Es. 5

$$\vec{F} = \left(2\alpha x z + 2\frac{yz}{x}\right)\hat{i} + \left(2z \lg x - 2\alpha^2 y \lg z\right)\hat{j} + \left(x^{2\alpha} + 2y \lg x - \frac{y^2}{z}\right)\hat{k}$$

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x>0 \quad z>0\}$ dominio del campo

Dato che D è semplicemente connesso devo verificare che $\nabla \times \vec{F} = 0$ per dire che è conservativo.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$\cancel{\partial_y F_3 - \partial_z F_2 = 2\alpha x^{2\alpha-1} + 2\frac{y}{x}} -$

$$\partial_y F_3 - \partial_z F_2 = 2 \lg x - \frac{2y}{z} - \left(2 \lg x - 2\alpha^2 \frac{y}{z}\right) = 0 \iff \alpha^2 = 1$$

$$\partial_z F_1 - \partial_x F_3 = 2\alpha x + \frac{2y}{x} - \left(2\alpha x^{2\alpha-1} + \frac{2y}{x}\right) = 0 \iff 2\alpha - 1 = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = 1$$

$$\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = \frac{2z}{x} - \frac{2z}{x} = 0$$

Il campo è conservativo solo se $\alpha = 1$

Poniamo $\alpha = 1$ e calcoliamo il potenziale

$$\vec{F} = \nabla U \quad \Rightarrow \quad \partial_x U = 2xz + 2\frac{yz}{x}$$

$$\Rightarrow U(x,y,z) = x^2 z + 2yz \lg x + c_1(y,z) = x^2 z + 2yz \lg x - y^2 \lg z + c_2(z)$$

$$\partial_y U = 2z \lg x + \partial_y c_1(y,z) = 2z \lg x - 2y \lg z$$

$$\Rightarrow \partial_y c_1(y,z) = -2y \lg z \quad \Rightarrow \quad c_1(y,z) = -y^2 \lg z + c_2(z)$$

$$\partial_z U = x^2 + 2y \lg x - y^2/z + c_2'(z) = x^2 + 2y \lg x - y^2/z$$

$$\Rightarrow c_2'(z) = 0 \qquad c_2(z) = c$$

$$U(x,y,z) = x^2 z + 2yz \lg x - y^2 \lg z + c$$