Es. 5

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+2n}{n^2+3n} \left(\frac{x-1}{3}\right)^n$$

$$a_n = \frac{2+2n}{n^2+3n} \cdot \frac{1}{3^n}$$

Uso il metodo del rapporto per calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2+2(n+1)}{(n+1)^2+3(n+1)} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{n^2+3n}{2+2n} 3^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow R = 3$

$\Rightarrow$ La serie converge assolutamente per $|x-1| < R = 3$

$\Rightarrow$ la serie converge puntualmente per $|x-1| < R = 3$

$|x-1| < 3 \Leftrightarrow x \in (-2, 4)$

$x = -2$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+2n}{n^2+3n} (-1)^n \qquad \frac{2+2n}{n^2+3n} \underset{n \text{ grande}}{\sim} \frac{1}{n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$ converge per Leibniz $\Rightarrow$ la serie converge per $x = -2$

$x = 4$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+2n}{n^2+3n} \qquad \frac{2+2n}{n^2+3n} \sim \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ la serie non converge

$\Rightarrow$ La serie converge puntualmente per $x \in [-2, 4)$

Usando le proprietà delle serie di potenze si ha convergenza totale per

$|x-1| \leq \delta < 3 \qquad x \in [1-\delta, 1+\delta] \quad \delta \in (0,3)$