Es. 3 ③

$$f(x,y) = e^{-2(x^2+y^2)}$$ con il vincolo $g(x,y) = (x-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0$

$\nabla g(x,y) = \big(2(x-1),\ 8y\big)$ si annulla solo in $(1,0)$ che non soddisfa il vincolo

La lagrangiana è

$$\mathcal{L} = e^{-2(x^2+y^2)} - \lambda\big((x-1)^2 + 4y^2 - 4\big)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -4x\, e^{-2(x^2+y^2)} - 2\lambda(x-1) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -4y\, e^{-2(x^2+y^2)} - 8y\lambda = -4y\left(e^{-2(x^2+y^2)} + 2\lambda\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (x-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda

$\rightarrow y = 0 \qquad (x-1)^2 - 4 = 0 \qquad x-1 = \pm 2 \qquad x = 3 \quad x = -1$

$x = 3 \qquad -4 \cdot 3\, e^{-2\cdot 9} - 2\lambda \cdot 2 = 0 \qquad \lambda = -3e^{-18} \qquad P_1(3, 0, 3e^{-18})$

$x = -1 \qquad 4\, e^{-2} - 2\lambda(-2) = 0 \qquad \lambda = -e^{-2} \qquad P_2(-1, 0, -e^{-2})$

$\rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} e^{-2(x^2+y^2)} \qquad \Rightarrow +4x \cdot 2\lambda - 2\lambda(x-1) = 0$

$[+4x - (x-1)]\, e^{-2(x^2+y^2)} = 0 \quad \Rightarrow x = -1/3$

$\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4y^2 - 4 = 0 \qquad y^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

$x^2 + y^2 = \frac{1}{9} + \frac{5}{9} = \frac{6}{9} = 2/3$

$P_3\left(-1/3, -\sqrt{\frac{5}{9}}, -\frac{e^{-4/3}}{2}\right) \qquad P_4\left(-1/3, \sqrt{5/9}, -\frac{e^{-4/3}}{2}\right)$

Essendo f continua sul vincolo che è un insieme chiuso e limitato per il teorema di Weierstrass si può concludere che P_1 è punto di minimo assoluto
P_3 e P_4 sono pti di max assoluto