ESAME 12.7.2016 1° PARZIALE

SCHEMA SOLUZIONE

Es. 1

$$y'' - y' - 2y = t^2 + 1$$

Omogenea associata $\quad z'' - z' - 2z = 0$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \qquad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$z(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

Soluzione particolare $\rightarrow \quad \tilde{y}(t) = at^2 + bt + c \qquad y'(t) = 2at + b \quad y'' = 2a$

$$2a - (2at + b) - 2(at^2 + bt + c) = t^2 + 1$$

$$-2a t^2 - 2(a+b)t + 2a - b - 2c = t^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} -2a = 1 & a = -1/2 \\ -2(a+b) = 0 & b = 1/2 \\ 2a - b - 2c = 1 & c = -5/4 \end{cases}$$

Integrale generale $\quad y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{+2t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{5}{4}$

$$y(0) = c_1 + c_2 - \frac{5}{4} = 2 \qquad c_1 + c_2 = 2 + 5/4 = \frac{13}{4} \qquad c_1 = \frac{13}{4} - c_2 = \frac{24}{4} = 6$$

$$y'(0) = -c_1 - 2c_2 + \frac{1}{2} = 0 \qquad -\frac{13}{4} - c_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} - \frac{13}{4} = -\frac{11}{4}$$

$$y(t) = 6e^{-t} - \frac{11}{4} e^{2t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{5}{4}$$

$$y(t) \underset{t \to \infty}{\sim} \begin{cases} c_2 e^{2t} & \text{per } c_2 \neq 0 \\ -\frac{1}{2} t^2 & c_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il sistema non perde memoria della condizione iniziale

Es. 2) $\vec{r}(t) = \left(t e^{-t}, (t-1)^2 e^{-t}, t e^{-t}\right) \qquad t \in [0,1]$

Le componenti sono funzioni continue $\Rightarrow$ la curva è continua

$\vec{r}(0) = (0, 1, 0) \neq \vec{r}(1) = (1/e, 0, 1/e) \Rightarrow$ la curva NON è chiusa

$$\vec{r}'(t) = \left((1-t)e^{-t}, \left(2(t-1)-(t-1)^2\right)e^{-t}, (1-t)e^{-t}\right)$$

$$\vec{r}'(t) = (t-1)e^{-t}\left(-1, 3-t, -1\right) \qquad \vec{r}(t) \in C^1[0,1]$$

$\vec{r}'(t) = 0 \iff t = 1 \Rightarrow$ la curva non è regolare, ha un pto di non regolarità in $t=1$.

La curva è regolare in $[0,1)$

$$|\vec{r}'(t)| = |t-1|e^{-t}\sqrt{1+(3-t)^2+1} = |t-1|e^{-t}\sqrt{11-6t+t^2}$$

Es. 3) $\rho = 3e^{\theta} \qquad \begin{array}{l} x(\theta) = 3e^{\theta}\cos\theta \\ y(\theta) = 3e^{\theta}\operatorname{sen}\theta \end{array} \qquad \theta \in [0, 4\pi]$

$ds = |\vec{r}'(\theta)|d\theta \qquad |\vec{r}'(\theta)| = \sqrt{9e^{2\theta}+9e^{2\theta}} = 3e^{\theta}\sqrt{2}$

$$I = \int_0^{4\pi} 3e^{\theta}\operatorname{sen}\theta\, 3\sqrt{2}\, e^{\theta} d\theta = 9\sqrt{2}\int_0^{4\pi} \operatorname{sen}\theta\, e^{2\theta} d\theta = 9\sqrt{2}\int_0^{4\pi} \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} e^{2\theta} d\theta$$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{2i}\int_0^{4\pi}\left(e^{(2+i)\theta} - e^{(2-i)\theta}\right)d\theta = \frac{9\sqrt{2}}{2i}\left[\frac{1}{2+i}\left(e^{8\pi}-1\right) - \frac{1}{2-i}\left(e^{8\pi}-1\right)\right] =$$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{2i}\left(e^{8\pi}-1\right)\frac{(2-i-2-i)}{4+1} = -\frac{9\sqrt{2}}{5}\left(e^{8\pi}-1\right)$$

Es. 4
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+\lg n}{3^n+1} (x-1)^n$$

$$a_n = \frac{n+\lg n}{3^n+1} (-1)^n$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1+\lg(n+1)}{3^{n+1}+1} \; \frac{3^n+1}{n+\lg n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n+1}{n} \, \frac{3^n}{3^{n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

$R=3 \Rightarrow$ convergenza assoluta per $|x-1|<3$

$x \in (-2, 4)$

$x=-2$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+\lg n}{3^n+1} (-3)^n =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\lg n}{3^n+1} 3^n \to \frac{n+\lg n}{3^n+1} \cdot 3^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \text{CN non verificata}$$

$\Rightarrow$ la serie non converge

$x=4$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+\lg n}{3^n+1} 3^n \to \frac{n+\lg n}{3^n+1} \cdot 3^n (-1)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \text{non ha limite}$$

$\Rightarrow$ CN non è verificata $\Rightarrow$ la serie non converge

$\Rightarrow$ La serie converge assolutamente e puntualmente per ogni $x \in (-2, 4)$

La serie converge totalmente in $I = [-2+\delta, 4-\delta]$ $\delta \in (0,3)$

Es. 5

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+\lg n}{\sqrt{1+2n\lg^2 n}} \cos(nx) \qquad x\in[0,2\pi]$$

$$a_n = \frac{1+\lg n}{\sqrt{1+2n\lg^2 n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\lg n}{\sqrt{2n}\,\lg n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

a_n è decrescente definitivamente $\Rightarrow$ posso applicare il teorema delle serie trigonometriche $\Rightarrow$ la serie converge $\forall x\in(0,2\pi)$

$x=0,2\pi$ $\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+\lg n}{\sqrt{1+2n\lg^2 n}}$ non converge

perché $\displaystyle\frac{1+\lg n}{\sqrt{1+2n\lg^2 n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}}$ non converge

Per essere la serie di Fourier di una f limitata $\sum_n a_n^2<+\infty$

$$\sum_n a_n^2 = \sum_n \frac{(1+\lg n)^2}{1+2n\lg^2 n} \qquad \text{dato che } \frac{1+\lg n}{1+2n\lg^2 n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

e $\sum_n \frac{1}{2n}$ non converge $\Rightarrow$ la serie non può essere la serie di Fourier di una funzione limitata.

$$\max_{x\in[0,2\pi]} \left| \frac{1+\lg n}{\sqrt{1+2n\lg^2 n}} \cos nx \right| = \frac{1+\lg n}{\sqrt{1+2n\lg^2 n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}} \qquad \sum_n \frac{1}{\sqrt{2n}} \text{ non converge}$$

$\Rightarrow$ la serie non converge TOTALMENTE $\Rightarrow$ Non posso applicare il teorema sulla continuità della somma $\Rightarrow$ non posso dire a priori che la somma della serie è una funzione continua

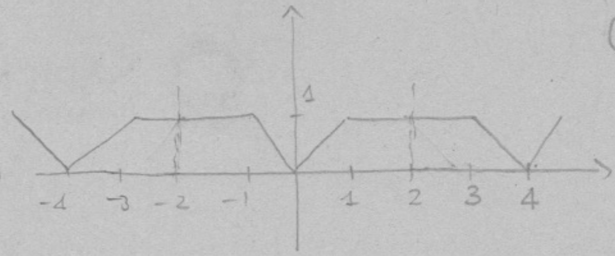
Serie delle derivate : $\displaystyle -\sum_n n\cdot\frac{1+\lg n}{\sqrt{1+2n\lg^2 n}}\sin(nx)$ non converge

perché le condizioni necessarie (CN) non è soddisfatta.

Non posso applicare il teorema sulla derivabilità termine a termine.

6)

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{per } |x| \in [0,1] \\ 1 & \text{per } |x| \in [1,2] \end{cases}$$



$$T = 4 \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi/2$$

$f(x)$ è pari $\Rightarrow b_k = 0$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{4}{T}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}}\left[\int_0^1 x\,dx + \int_1^2 dx\right] =$$

$$a_0 = \frac{1}{2} + 1 = 3/2$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \frac{2\cdot 2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx$$

$$a_k = \int_0^1 x\cos(k\omega x)\,dx + \int_1^2 \cos(k\omega x)\,dx =$$

$$= +\frac{x}{k\omega}\operatorname{sen}(k\omega x)\Big|_0^1 - \frac{1}{k\omega}\int_0^1 \operatorname{sen}(k\omega x)\,dx + \frac{1}{k\omega}\operatorname{sen}(k\omega x)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{k\omega}\cancel{\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{(k\omega)^2}\cos(k\omega x)\Big|_0^1 + \frac{1}{(k\omega)}\cancel{\left(-\operatorname{sen} k\pi/2\right)}$$

$$= \frac{1}{(k\omega)^2}\left(\cos(k\pi/2) - 1\right) = \begin{cases} -1 & k \text{ dispari} \\ \dfrac{(-1)^k - 1}{(k\omega)^2} & k \text{ pari} \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} 4\,\frac{\cos(k\pi/2) - 1}{(k\pi)^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)$$

Dato che

$$\int_0^T f^2(x) = 2\int_0^{T/2} f^2(x)\,dx = 2\left[\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 dx\right] = 2\left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{8}{3} < +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie di Fourier converge in media quadratica
(Teorema convergenza in media quadratica)

Identità Parseval

$$\int_0^T f^2(x)\,dx = \frac{T}{2}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right]$$

$$\frac{8}{3} = 2\left[\frac{1}{2}\,\frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\cos(k\pi/2) - 1)^2}{(k\omega)^2}\right]$$

$f(x)$ è una funzione regolare a tratti e continua

$\Rightarrow$ la serie di Fourier converge ad $f(x)$ $\forall x \in [-2, 2]$

$f'(x)$ non è continua in $[-2, 2]$, non posso applicare il teorema sulla derivabilità termine a termine

(Se si calcola la serie delle derivate prime si vede che la serie converge puntualmente ma non totalmente).

Velocità di convergenza a zero $\quad |a_k| \underset{k\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^2}$