Es. 5

$$\vec{F} = \frac{6xy}{x^2+y^2}\,\hat{\imath} + \left[\frac{6y^2}{x^2+y^2} + 3\lg(x^2+y^2)\right]\hat{\jmath}$$

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\nabla \times \vec{F} = (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\,\hat{k}$$

$$\partial_x F_2 = -\frac{12xy^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{6x}{x^2+y^2}$$

$$\partial_y F_1 = \frac{6x}{x^2+y^2} - \frac{12xy^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \partial_x F_2 = \partial_y F_1 \Rightarrow \nabla \times \vec{F} = 0$$

$\Rightarrow$ Il campo è irrotazionale

Il Dominio non è semplicemente connesso.

Vediamo se esiste un potenziale locale U

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \iff \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{6xy}{x^2+y^2}$$

$$U(x,y) = \int dx\,\frac{6xy}{x^2+y^2} = 3y\lg(x^2+y^2) + c_1(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 3\lg(x^2+y^2) + \frac{6y^2}{x^2+y^2} + c_1'(y) = F_2$$

$\iff c_1'(y) = 0 \iff c_1$ non dipende da y

$$\Rightarrow U(x,y) = 3y\lg(x^2+y^2) + c$$

Potenziale di $\vec{F}$ definito in D.