

ANALISI MATEMATICA 2 (9 CFU)

2 Parte 13.6.2016

Cognome.....

Nome.....

n.matricola

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3+3y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a determinare in quali punti del piano è continua e derivabile;

b calcolare, mediante la definizione, la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ per il generico versore $(\cos \theta, \sin \theta)$ e dire se è verificata la formula del gradiente;

c determinare in quali punti del piano è differenziabile;

Esercizio 2 Determinare eventuali punti di estremo libero per la funzione

$$f(x, y) = (x - 1)^2(4y^2 - x^2)$$

e determinarne la natura.

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x, y) = ye^{-x}$$

soggetta al vincolo $x^2 + 4y^2 = 4$. Verificare che il vincolo non abbia punti critici e determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione.

Esercizio 4 Calcolare l'integrale doppio (generalizzato)

$$\int \int_D \log \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

dove D è il cerchio di raggio 3 centrato nell'origine.

Esercizio 5 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \left(\frac{2x}{(x^2 + y^2)} - \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{2y}{(x^2 + y^2)} - \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \mathbf{j}$$

a stabilire il suo insieme di definizione;

b verificare se il campo è conservativo e nel caso calcolarne un potenziale;

c calcolare il lavoro di \mathbf{F} lungo una qualunque curva, semplice, chiusa contenente l'origine.

Esercizio 6 Calcolare l'area della regione racchiusa dalla chiocciola di Pascal descritta in forma polare da $\rho = 1 + \cos \theta$ per $\theta \in [0, 2\pi]$.

a utilizzando la formula di Gauss Green sul piano;

b utilizzando la formula dell'area con l'integrale doppio.

Suggerimento: L'area di una regione regolare Ω del piano è $|\Omega| = \int_{\Omega} 1 dx dy$