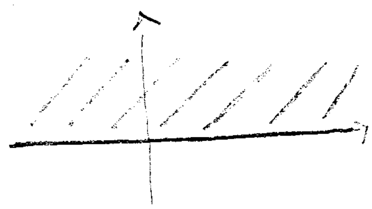
2° PARZIALE ESAME 28. 6 2016 ①

SCHEMA SOLUZIONE



Es. 1) $f(x,y) = \dfrac{x\sqrt{y}}{1+x^2+y^2}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ chiuso, illimitato, connesso

La funzione è continua in D

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\sqrt{y}}{1+x^2+y^2} - \dfrac{2x^2\sqrt{y}}{(1+x^2+y^2)^2}$ definita e continua $\forall (x,y) \in D$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{y}}\dfrac{x}{1+x^2+y^2} - \dfrac{2xy^{3/2}}{1+x^2+y^2}$ definita e continua $\forall (x,y) \in D \setminus \{y=0\}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ non è definita se $x_0 \neq 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \dfrac{d}{dy} f(0,y)\Big|_{y=0} = \dfrac{d}{dy}(0)\Big|_{y=0} = 0$

La funzione è derivabile ed ha derivate parziali continue se $(x,y) \in \bar{D} = D \setminus \{y=0\}$ $\Rightarrow$ è differenziabile in $\bar{D}$

La funzione è derivabile in $\bar{D} \cup \{(0,0)\}$

Studiamo la differenziabilità in $(0,0)$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad f(0,0)=0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sqrt{y}}{1+x^2+y^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ infatti

$\left|\dfrac{x\sqrt{y}}{1+x^2+y^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \dfrac{|x|\sqrt{y}}{(1+x^2+y^2)|x|} \leq \dfrac{\sqrt{y}}{1+x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

$\Rightarrow$ la funzione è differenziabile in $(0,0)$ $\Rightarrow$ è differenziabile in $\bar{D} \cup \{(0,0)\}$

Dato che la funzione è differenziabile in $(0,0)$ $\Rightarrow$ è valida la formula del gradiente $\rightarrow D_{\vec{v}} f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{v} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \quad \theta \in [0,\pi]$

Es. 2) $f(x,y) = x^2 y (x-y+1)$ $\qquad D = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy(x-y+1) + x^2 y = xy(2x-2y+2+x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2(x-y+1) - x^2 y = x^2(x-y+1-y)$$

$$\begin{cases} xy(3x-2y+2) = 0 \\ x^2(x-2y+1) = 0 \end{cases}$$

$x = 0 \Rightarrow (0, y_0)$ pti critici

$y = 0 \quad x = -1 \Rightarrow (-1, 0)$ pto critico

$3x-2y+2 = 0 \quad 2y = 3x+2 \quad y = \frac{3}{2}x+1$

$y = \frac{3}{2}x + 1 \Rightarrow x^2\left(x - 2\left(\frac{3}{2}x+1\right)+1\right) = 0 \qquad x=0 \quad y=1 \quad (0,1)$ pto critico

$-2x-2+1 = 0 \qquad 2x = -1 \qquad x = -\frac{1}{2} \qquad y = -\frac{3}{4}+1 = \frac{1}{4}$

$(0,y_0) \quad (-1,0) \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ PTI CRITICI

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(3x-2y+2) + 3xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x(3x-2y+1) - 2xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^2$$

$$H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(-1,0) = -4 < 0 \Rightarrow$ pto di sella

$$H_f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & +\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\det H_f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} - \frac{1}{16} > 0$

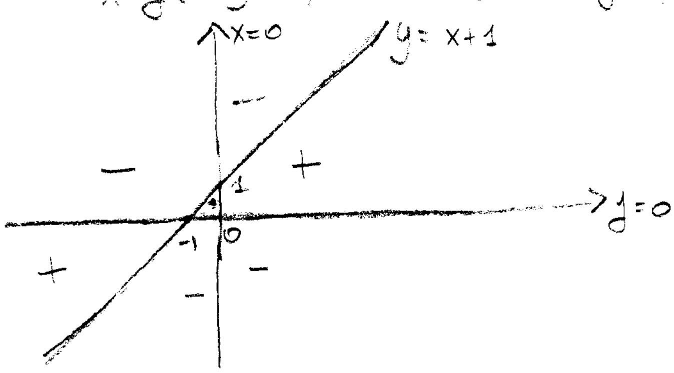
$-3/8 < 0 \Rightarrow$ pto di max

$$H_f(0,y_0) = \begin{pmatrix} -2y_0^2+2y_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(0,y_0) = 0$ non posso dire niente

$f(0,y_0) = 0$ studio l'incremento $\Delta f = f(x,y) - f(0,y_0) = f(x,y) \geq 0$

$x^2 y(x-y+1) \geq 0 \iff y(x-y+1) \geq 0 \qquad x \neq 0$



$y = 0$
$y = x+1$

la funzione si annulla

$(0,y_0)$ è $\begin{cases} \text{pto di minimo se } 0<y_0<1 \\ \text{pto di sella se } y_0=0 \text{ o } y_0=1 \\ \text{pto di max se } y_0>1 \text{ e } y_0<0 \end{cases}$

Es. 3) $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad x^2+y^2=1$ $\quad \nabla g = \nabla(x^2+y^2) = (2x, 2y)$

non si annulla su vincolo $\Rightarrow$ il vincolo non ha pti critici

$$\mathcal{L} = x^2 - y^2 - \lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - 2x\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y - 2y\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x^2+y^2-1) = 0$$

$$\begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(1+\lambda) = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$x=0 \quad y=\pm 1 \quad \lambda=-1 \quad (0,-1)\ (0,1)$

$y=0 \quad x=\pm 1 \quad \lambda=1 \quad (-1,0)\ (1,0)$

$(0,-1)\ (0,1)\ (-1,0)\ (1,0)$ sono pti critici

$f(0,-1) = f(0,1) = -1$

$f(1,0) = f(-1,0) = 1$

$x^2+y^2=1$ è un insieme chiuso e limitato e f è continua sul vincolo $\Rightarrow$ teorema di Weierstrass $\Rightarrow$

$f(0,\pm 1) = -1 \quad (0,\pm 1)$ pti di minimo

$f(\pm 1, 0) = 1 \quad (\pm 1, 0)$ pti di max

Es. 4)

$$\iint_D \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \lg(x^2+y^2)^2\right) dx\,dy$$

$D = \{(x,y)\in R : x^2+y^2 = 4\}$ coordinate polari $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi]$ $\rho\in[0,2]$

$$\int_0^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\rho}+\lg\rho^4\right)\rho\,d\rho\,d\theta =$$

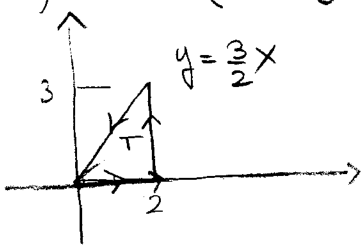
$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} 1\,d\rho\,d\theta + \int_0^2\int_0^{2\pi} 4\rho\lg\rho\,d\rho\,d\theta =$$

dato che $\lim_{\rho\to0}\rho^2\lg\rho = 0$

$$= 2\pi\cdot 2 + 2\pi\cdot 4\left(\frac12\rho^2\lg\rho\Big|_0^2 - \frac12\int_0^2 \rho^2\frac1\rho\, d\rho\right) =$$

$$= 4\pi + 8\pi\left[\frac12\cdot 4\lg 2 - \frac12\cdot\frac12\cdot 4\right] = 4\pi+8\pi[2\lg2 - 1] = 4\pi[4\lg2-1]$$

Es. 6) $\vec F = (x^2+3xy^2,\ x^3+2xy^2) = (P(x,y),\ Q(x,y))$



Utilizzando il teorema di Gauss-Green

$$L = \int_\gamma \vec F\cdot d\vec r = \iint_T (Q_x - P_y)\,dx\,dy \qquad Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad P_y = \frac{\partial P}{\partial y}$$

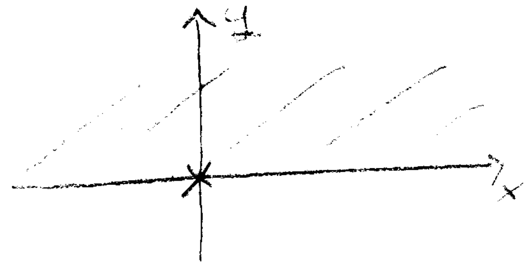
$$\Rightarrow L = \iint_T \left(3x^2+2y^2-(6xy)\right)dx\,dy = \int_0^2\left(\int_0^{\frac32 x}(3x^2+2y^2-6xy)\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^2 \left(3x^2y + \frac23 y^3 - 3xy^2\right)\Big|_0^{\frac32x} dx = \int_0^2\left(3x^2\frac32x + \frac23\left(\frac32\right)^3x^3 - 3x\left(\frac32\right)^2x^2\right)dx$$

$$= \left[\frac92 + \left(\frac32\right)^2 - 3\left(\frac32\right)^2\right]\int_0^2 x^3\, dx = \frac{18+9-27}{4}\cdot\frac14\, 16 = 0$$

Es. 5) $\vec{F} = \frac{2x}{x^2+y^2}\,\hat{\imath} + \left(\frac{2y}{x^2+y^2} - \sqrt{y}\right)\hat{\jmath}$ $\quad \begin{cases} y \geq 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \text{ e } (x,y) \neq (0,0)\}$



$\nabla \times \vec{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$

D è semplicemente connesso $\Rightarrow$ dato che $\vec{F}$ è irrotazionale

$\vec{F}$ è conservativo in D $\Rightarrow \exists\, U(x,y) : \vec{F} = \nabla U$

Calcoliamo U

$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \Rightarrow U(x,y) = \lg(x^2+y^2) + g(y)$

$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - \sqrt{y} \Rightarrow g'(y) = -\sqrt{y}$

$g(y) = -\frac{2}{3} y^{3/2} + c$

$\Rightarrow U(x,y) = \lg(x^2+y^2) - \frac{2}{3} y^{3/2} + c$

Una qualunque curva semplice chiusa contenente l'origine non è contenuta in D $\Rightarrow$ non posso calcolare il lavoro di $\vec{F}$ fuori da D.

Il lavoro di $\vec{F}$ su una qualunque curva chiusa contenuta in D è nullo