Es. 4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2+\sqrt{n}}{n^3+3} (x-1)^n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3(n+1)^2+\sqrt{(n+1)}}{(n+1)^3+3} \cdot \frac{n^3+3}{3n^2+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad R = 1$$

$\Rightarrow$ La serie converge assolutamente $\forall x \in (0,2)$

$x=0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+\sqrt{n}}{n^3+3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ non converge

$x=2 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2+\sqrt{n}}{n^3+3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge per Leibniz

$\Rightarrow$ La serie converge assolutamente in $(0,2)$

" " puntualmente in $(0,2]$

" " " totalmente in $[\delta, 2-\delta]$ $\forall \delta \in (0,1)$

Es. 5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{\sqrt{n}+1} \cos(nx) \qquad x \in [0, 2\pi]$

a) $a_n = \dfrac{\lg n}{\sqrt{n}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ monotona definitivamente

$\Rightarrow$ la serie converge $\forall x \in (0, 2\pi)$ $x \neq \pi$ (teorema serie Fourier.)

Se $x=\pi \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{\sqrt{n}+1} (-1)^n$ a_n soddisfa ipotesi criterio di Leibniz $\Rightarrow$ la serie converge

$x = 0; 2\pi \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{\sqrt{n}+1} \qquad \frac{\lg n}{\sqrt{n}+1} \overset{n\geq 2}{\geq} \frac{1}{\sqrt{n}+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ non conv

$\Rightarrow$ la serie non converge per $x = 0, 2\pi$ $\Rightarrow$ La serie converge $\forall x \in (0, 2\pi)$

b) $\displaystyle\max_{x\in(0,2\pi)} \left|\frac{\lg n}{\sqrt{n}+1} \cos nx\right| = \frac{\lg n}{\sqrt{n}+1} \qquad \sum_n \frac{\lg n}{\sqrt{n}+1}$ non converge

$\Rightarrow$ la serie non converge totalmente $\Rightarrow$ non posso affermare a priori che la somma della serie sia continua.

$$a_n^2 = \frac{\lg^2 n}{(\sqrt{n}+1)^2} \sim \frac{\lg n}{n} \qquad \sum_{n=2} \frac{\lg n}{n} \text{ diverge}$$

$\Rightarrow$ la serie non può essere la serie di Fourier di una funzione (Serie di Fourier $\sum_n a_n^2 < +\infty$)