ANALISI MATEMATICA 2 (9CFU)
1 PARTE 12.7.2016

Cognome....................
Nome...................
n.matricola ....

Esercizio 1 Data l'equazione differenziale

$$y'' - y' - 2y = t^2 + 1$$

a determinare una soluzione particolare e l'integrale generale;
b risolvere il problema di Cauchy con le condizioni $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;
c stabilire se per tempi lunghi ($t \to \infty$) il sistema perde memoria della condizione inziale.

Esercizio 2 Data la seguente curva nello spazio

$$\vec{r}(t) = \left(te^{-t}, (t-1)^2 e^{-t}, te^{-t}\right), \quad t \in [0,1]$$

a stabilire se la curva è continua chiusa;
b calcolare il vettore derivato ed il suo modulo;
c stabilire se è regolare e nel caso determinare i punti di non regolarità.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale di linea

$$\int_\gamma y\, ds$$

dove γ è l'arco di curva piana di equazione polare

$$\rho = 3e^{\theta}, \quad \theta \in [0, 4\pi]$$

.

Esercizio 4 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n + \log n}{3^n + 1} (x-1)^n$$

a determinare il raggio di convergenza e studiare il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza;
b determinare gli intervalli di convergenza puntuale, assoluta e totale.

Esercizio 5 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \log n}{\sqrt{1 + 2n \log^2 n}} \cos(nx) \quad x \in [0, 2\pi]$$

a studiarne la convergenza puntuale;
b dire se è possibile affermare a priori che la somma della serie è continua e se la serie è derivabile termine a termine.
c dire se può essere la serie di Fourier di una funzione limitata.

Esercizio 6 Data la funzione 4-periodica definita per $x \in [-2, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{per} \quad |x| \in [0,1] \\ 1 & \text{per} \quad |x| \in [1,2] \end{cases}$$

a calcolare i coefficienti di Fourier di f, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, e scrivere la serie di Fourier associata;
b studiare la convergenza in media quadratica e scrivere l'identità di Parseval;
c studiare la convergenza puntuale della serie di Fourier;
d studiare la derivabilità termine a termine della serie di Fourier e la velocità di convergenza a zero dei coefficienti.