1 $y'' + 3y' + y = e^{-t}\sin 3t$

Risolvo l'eq. $y''+3y'+y = e^{t(-1+i3)}$ e poi prendo la parte immaginaria della soluzione.

Omogenea associata $z''+3z'+z=0$

$$\lambda^2+3\lambda+1=0 \qquad \lambda = -\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2} = -\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$z(t) = c_1 e^{-\frac{3+\sqrt5}{2}t} + c_2 e^{-\frac{3-\sqrt5}{2}t}$$

Soluzione particolare $\tilde{y}(t) = \frac{1}{\gamma^2+3\gamma+1} e^{\gamma t}$ $\qquad \gamma = -1+3i$

$$\gamma^2+3\gamma+1 = (-1+3i)^2+3(-1+3i)+1 = 1-9-6i-3+9i+1 = -10+3i$$

$$\Rightarrow \tilde{y}(t) = \frac{1}{-10+3i} e^{-t}(\cos 3t + i\sin 3t) = \frac{-10-3i}{100+9} e^{-t}(\cos 3t + i\sin 3t)$$

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = \mathrm{Im}(\tilde{y}(t)) = \frac{-3\cos 3t - 10\sin 3t}{109} e^{-t}$$ soluzione particolare

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{3+\sqrt5}{2}t} + c_2 e^{-\frac{3-\sqrt5}{2}t} - \left(\frac{3}{109}\cos 3t + \frac{10}{109}\sin 3t\right)e^{-t}$$ INT. GENERALE

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 - \frac{3}{109} = 0 \\ y'(0) = -\frac{3+\sqrt5}{2}c_1 - \frac{3-\sqrt5}{2}c_2 + \frac{3}{109} + 3\cdot\frac{10}{109} = 1 \quad -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{3}{109} - c_2 \\ -\frac{3}{2}(c_1+c_2) - \frac{\sqrt5}{2}(c_1-c_2) = 1 - \frac{33}{109} \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2}\,\frac{3}{109} - \frac{\sqrt5}{2}\left(\frac{3}{109} - 2c_2\right) = 1 - \frac{33}{109} \Rightarrow c_2\sqrt5 = \frac{2(109)-66+9+3\sqrt5}{2\cdot 109}$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{161+3\sqrt5}{218\sqrt5} \qquad c_1 = \frac{\sqrt5\cdot 6 - 161 - 3\sqrt5}{218\sqrt5} = \frac{3\sqrt5-161}{218\sqrt5}$$

$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ — la soluzione tende a zero qualunque sia la condizione iniziale

Es. 2

$\vec{r}(t) = (t\cos t, t\,\mathrm{sen}\,t, t^2) \quad t \in [0, 2\pi]$

la curva è continua in quanto le sue componenti sono funzioni continue $\quad \vec{r}(0) = (0,0,0) \neq \vec{r}(2\pi) = (2\pi, 0, (2\pi)^2) \Rightarrow$ NON È CHIUSA

$\vec{r}\,'(t) = (\cos t - t\,\mathrm{sen}\,t, \ \mathrm{sen}\,t + t\cos t, 2t)$ continua

$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(\cos t - t\,\mathrm{sen}\,t)^2 + (\mathrm{sen}\,t + t\cos t)^2 + 4t^2} = \sqrt{1 + t^2 + 4t^2} = \sqrt{1+5t^2}$

$|\vec{r}\,'(t)| \neq 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \vec{r}\,'(t)$ continua e non si annulla mai $\Rightarrow \vec{r}(t)$ è regolare $\forall t \in [0, 2\pi]$

$\hat{T}(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = (\cos t - t\,\mathrm{sen}\,t, \mathrm{sen}\,t + t\cos t, 2t) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+5t^2}}$

VERSORE TANGENTE

Es. 3 $\quad y = \sin x \qquad \begin{cases} x = t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 1 \\ y' = \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$

$I = \int_\gamma y\,ds = \int_0^{\pi} \mathrm{sen}\,t \sqrt{1+\cos^2 t}\,dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+u^2}\,du =$

$ds = |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \sqrt{1+\cos^2 t}\,dt \qquad u = \cos t \quad du = -\mathrm{sen}\,t\,dt$

$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 x}\,\mathrm{ch}\,x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (\mathrm{ch}\,x)^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}\,dx$

$u = \mathrm{sh}\,x \quad du = \mathrm{ch}\,x\,dx \qquad x_1 : \mathrm{sh}\,x_1 = -1 \quad x_2 : \mathrm{sh}\,x_2 = 1$

$I = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{2}e^{2x} - \dfrac{1}{2}e^{-2x} + 2x\right]_{x_1}^{x_2} = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{(e^{+x}+e^{-x})(e^{x}-e^{-x})}{2} + 2x\right]_{x_1}^{x_2}$

$I = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{senh}\,x\,\cosh x\Big|_{x_1}^{x_2} + \dfrac{1}{2}(x_2 - x_1) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} - (-\sqrt{2})\right) + \dfrac{1}{2}\left(\lg(1+\sqrt{2}) - \lg(-1+\sqrt{2})\right)$

$\mathrm{ch}\,x_{1,2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad \mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x = e^x \Rightarrow x = \lg(\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x) \qquad x_1 = \lg(-1+\sqrt{2}) \quad x_2 = \lg(1+\sqrt{2})$

$\Rightarrow \quad I = \sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\lg\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right)$

3

Es. 4) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + n \operatorname{tg} n + n}{n^4+3} (x-3)^{n}$

$a_n = \frac{n^2 + n \operatorname{tg} n + n}{n^4+3} (-1)^n$

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2 + (n+1)\operatorname{tg}(n+1) + n+1}{(n+1)^4+3} \cdot \frac{n^4-3}{n^2+n\operatorname{tg} n+n} \sim \frac{n^4 (n+1)^2}{n^2 (n+1)^4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\Rightarrow R = 1$

La serie converge assolutamente $\forall x \in (2,4)$

$x = 2$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n \operatorname{tg} n + n}{n^4+3} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

$x = 4$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n \operatorname{tg} n + n}{n^4+3} (-1)^n$ $\quad \frac{n^2 + n \operatorname{tg} n + n}{n^4+3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow$ la serie converge assolutamente

$\Rightarrow$ La serie converge assolutamente e puntualmente $\forall x \in [2,4]$.

La serie converge totalmente in $[2,4]$.

5). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\lg n}{\sqrt{n}+2n} \cos(nx) \quad x \in [0,2\pi]$

$$a_n = \frac{1+\lg n}{2n+\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\lg n}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e decrescente definitivamente $\Rightarrow$ il teorema sulla convergenza delle serie permette di affermare che la serie converge $\forall x \in (0,2\pi)$

$x = 0, 2\pi \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\lg n}{\sqrt{n}+2n}$

$$\frac{1+\lg n}{\sqrt{n}+2n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\lg n}{2n} \geq \frac{1}{2n} \Rightarrow \text{la serie } \sum_n \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

$\Rightarrow$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\lg n}{2n+\sqrt{n}}$ diverge

$\Rightarrow$ la serie converge per $x \in (0,2\pi)$

Dato che $\displaystyle\sup_{x\in(0,2\pi)} \frac{1+\lg n}{\sqrt{n}+2n} |\cos nx| = \frac{1+\lg n}{\sqrt{n}+2n}$

e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\lg n}{\sqrt{n}+2n}$ diverge la serie non converge

totalmente in $(0,\pi)$ $\Rightarrow$ non posso affermare a priori che

la somma della serie è continua.

La serie delle derivate prime è $\displaystyle -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+\lg n)}{2n+\sqrt{n}} \sin(nx)$

questa serie non converge (non verifica la CN)

la serie non è derivabile termine a termine.

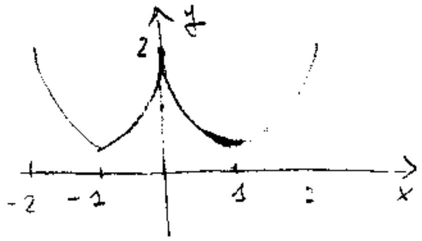
Se considero $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\lg n}{\sqrt{n}+n}\right)^2$ questa converge perché

se scelgo $\alpha \in (0,1)$

$$a_n^2 = \left(\frac{1+\lg n}{\sqrt{n}+n}\right)^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\lg^2 n}{n^2} = \frac{1}{n^{1+\alpha}} \frac{\lg^2 n}{n^{1-\alpha}} \underset{\text{definitivamente}}{\leq} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \qquad \sum \frac{1}{n^{1+\alpha}} \text{ converge}, \ \alpha>0$$

$\Rightarrow$ può essere la serie di Fourier di una funzione limitata.

Es. 6) $f(x) = e^{-x}+1 \quad x \in [0,1] \quad T=2$ pari



pari $\Rightarrow b_k = 0 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega_0 x)dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega_0 x)dx$$

$$= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega_0 x)dx = 2\int_0^1 (e^{-x}+1)\cos(k\pi x)dx =$$

$$= 2\int_0^1 \cos(k\pi x)dx + 2\int_0^1 e^{-x}\cos(k\pi x)dx = \underbrace{\frac{2}{k\pi}\operatorname{sen}(k\pi x)\Big|_0^1}_{0} +$$

$$+ 2\int_0^1 e^{-x}\left(\frac{e^{ik\pi x}+e^{-ik\pi x}}{2}\right)dx = \frac{1}{-1+ik\pi}e^{(-1+ik\pi)x}\Big|_0^1 - \frac{1}{1+ik\pi}e^{-(1+ik\pi)x}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{e^{-1}e^{ik\pi}-1}{1-ik\pi} - \frac{e^{-1}e^{-ik\pi}-1}{1+ik\pi} = +\left(1-e^{-1}(-1)^k\right)\left[\frac{1}{1-ik\pi}+\frac{1}{1+ik\pi}\right]$$

$$= 2\,\frac{1-(-1)^k e^{-1}}{1+(k\pi)^2} \qquad \hat{f}(x) \sim 2-e^{-1}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k e^{-1}}{1+(k\pi)^2}\cos(k\pi x)$$

$$a_0 = 2\int_0^1 (e^{-x}+1)dx = 2\left(1 - e^{-x}\Big|_0^1\right) = 2(1+1-e^{-1})$$

$$\int_0^T f^2(x)dx = 2\int_0^1 (e^{-x}+1)^2 dx = 2\int_0^1 (e^{-2x}+2e^{-x}+1)dx =$$

$$= 2\left[1+2(1-e^{-1})+\frac{1}{2}(1-e^{-2})\right] < +\infty$$ $\Rightarrow$ posso usare il teorema sulla convergenza in media quadratica $\Rightarrow$ la serie converge in media quadratica

$f(x)$ è regolare a tratti e continua $f(-1)=f(1)$
$\Rightarrow$ la serie di Fourier converge $\forall x \in [-1,1]$ a $f(x)$

$f(x)$ non è derivabile in $x=0 \Rightarrow$ non posso applicare il teorema sulla [illegible] derivabilità nell'intervallo $[-1,1]$.

$$|a_k| \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{\pi^2 k^2}$$

Identità Parseval $\quad \int_0^T f^2(x)dx = \frac{T}{2}\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\right]$

$$2(3-2/e)+(1-e^{-2}) = \frac{[2(2-e^{-1})]^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^k e^{-1}}{1+k^2\pi^2}\right)^2$$