Es. 5

$y' = (1+y)x^2 \qquad y = -1$ soluzione costante

Supponiamo $y \neq -1$ possiamo usare il metodo di separazione delle variabili

$$\frac{y'}{1+y} = x^2 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{1+y} = \int x^2\,dx$$

$$\lg|1+y| = \frac{1}{3}x^3 + \tilde{c} \quad \Rightarrow \quad y(x) = c\,e^{\frac{1}{3}x^3} - 1$$

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

$y(x) = 2\,e^{1/3\,x^3} - 1$ definita $\forall x \in \mathbb{R}$

Es. 6

$$y'' - 3y' + 2y = x\,e^{-2x}$$

omogenea associata $z'' - 3z' + 2z = 0$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$z(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$$

Per trovare una soluzione particolare dell'eq. non omogenea uso il metodo della somiglianza

$$\bar{y}(x) = (ax+b)\,e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{12} \quad b = \frac{7}{(12)^2}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{12}\left(x + \frac{7}{12}\right)e^{-2x}$$

$\Rightarrow$ soluzione generale dell'eq. è

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{12}\left(x + \frac{7}{12}\right)e^{-2x}$$