ANALISI MATEMATICA 2
ESAME 13 6 2016 2 PARTE
SCHEMA SOLUZIONE

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+3y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$D=\mathbb{R}^2$ continua $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Per la continuità studiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^3+3y^4}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$$ ⇒ la funzione è continua in $(0,0)$ ⇒ in tutto $\mathbb{R}^2$

infatti

$$\left|\frac{2x^3+3y^4}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{2x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{3y^4}{x^2+y^2}\right|\le 2|x|+3|y^2|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

Dalla definizione di derivata direzionale

$D_v f(0,0)=g'(0)$ $\quad \hat{v}=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$

$$g(t)=f(x_0+t\cos\theta,\,y_0+t\operatorname{sen}\theta)=\frac{2t^3\cos^3\theta+3t^4\operatorname{sen}^4\theta}{t^2}$$

$$g(t)=2t\cos^3\theta+3t^2\operatorname{sen}^4\theta$$

$$g'(t)=2\cos^3\theta+6t\operatorname{sen}^4\theta \Rightarrow D_v f(0,0)=2\cos^3\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{6x^2}{x^2+y^2}-2x\,\frac{x^3+3y^4}{x^2+y^2}$$ derivabile con continuità $\forall x\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{12y^3}{x^2+y^2}-2y\,\frac{2x^3+3y^4}{x^2+y^2}$$ ⇒ è differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0}=\frac{d}{dx}(2x)\Big|_{x=0}=2$$ ⇒ la funzione è derivabile $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{d}{dy}f(0,y)\Big|_{y=0}=\frac{d}{dy}(3y^2)\Big|_{y=0}=0$$

$$\nabla f(0,0)=(2,0)\Rightarrow \nabla f(0,0)\cdot\hat{v}=(2,0)\cdot(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)=2\cos\theta$$

⇒ $g'(0)\neq\nabla f(0,0)\cdot\hat{v}$ ⇒ non è verificata la formula del gradiente ⇒ f non è differenziabile in $(0,0)$

⇒ $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$ $\quad f\in C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$ $\quad f$ derivabile in $\mathbb{R}^2$

f differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$