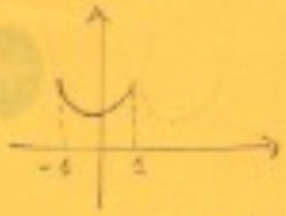
Es. 6 $f(x)=x^2+1$ $x\in[0,1]$ $T=2$ pari

$\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$



funzione pari $\Rightarrow b_k = 0$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx \underset{\text{pari}}{=} \frac{2}{T}\,2\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx$$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 (x^2+1)\,dx = 2\left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{8}{3}$$

$$a_k = 2\int_0^1 (x^2+1)\cos(k\pi x)\,dx = 2\left[(x^2+1)\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x\sin(k\pi x)}{k\pi}\,dx\right]$$

$$= -\frac{4}{k\pi}\left[-x\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx\right] = \frac{4}{(k\pi)^2}(-1)^k$$

$$f(x) \sim \frac{8}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{(k\pi)^2}\cos(k\pi x)$$

$$\int_0^T f^2(x)\,dx = 2\int_0^1 (1+x^2)^2\,dx = 2\int_0^1 (1+x^4+2x^2)\,dx = 2\left(1+\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\right) < +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie converge in media quadratica (teorema conv. in media quadratica)

$$2\cdot\frac{28}{15} = \frac{8}{9} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{(k\pi)^4} \Leftrightarrow \frac{7}{15} = \frac{1}{9} + \frac{2}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$$

La funzione è regolare a tratti $\Rightarrow$ la serie converge puntualmente in $[-1,1]$

inoltre la funzione è continua in $(-1,1)$ e $f(-1)=f(1) \Rightarrow$

la serie converge ad $f(x)$ $\forall x\in[-1,1]$

$f(x)\in C^1((-1,1))$ $f(-1)=f(1)$ $\Rightarrow$ la serie è derivabile termine a termine in $(-1,1)$

f' è regolare a tratti

$|a_k| = \frac{4}{(k\pi)^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ velocità di convergenza a zero $\sim \frac{1}{k^2}$