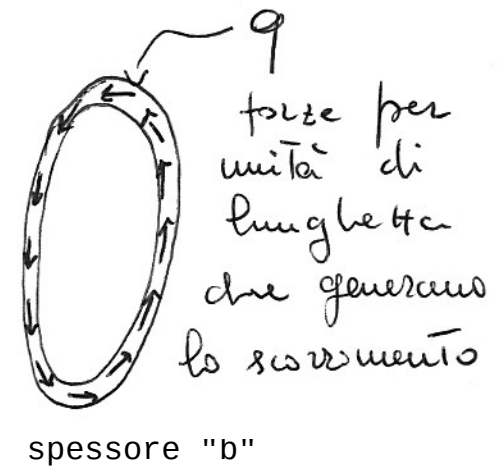
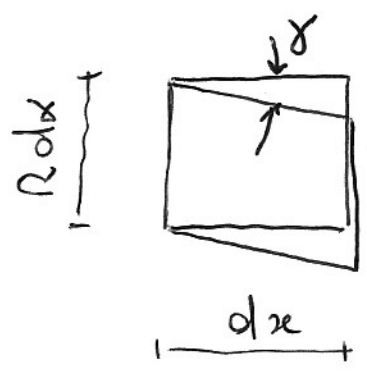
Per ogni M_t si ha una rotazione di una sezione
distanza x dall'incastro che vale $\phi(x)$ ed assume
il valore $\phi = \phi(l)$ all'estremo libero ($x=l$)

$$\phi(x) = \frac{\phi}{l} x$$

Da considerazioni geometriche:

$$\gamma l = \phi \cdot R \Rightarrow \gamma = \frac{R}{l} \phi$$

SCORRIMENTO ANGOLARE
MEDIO



$$W = M_t = \oint q \cdot R \, ds = \oint q \cdot R \cdot \overbrace{R \, d\alpha}^{2\pi} = \oint q R^2 \, d\alpha \quad \textcircled{2} \quad \tau_{\text{tors}}$$

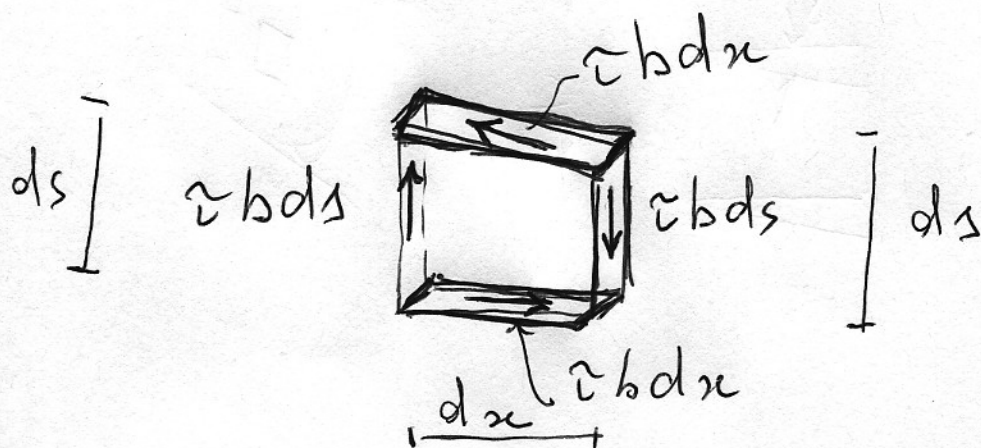
$$M_t = q R^2 2\pi \quad (1)$$

Se q è il risultante sulla spessore b di una distribuzione di "sforzi Tangenziali locali" indicati con il simbolo τ in modo che sia $\tau \cdot b = q$ dalla (1) si ha:

$$M_t = \tau \cdot b \cdot R^2 \cdot 2\pi \Rightarrow \tau = \frac{M_t}{2\pi R^2 b}$$

TENSIONE TANGENZIALE
MISURATA IN $\left[\frac{F}{L^2}\right]$.

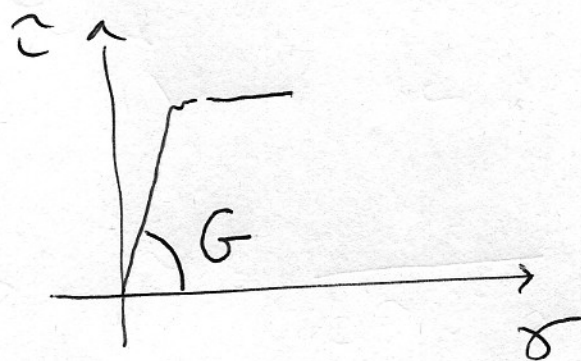
τ ha le stesse dimensioni della σ incontrata in pressoflessione ma significato "differente".
Per l'equilibrio alla rotazione dell'elemento supponiamo di superficie una τ costante anche tra fibre longitudinali contigue:



Poiché M_t è legata a $\tau = \frac{M_t}{2\pi R^2 b}$ 3
 e Θ è legata a $\gamma = \frac{R}{l} \Theta$

accanto ad una curva legata alla prova sperimentale $M_t - \Theta$ se ne può tracciare una nel piano $\tau - \gamma$ che nel caso di materiali duttili assume la forma:

In un primo tratto lineare (il solo di interesse per gli scopi del corso) è definito un "Modulo di elasticità tangenziale G "



(legato, tra l'altro, ad E e ν introdotti precedentemente della relazione $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$) -
 Nel tratto "lineare" $\tau = \gamma \cdot G$ e poiché

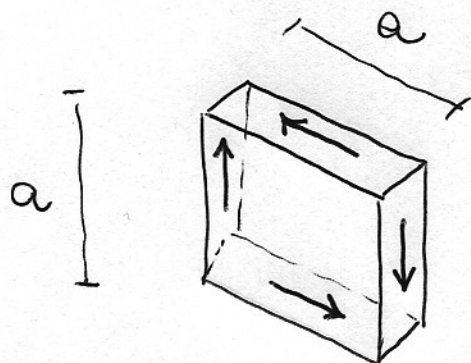
$$\tau = \frac{M_t}{2\pi R^2 b}, \quad \tau = G \gamma, \quad \gamma = \frac{R}{l} \Theta$$

si ha un legame diretto causa-effetto ($M_t - \Theta$) del tipo:

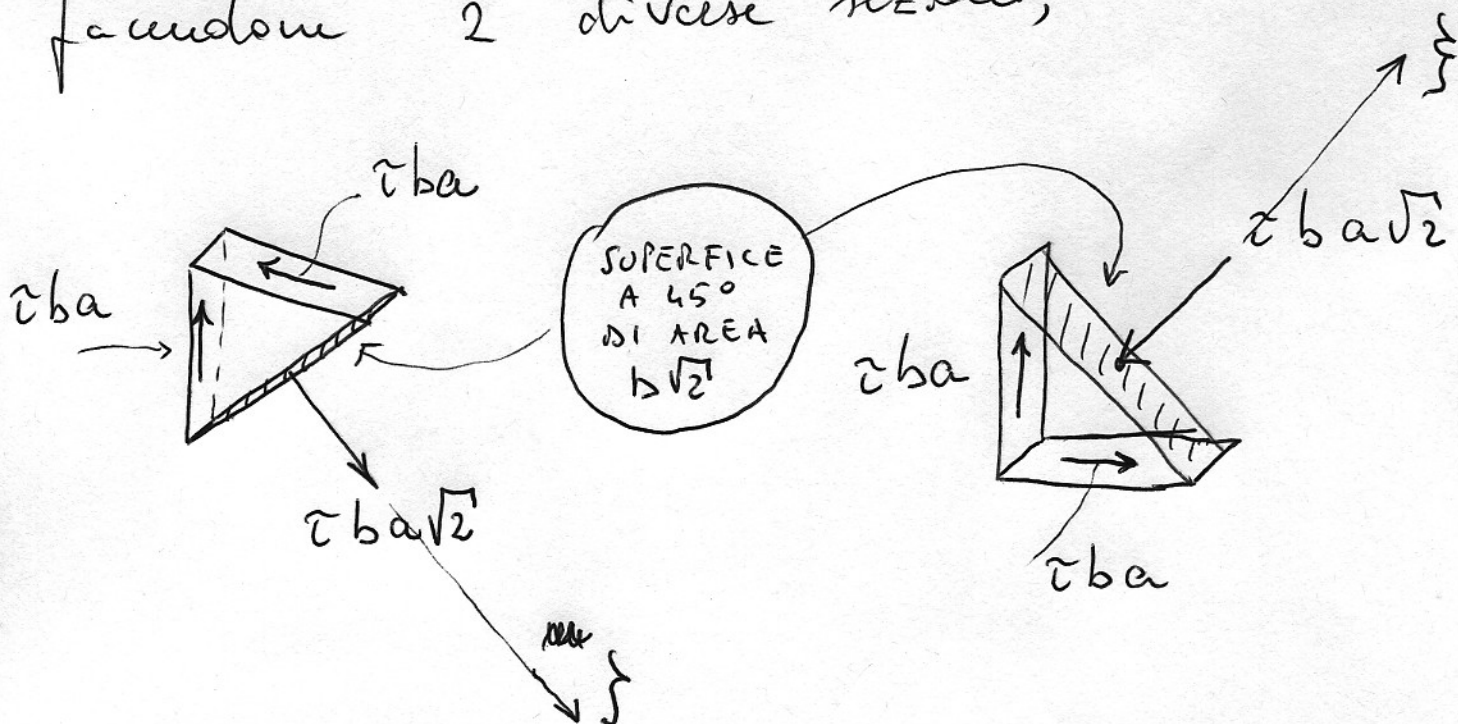
$$\Theta = \frac{M_t}{G} \frac{l}{2\pi R^3 b}$$

L'elemento di un cilindro cavo che
 quide è stato studiato lo stato di
 sforzo interno si presenta come a fig (2):
 In questo caso si assume $ds = dx = a$

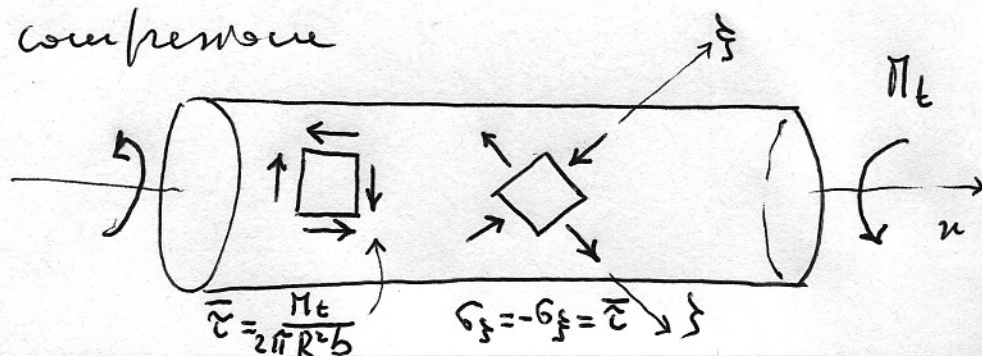
(4)
 Tors



facendo 2 diverse sezioni,



Nei 2 casi, e per le direzioni ξ e η la
 Torsione induce "tensioni normali, cioè σ "
 rispettivamente di Trazione
 su direzione ξ e compressione
 su direzione η



TORSIONE IN BARRE CIRCOLARI PIENE

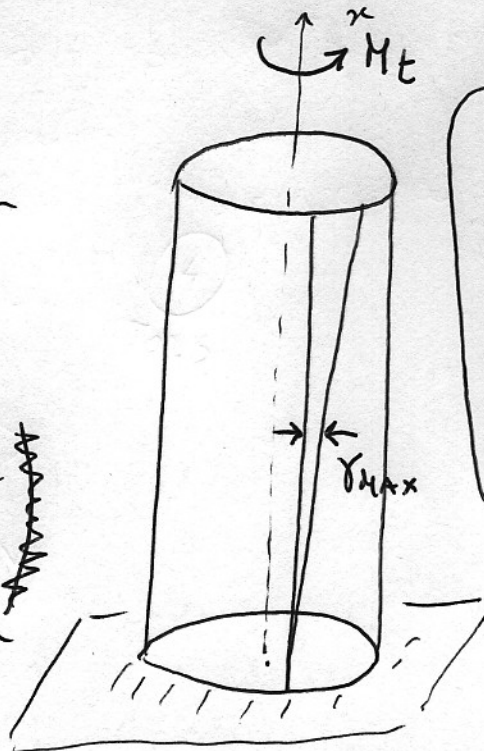
5

TORS

Lo scorrimento max
si ha nelle fibre esterne

$$\gamma_{\max} = \frac{R}{l} \textcircled{H}$$

Fibre più vicine all'asse
distate a distanza $z < R$
scorrono di una quantità
minore



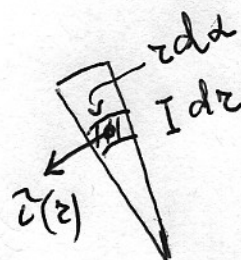
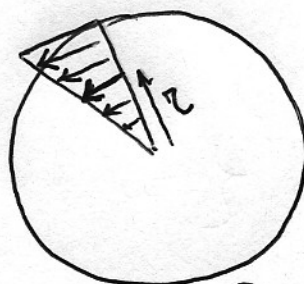
PER SIMMETRIA
POLARE LE
SEZIONI NON
SI INGROBBANO
E RUOTANO SOLO
NEL LORO PIANO
(ATTORNO AD x)

$$\gamma(z) = z \frac{\textcircled{H}}{l} = z \beta \quad \text{se} \quad \beta = \frac{\textcircled{H}}{l}$$

"angolo
unitario
di torsione"

Se $\gamma(z) = \beta z$ e ricordando che le
deformazioni γ sono indotte dalle "duali" tensioni
 τ si ha (ricordare il legame elastico a
torsione)

$$\tau(z) = G \beta z$$



Per l'equilibrio con il momento torcente esterno

$$W = M_t = \int_0^{2\pi} \int_0^R \tau(z) \cdot z \cdot dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R G \beta z \cdot z \cdot \underbrace{z dz}_{dA} dz = G \beta \int_0^{2\pi} dz \int_0^R z^3 dz$$

$$M_t = G \frac{\pi R^2}{2} \beta = G I_G \beta \Rightarrow \beta = \frac{M_t}{G I_G} ; \quad \textcircled{H} = \frac{M_t l}{G I_G}$$

me:

$$\gamma = \beta r, \quad \tau = G\beta r$$

(6)
TORS

$$\tau = G\beta r = G \frac{M_t}{GI_G} r; \quad \tau(r) = \frac{M_t}{I_G} r$$

con $\tau(r=0)=0$ e $\tau(r=R)=\tau_{MAX} = \frac{M_t}{I_G} R$



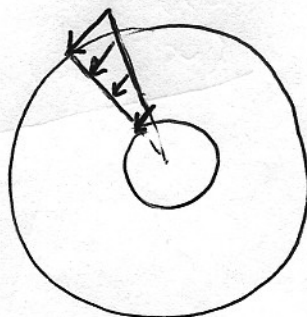
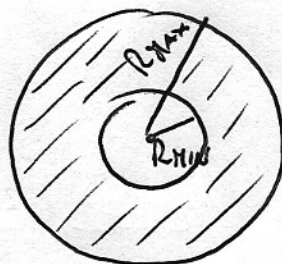
SEZIONE CIRCOLARE CAVA:

Le relazioni sono analoghe

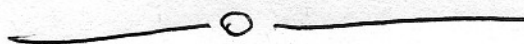
me $R_{MIN} < r < R_{MAX}$

$$I_G = \frac{\pi}{2} (R_{MAX}^4 - R_{MIN}^4)$$

$$\tau(r) = \frac{M_t}{I_G} r$$



~~LA CAVITÀ~~



AL TENDERE A ZERO DELLO SPESORE
DEL TUBO ~~MA~~ $R_{MIN} \approx R_{MAX}$ e le

τ VARIANO POCCHISSIMO TRA R_{MIN} ed R_{MAX}

SI RITROVA UNA τ PARI A QUELLA CHE

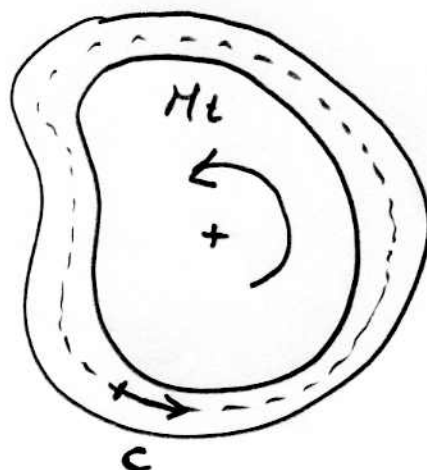
SI HA NEL TUBO ~~MA~~ MOLTO SOTTILE DI

PG ①

PARETE SOTTILE E FORMA QUALUNQUE (Bredt)
(SEZIONI BICONNESSE)

La sezione sia caratterizzata

* dalla fibra media
(tratteggiata su figura)
equidistante dai contorni
esterno ed interno. Su
di essa si assume una
origine ed una asse
curvilinea C .



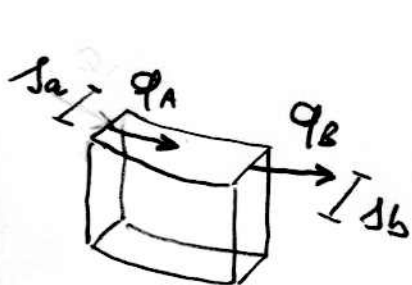
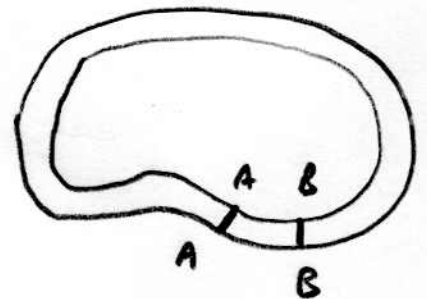
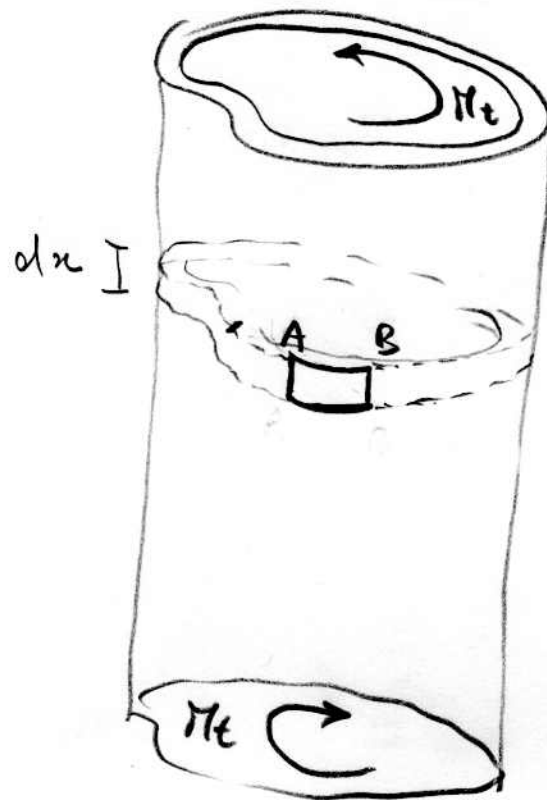
* dalla legge $S(C)$ che fornisce il valore dello
spessore ai diversi valori di ascissa C (nonché
con spessore variabile).

Per analogia ed i risultati ottenuti per la sezione
circolare cava si assume l'esistenza, a fronte
della coppia Torcente applicata M_t , di una
forza di scorrimento per unità di lunghezza
di valore $q(C)$,
e diretta come la Tangente nel punto di
ascissa C .

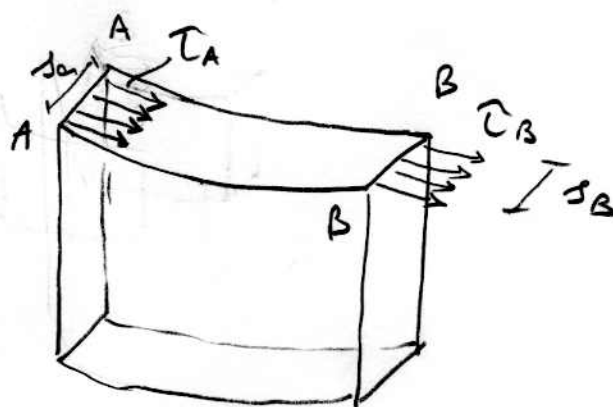
Come prima cosa verrà dimostrato che la
forza di scorrimento $q(C)$ è in realtà
indipendente da C ovvero è costante
sulla sezione.

8

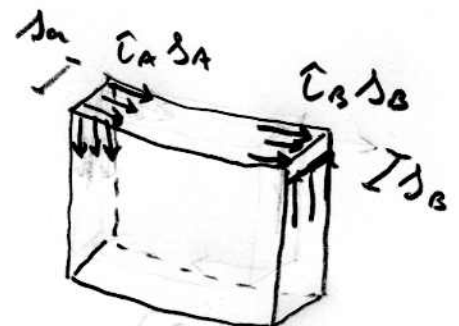
To consider, a Tel due l'equilibrio
della porzione di solido cavo su parte sottile
intercettata tra 2 diverse corde A e B
che contornano e 2 diverse sezioni trasversali
costanti due -



(a)



(b)



(c)

consideriamo pertanto in (a) : (9)

valori delle forze di scorrimento q in
2 diverse corde A e B della sezione.

Le forze di scorrimento q [FL^{-1}] si
considerano prodotte da una distribuzione
costante di forze per unità di superficie
 τ [FL^{-2}] costanti lungo la corda.

Da q_A, q_B in (a) si passa alla
distribuzione di τ legate alle q
della relazione

$$\tau(c) \cdot s(c) = q(c)$$

Pertanto la situazione è quella schematizzata
nella parte (b) della figura di fine
pagina precedente.

Per una proprietà "tipica" delle Tensioni
Tangenziali detta "reciprocità delle Tensioni
Tangenziali" (che verrà dimostrata nel
proseguo del corso) la distribuzione di
 $\tau \cdot s$ in A si ritrova sulle faccia verticale
di sinistra dell'elemento considerato mentre
la distribuzione di $\tau \cdot s$ in B la si
ritrova, di segno opposto, su quella verticale di destra.

La situazione è schematizzata
nel quadro (c) delle figure di fine
pg 8 -

(10)

L'equilibrio alla trazione verticale che
conco elemento considerato consente di
scrivere

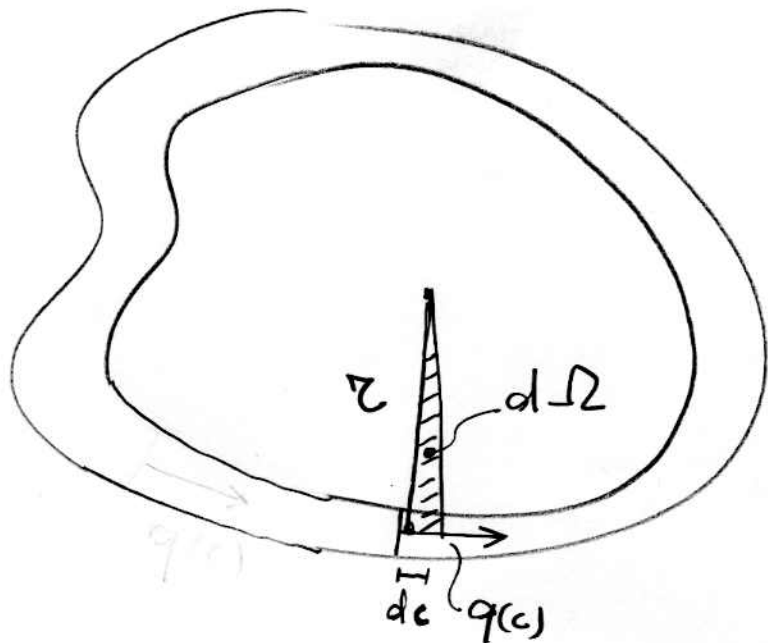
$$\tau_A \delta_A dx = \tau_B \delta_B dx$$

ovvero $\tau_A \delta_A = \tau_B \delta_B = \text{cost.}$

Quindi $\tau(c) \delta(c) = q(c) = \text{costante}$
sul contorno -

Dimostrando che lo scorrimento $q(c)$ è
costante lungo c , per determinarne
il valore si suppone che una coppia
torcente M_t applicata si consideri
(come di consueto) l'equilibrio (ovvero
l'equivalenza) tra le azioni esterne M_t
applicata ed il risultante delle azioni
interne q da essa suscitate

Detto P un opportuno punto interno (11)
della sezione e considerato i momenti
torcenti di azione esterne ed interne
attorno ad esso si ha:



$$M_t = \oint q(c) \cdot z \cdot dc$$

ma $q(c)$ è costante in c e può andare
fuori il segno di integrazione mentre se
prodotto $z \cdot dc = z d\Omega$ essendo $d\Omega$
il triangolo elementare di base dc ed
altezza z .

$$M_t = q \oint z d\Omega = 2q \Omega$$

perché l'integrale degli "spazi" elementari
 $d\Omega$ rivelerà essere l'area Ω racchiusa
dalla linea media.

Essempio per $q = \tau s$ e h : (12)

$$M_t = 2q\Omega = 2\tau s\Omega$$

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega s} \quad (1)$$

che evidentemente conferma il risultato ottenuto per altra via per la sezione circolare cava di piccolo spessore che risulta essere una "fessitura" sezione cava in parete sottile.

Come risulta dalla (1) in una sezione del tipo considerato avente "area racchiusa dalla fibra media" per cui ad Ω , soggetta a momento torcente M_t , la τ (costante su ogni corda) sono più alte laddove lo spessore " s " della corda è più piccolo -

ANALOGIA IDRODINAMICA

$q \rightarrow$ portata

$\tau \rightarrow$ velocità fluido

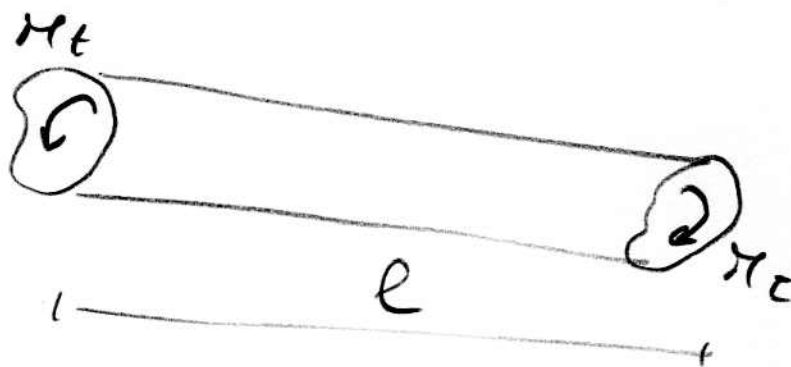
$s \rightarrow$ sezione della conduttura

} portata costante lungo un condotto.

Le cosiddette Torsionelle di
sezioni di questo tipo si valuta
con la relazione

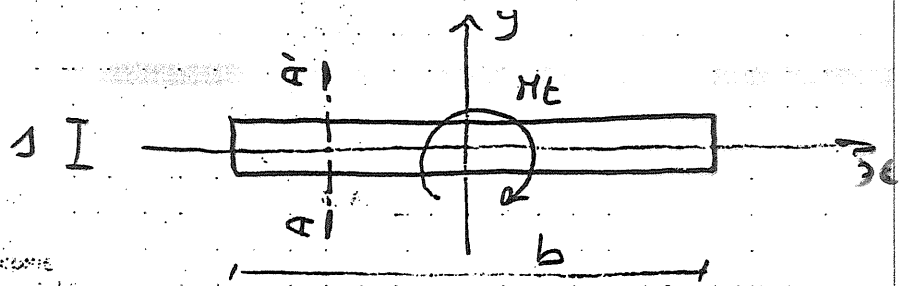
$$I_p^* = \frac{4 \Omega^2}{\oint \frac{dc}{s(c)}}$$

per cui, noto il M_t applicato può
valutare la rotazione relativa
delle sezioni estreme della Trave



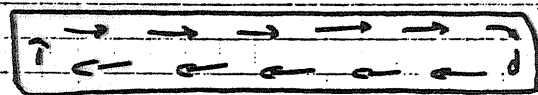
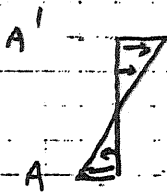
$$\Theta = \frac{M_t l}{G I_p^*}$$

TORSIONE PER SEZIONI RETTANGOLARI STRETTE 2



Non si fa la trattazione che richiederebbe l'utilizzo di una teoria non sviluppata ma si fornisce il solo risultato finale:

- Andamento delle τ su una qualunque sezione AA' e flusso delle τ :



$$\tau = \frac{2 M_t}{\frac{1}{3} b h^3} \cdot y \quad \left(-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \right)$$

$$\tau_{min} = \tau_{max} = \tau \left(\pm \frac{1}{2} \right) = \pm \frac{2 M_t}{\frac{1}{3} b h^3} \frac{1}{2} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} b h^2}$$

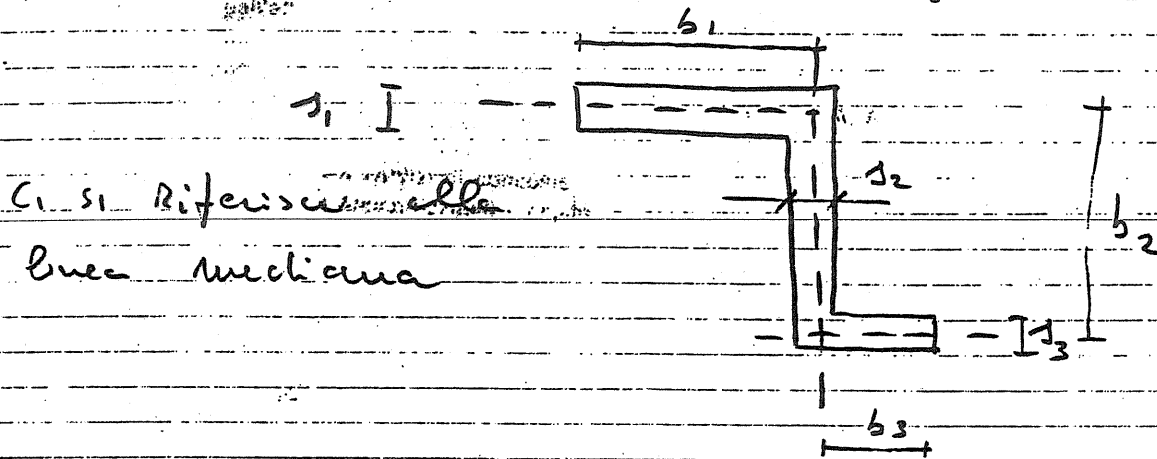
Per l'angolo unitario di Torsione θ vale una relazione simile a quella valida per le sezioni circolari introducendo un opportuno I_p^*

$$\theta = \frac{M_t}{G I_p^*}$$

$$I_p^* = \frac{1}{3} b h^3$$

MOMENTO DI INERZIA POLARE FITTIZIO!

ESTENSIONE AL CASO DI SEZIONE COMPOSTA DA
PIÙ SEZIONI RETTANGOLARI STRETTE:



- M_t applicato si ripartisce sugli i elementi in funzione delle rigidezze Torsionali di ogni elemento. Elemento i -esimo porta M_{ti} che Totale M_t con:

$$\sum_{i=1}^n M_{ti} = M_t$$

$\nwarrow$ elemento
 $\uparrow$ applicato

• CONDIZIONE DI EQUILIBRIO

- La J_i di ogni singolo elemento deve essere uguale a tutte le altre ed alla J della sezione pensata intera.

$$J_i = J$$

nell'i-esima parte della sezione intera

• CONDIZIONE DI CONGRUENZA

Per la singola sezione rettangolare si ha
e-essendo vale la relazione

$$J_i = \frac{M_{ti}}{G \frac{1}{3} b_i s_i^3} = J \quad (1)$$

per obbedire alla relazione di congruenza
circa J_i sarà uguale alla J della sezione

$$J_i = \frac{M_{ti}}{G \frac{1}{3} b_i s_i^3} = J \quad \text{da cui ricavo:}$$

$$M_{ti} = J G \frac{1}{3} b_i s_i^3$$

per l'equilibrio sarà $\sum M_{ti} = M_t$ per cui:

~~M_t~~ $M_t = \sum_i M_{ti} = \sum_i J G \frac{1}{3} b_i s_i^3$

si ricava allora una relazione valida
per l'intera sezione:

$$J = \frac{M_t}{G \sum_i \frac{1}{3} b_i s_i^3} = \frac{M_t}{G I_p^*}$$

$I_p^* = \sum_i \frac{1}{3} b_i s_i^3$
e' il mom. di
inerzia
parallelo
all'intera sezione

introducendo questo $\uparrow$ valore
nella (1) si ottiene:

$$M_{ti} = \frac{G \frac{1}{3} b_i s_i^3}{G \sum_i \frac{1}{3} b_i s_i^3} M_t$$

(risulta anche $\sum_{i=1}^n M_{ti} = M_t$ come è facile verificare)

Sull' i -esimo rettangolo sarà:

$$\tau_{\max i}^0 = \pm \frac{M_{ti}}{\frac{1}{3} b_i h_i^2}$$

PASSI DA ESEGUIRE

1) Calcolare le v.d.p. torsionali dei singoli rettangoli componenti $I_{p i}^* = \frac{1}{3} b_i \cdot h_i^3$

2) Ripartire M_t sui singoli componenti:

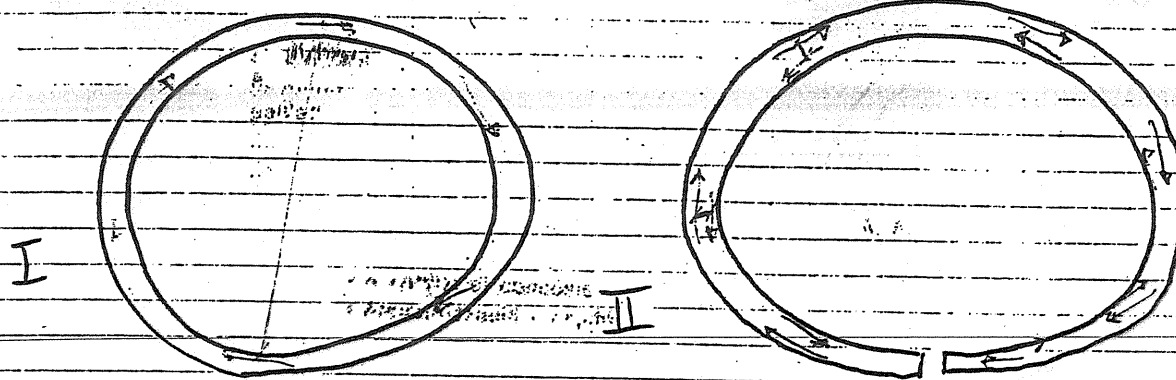
$$M_{ti} = M_t \frac{\frac{1}{3} b_i \cdot h_i^3}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{3} b_i \cdot h_i^3}$$

3) Calcolare le $\tau_{\max}$ su ogni rettangolo

$$\tau_{\max i} = \frac{M_{ti}}{\frac{1}{3} b_i \cdot h_i^2}$$

ESEMPIO

5



TORSIONE ALLA BRENT

TORSIONE TIPO SEZIONE
RETTANGOLARE STRETTA

$$\tau^I = \frac{M_t}{2\pi r \delta} = \frac{M_t}{2\pi r^2 \delta}$$

$$\tau_{max}^{II} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} b \delta^3} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} 2\pi r \delta^3}$$

sezione lunga $b = 2\pi r$
spessa δ

$$\frac{\tau^{II}}{\tau^I} = 3 \frac{r}{\delta}$$

$$r \frac{\delta}{r} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{\tau^{II}}{\tau^I} = 30$$

La sezione II anche molto peggio
la Torsione della sez I