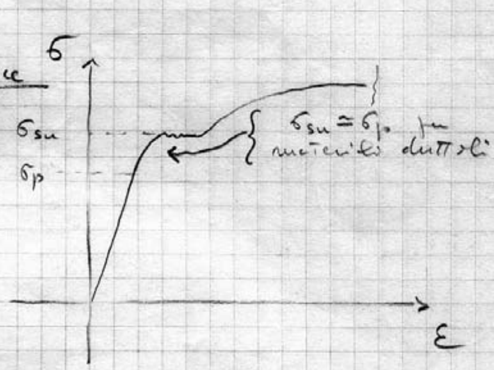
VERIFICHE DI RESISTENZA

- Assegnate in un punto le componenti del Tensore delle Tensione si vuole determinare se in tale punto il materiale rimane in campo elastico
- Si tratta in sostanza di verificare se le hp alla base della Teoria lineare dei solidi elastici sono verificate (altrimenti i "numeri" ottenuti non hanno alcun significato fisico).
- Tale controllo, banale in regime di Tensioni monoassiale, deve essere esteso al caso generale in cui nel punto considerato sono diverse da zero le varie componenti del Tensore della Tensione

STATO MONOASSIALE

Prova di riferimento
prova a Trazione semplice

barretta di area A di acciaio



Si calcola $\sigma = \frac{N}{A}$ costante nei vari punti della barretta

Si controlla che la σ di lavoro sia al massimo pari ad un valore fornito dalla normativa e che dipende dal Tipo di acciaio e che si chiama Tensione ammissibile

$$\sigma_{amm} = \frac{\sigma_{lim}}{n} \quad \text{con} \quad \sigma_{lim} = \begin{cases} \sigma_{su} \\ \sigma_p \end{cases}$$

valore per il quale il materiale esce dal campo elastico

MATERIALE DUTTILE

$n > 1$ Tiene in conto di alcune incertezze insite nel problema

$\sigma_{lim} = \sigma_{rottura}$

MATERIALE FRAGILE

②

INCERTEZZE : schematizzazioni struttura, vincoli, azioni
Teorie rigorose o approssimate
metodo di calcolo
errori di calcolo
etc..

$n > 1$ tiene in conto tali incertezze

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{amm} = \frac{\sigma_{lim}}{n}$$

STATI PLURIASSIALI <u>Occorrerebbero infinite prove sul materiale</u>

In problemi tridimensionali possono essere $\neq 0$ tutte le σ_{ij}

Occorre formulare dei criteri che ci consentano di individuare un parametro di riferimento (di non banale individuazione in questo caso) da confrontare con la tensione ammissibile in uno stato monoassiale.

Da prove diverse su diversi materiali sotto diversi stati pluriassiali si è visto che la crisi del materiale in un punto, si ha quando una certa funzione f delle tensioni principali nel punto raggiunge un valore assegnato k:

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = k$$

CONDIZIONE DI CRISI

f funzione da precisare

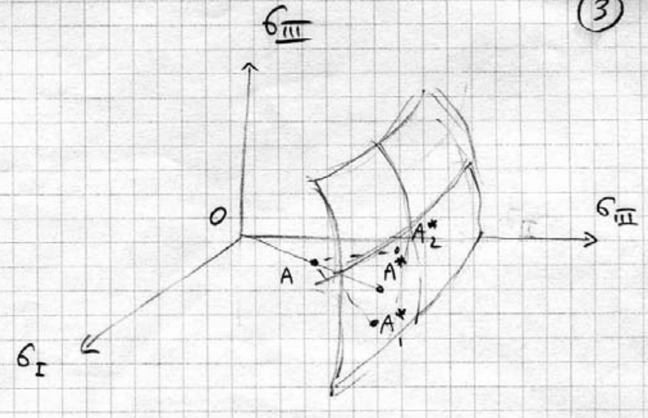
Le $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ definiscono infatti completamente lo stato tensionale in un punto. (Pensare alla rappresentazione di Mohr)

Se nel punto P mi metto nello spazio delle tensioni principali la relazione precedente rappresenta una superficie.
Il dominio del quale $f(\sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III}) = k$ è la frontiera è il dominio ammissibile del materiale. Se lo stato tensionale nel punto è sulla frontiera si ha la crisi del materiale

A è interno
A^* è sulla frontiera

Il coefficiente di sicurezza nel punto può essere interpretato come

$$n = \frac{OA^*}{OA}$$



Partendo però da un punto $A \in$ al dominio ammissibile posso arrivare sulla frontiera facendo crescere tutte le componenti del tensore S allo stesso modo (cioè seguendo un cammino del tipo $A \to A^*$ lungo OA^*) oppure in un qualunque altro modo
Posso arrivare sulla frontiera anche annullando tutte le componenti di S tranne una σ_{ii} ed arrivare sulla frontiera per la crescita della sola $\sigma_{ii} \neq 0$ vale a dire in stato monoassiale -

Hp ho crisi in un punto al raggiungimento della frontiera, ovvero quando

$$f(\text{-----}) = K$$

qualunque sia il percorso per raggiungere la frontiera

$$\underset{\text{STATO PLURIASSIALE}}{f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = K}$$

$$\underset{\text{STATO MONOASSIALE DI RIFERIMENTO O EQUIVALENTE}}{f(\sigma_{id}, 0, 0) = K}$$

$$\Longrightarrow f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = f(\sigma_{id}, 0, 0)$$

$$\sigma_{id} = g(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$$

Lego così le tensioni principali che mi provocano la crisi in un punto ad una tensione monoassiale di riferimento o ideale che mi provocherebbe ugualmente la crisi del materiale -

Costruisco una grandezza tensionale fittizia che è equivalente per gli effetti suscitati allo stato di tensione pluriassiale.

CRITERI DI RESISTENZA

CRITERIO DELLA σ_{MAX} (Rankine)

$\int \rightarrow$ "{massima} Tens. principale"

$$\max\{\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}\} = k_1$$

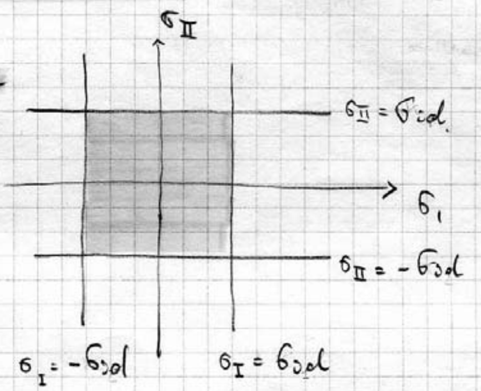
$$\min\{\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}\} = -k_2$$

$$\Rightarrow \max\{|\sigma_I|, |\sigma_{II}|, |\sigma_{III}|\} = k$$

COMP SIMMETRICO A TRAZ. E COMPRESSIONE

Quando la più grande delle tre tensioni principali in un punto raggiunge un determinato valore si esce dal dominio ammissibile per il materiale. Le altre due tensioni principali nel punto con questo criterio non vengono considerate.

Rappresentazione grafica del criterio nel caso sia $\sigma_{III} = 0$



ESPRESSIONE σ_{id}

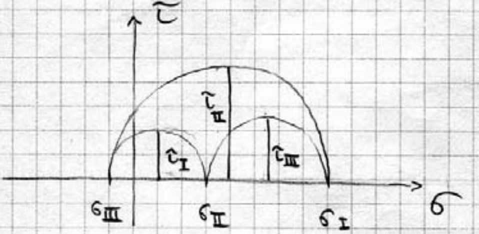
$$\max\{|\sigma_I|, |\sigma_{II}|, |\sigma_{III}|\} = \max\{|\sigma_{id}|, 0, 0\}$$

$$\sigma_{id} = MAX\{|\sigma_I|, |\sigma_{II}|, |\sigma_{III}|\}$$

CRITERIO DELLA τ_{MAX} (Tresca)

$f \rightarrow$ "massima tensione tangenziale nel punto"

$\exists$ una τ_{MAX} per ogni piano avente per supporto un asse principale.
Tale valore di τ è pari alla metà della differenza delle 2 tensioni principali nel piano.



$$\max\left\{\frac{|\sigma_I - \sigma_{II}|}{2}, \frac{|\sigma_{II} - \sigma_{III}|}{2}, \frac{|\sigma_I - \sigma_{III}|}{2}\right\} = K$$

$$\max\left\{\tau_{III}, \tau_I, \tau_{II}\right\} = K$$

La crisi si ha quando la τ_{MAX} agente nel punto raggiunge un valore fissato

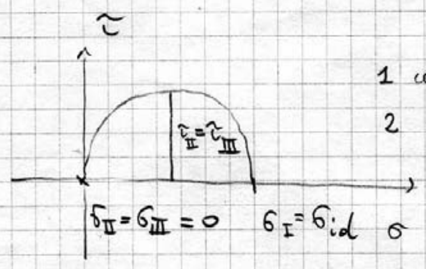
La τ_{MAX} è la più grande delle 3 τ_{MAX} relative allo stato di tensione su ogni piano avente per supporto un asse principale.

$\}$ Nel caso della figura $\tau_{MAX} = \tau_{II} = \dfrac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$

Devo confrontare comunque questa τ_{MAX} con la max τ in uno stato monoassiale equivalente per avere il legame richiesto

$$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III} \longrightarrow \sigma_{id}$$

Per uno stato monoassiale equivalente in cui 1 solo σ è $\neq 0$ si ha:



1 cerchio degenera nell'origine e 2 sono coincidenti:

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_I}{2} = \frac{\sigma_{id}}{2}$$

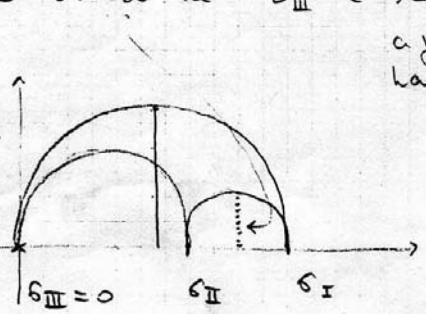
ESPRESSIONE σ ideale

$$\frac{\sigma_{id}}{2} = MAX \left\{ \frac{|\sigma_I - \sigma_{II}|}{2}, \frac{|\sigma_I - \sigma_{III}|}{2}, \frac{|\sigma_{II} - \sigma_{III}|}{2} \right\}$$

$$\sigma_{id} = MAX \left\{ |\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_I - \sigma_{III}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}| \right\}$$

Att. per uno stato piano in cui $\sigma_{III} = 0$ si potrebbe pensare che τ_{MAX} È SEMPRE la max τ nel piano I-II ovvero la τ_{III} e invece la τ_{MAX} POTREBBE ESSERE LA τ_{II} agente nel piano I-III SE σ_{II} ha lo stesso segno di σ_I

$$\tau_{II} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{\sigma_I - 0}{2} = \frac{\sigma_I}{2}$$



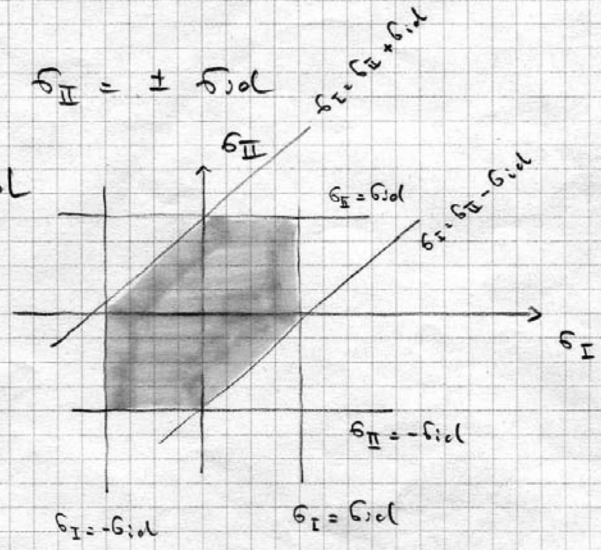
Rappresentazione grafica del criterio nel caso di $\sigma_{III} = 0$ (stato piano)

$$\sigma_{id} = MAX \left\{ |\sigma_I| , |\sigma_{II}|, |\sigma_I - \sigma_{II}| \right\}$$

ovvero

$$\sigma_I = \pm \sigma_{id} \qquad \sigma_{II} = \pm \sigma_{id}$$

$$\sigma_I = \sigma_{II} \pm \sigma_{id}$$



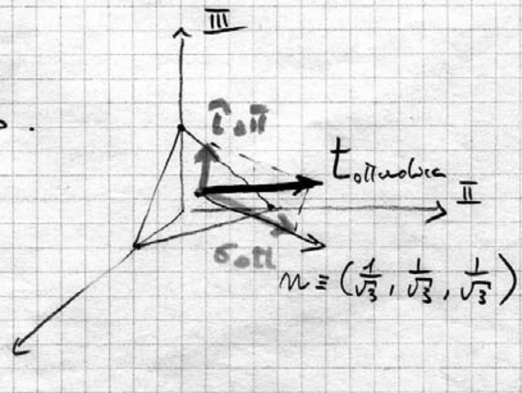
Questo criterio tiene in conto in un punto di 2 delle 3 tensioni principali

Il criterio nel caso di una sola σ e una sola τ diverse da zero diventa

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

CRITERIO DELLA τ OTTAEDRICA
(Von Mises)

Una descrizione migliore dello stato di tensione in un punto deve tenere in conto l'effetto di tutte e 3 le tensioni principali.
La τ ottaedrica, dopo essersi messi nel riferimento principale, è la τ agente su un elementino avente per normale la trisettrice dell'ottante che ha coseni direttori uguali e perciò pari a $\frac{1}{\sqrt{3}}$ rispetto agli assi del sistema di riferimento.



Vediamo che la τ_{ott} è funzione di tutte e 3 le tensioni principali nel punto

Per valutare la τ_{ott} si valuta con la relazione di Cauchy la $\vec{t}_{ott}$ - si valuta la σ_{ott} e poi sarà

$$\tau_{ott}^2 = \left|\vec{t}_{ott}\right|^2 - \sigma_{ott}^2$$

$$t_i^n = \sigma_{ij}\, n_j$$

t_i^n componenti scalari di $\vec{t}^n$ sulla terna cartesiana
σ_{ij} comp. speciali di tensione
n_j coseni direttori asse n

Nel riferimento principale la relazione si scrive essendo $\sigma_{ij} = \delta_{ij}\sigma_{ij} = \sigma_{ii}$ ed ogni σ princ. ha componente solo lungo il corrispondente asse:

$$\left.\begin{aligned} t_I^n &= \sigma_I\, n_I \\ t_{II}^n &= \sigma_{II}\, n_{II} \\ t_{III}^n &= \sigma_{III}\, n_{III} \end{aligned}\right\}$$

comp di $\vec{t}^n$ lungo i 3 assi principali (essendo il rif. principale non ci sono contributi di tipo τ)

$$|\vec{t}^{n}|^2 = \sigma_I^2 n_I^2 + \sigma_{II}^2 n_{II}^2 + \sigma_{III}^2 n_{III}^2 = \frac{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2}{3}$$

$$n_I = n_{II} = n_{III} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Per calcolare la σ_{ott} utilizzo la relazione tensoriale

$$\sigma_{hk} = \sigma_{ij}\, n_{hi}\, n_{kj}$$

$$\sigma_n = \sigma_{ij}\, n_i\, n_j$$

ma σ_{ij} sono nella terna principale $\sigma_{ij} = 0$ per $i \neq j$

$$\sigma_n = \sigma_I n_I n_I + \sigma_{II} n_{II} n_{II} + \sigma_{III} n_{III} n_{III}$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}$$

La $\sigma_{ottaedrica}$ è la media delle 3 tensioni principali nel punto. I piani ottaedrici sono significativi per grandezze medie

$$\tau_{ott}^2 = |\vec{t}^{n}_{ott}|^2 - \sigma_{ott}^2 = \left(\frac{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2}{3}\right) - \left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}\right)^2$$

eseguendo alcuni passaggi si ottiene

$$\tau_{ott} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \sigma_I\sigma_{II} - \sigma_I\sigma_{III} - \sigma_{II}\sigma_{III}}$$

è questo il parametro, funzione di tutte e 3 le tensioni principali, che crescendo mi determina la crisi del materiale. Devo confrontare la τ_{ott} con la τ_{ott} di uno stato monoassiale equivalente

$$\tau_{ott}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = k$$

$$\tau_{ott}(\sigma_{id}, 0, 0) = k$$

$$\tau_{ott\ \text{mon. equiv}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\sigma_{id}^2}$$ da cui si ricava

l'espressione della Tensione ideale

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \sigma_I\sigma_{II} - \sigma_I\sigma_{III} - \sigma_{II}\sigma_{III}}$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z + 3\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right)}$$

la 2ª espressione si ottiene ricorrendo nella 1ª espressione al 1° e 2° invariante del Tensore delle Tensioni

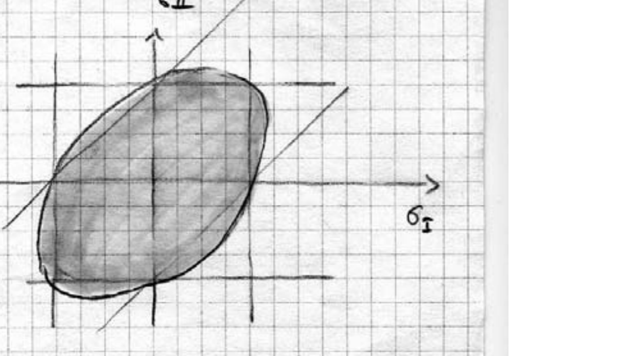
Questo criterio in realtà definisce una grandezza che ha anche un significato energetico. La τ_{ott} è infatti legata al lavoro di deformazione per variazione di forma. Energeticamente tale criterio si formulerebbe dicendo che si ha crisi nel punto quando le tensioni compiono un lavoro che eguaglia un livello di lavoro limite prefissato (si arriva alla stessa espressione della σ_{id})

Rappresentazione grafica del criterio nel caso di stato piano

$$\sigma_{id}^2 = \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I\sigma_{II}$$

È un ellisse il cui semiasse maggiore è nella bisettrice I–III quadrante

È perfettamente circoscritta all'esagono di TRESCA



Il criterio nel caso di 1 sola σ e 1 sola τ diverse da zero diviene:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$