ES. 3

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-2/x}}{x^\alpha (2+x^\alpha)}\, dx \qquad \alpha>0$$

Se $x \to 0^+$ $\quad \dfrac{e^{-2/x}}{x^\alpha(2+x^\alpha)} \sim \dfrac{e^{-2/x}}{x^\alpha} \to 0 \quad \forall\, \alpha>0$

dunque non ho problemi

Se $x \to +\infty$ $\quad \dfrac{e^{-2/x}}{x^\alpha(2+x^\alpha)} \sim \dfrac{1}{x^{2\alpha}}$ integrabili se $2\alpha>1$

$\Rightarrow \alpha > 1/2$

Dunque l'integrale è convergente se $\alpha > 1/2$

ES. 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lg\left[\frac{n^4}{n^4+3n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(\frac{n^4+3n}{n^4}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(1+\frac{3}{n^3}\right)$$

Siccome per x piccolo $\lg(1+x) \simeq x$

Si ha che $\lg\left(1+\dfrac{3}{n^3}\right) \simeq \dfrac{3}{n^3}$ e $\sum \dfrac{3}{n^3} < +\infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=1} \left| \lg \frac{n^4}{n^4+3n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(1+\frac{3}{n^3}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3}$$

dunque la serie converge assolutamente $\Rightarrow$ semplicemente.