Es. 4

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\cos x}\left(\dfrac{x^2y^2 - 2yx^4}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dalla definizione si vede che la funzione è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Verifichiamo la continuità in $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\cos x} \frac{x^2y^2 - 2yx^4}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g_1(x)\, g_2(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_1(x) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\cos x} = e$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2 - 2yx^4}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{infatti}$$

$$\left| \frac{x^2y^2 - 2yx^4}{x^2+y^2} \right| \leq y^2 + 2|y|x^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \cdot e = 0 \Rightarrow f \text{ è continua in } (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x\, e^{\cos x} \frac{x^2y^2 - 2yx^4}{x^2+y^2} + e^{\cos x}\left[\frac{2xy^2 - 8yx^3}{x^2+y^2} - \frac{x^2y^2 - 2yx^4}{(x^2+y^2)^2}\, 2x\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\cos x}\left[\frac{2yx^2 - 2x^4}{x^2+y^2} - \frac{x^2y^2 - 2yx^4}{(x^2+y^2)^2}\, 2y\right]$$

Le derivate sono definite e continue $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Calcoliamole in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left.\frac{d}{dx} f(x,0)\right|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left.\frac{d}{dy} f(0,y)\right|_{y=0} = 0$$

La funzione è derivabile $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$