Es. 4

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(e^{\sin 3x}-1\right)\dfrac{4y^2x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

La funzione è continua $\forall (x,y)\neq(0,0)$.

Verifichiamo la continuità in $(0,0)$. Studiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(e^{\sin 3x}-1\right)\frac{4y^2x}{x^2+y^2}$$

$$\left|\left(e^{\sin 3x}-1\right)\frac{4y^2x}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\left(e^{\sin 3x}-1\right)4x\right|\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

$\Rightarrow$ il limite è zero $\Rightarrow$ la funzione è continua in $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{\sin 3x}(3\cos 3x)\frac{4y^2x}{x^2+y^2}+\left(e^{\sin 3x}-1\right)\left[\frac{4y^2}{x^2+y^2}-\frac{4y^2x}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2x\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(e^{\sin 3x}-1\right)\left[\frac{8yx}{x^2+y^2}-\frac{4y^2x}{(x^2+y^2)^2}2y\right]$$

Le derivate parziali sono definite e continue in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$\Rightarrow f$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\left.\frac{d}{dx}f(x,0)\right|_{x=0}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\left.\frac{d}{dy}f(0,y)\right|_{y=0}=0$$

$\Rightarrow f$ è derivabile in $\mathbb{R}^2$.

Verifichiamo la differenziabilità in $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(e^{\sin 3x}-1\right)\frac{4y^2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$