

## ANALISI MATEMATICA 2 (9 CFU)

2 Parte 15.7.2015

Cognome.....

Nome.....

n.matricola .....

**Esercizio 1** Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{y-1} & \text{se } y \neq 1 \\ 0 & \text{se } y = 1 \end{cases}$$

**a** scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di  $f$  in  $(2, 3)$ ;

**b** calcolare, mediante la definizione, la derivata direzionale  $D_{\mathbf{v}}f(1, 1)$  per il generico versore  $(\cos \theta, \sin \theta)$ ;

**c** provare a calcolare  $D_{\mathbf{v}}f(1, 1)$  usando la formula del gradiente e dire se  $f$  è differenziabile in  $(1, 1)$ .

**Esercizio 2** Determinare eventuali punti di estremo libero per la funzione

$$f(x, y) = (x + 3)^2(y^2 - x^2)$$

e determinarne la natura.

**Esercizio 3\*** Data la funzione

$$f(x, y) = e^{-2x^2-2y^2}$$

soggetta al vincolo  $(x - 1)^2 + 4y^2 = 4$ . Verificare che il vincolo non abbia punti critici e determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione.

**Esercizio 4** Nel piano  $xy$  si consideri la lamina omogenea  $\Omega$  avente la forma della corona circolare espressa in coordinate polari da  $1 \leq \rho \leq 2$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ . Calcolare le coordinate del baricentro della lamina.

**Esercizio 5\*** Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \frac{3y^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2)} \mathbf{i} - \frac{6xy}{(x^2 + y^2)} \mathbf{j}$$

**a** stabilire il suo insieme di definizione;

**b** verificare se il campo è conservativo e nel caso calcolarne un potenziale;

**c** calcolare il lavoro di  $\mathbf{F}$  lungo la curva  $\gamma: \mathbf{r}(t) = (3t^2 + 2, 3 - 2t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

**Esercizio 6\*** Calcolare

$$\oint_{\gamma} (x^3 - x^2y^2)dx + (y^2x - 2xy)dy$$

dove  $\gamma$  è il perimetro del quadrato  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  utilizzando la formula di Gauss-Green.

\* Gli studenti immatricolati nell'anno 2013/2014 che hanno comunicato di voler sostenere l'esame secondo il programma dell'anno scorso devono svolgere al posto degli esercizi 3,5,6 gli esercizi qui sotto.

**Esercizio 3 anno 2013/2014** Sia  $T$  il triangolo, nel piano  $xy$ , di vertici  $(0, -2)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(0, 3)$ . Calcolare

$$\int \int_T 3|xy| dx dy$$

**Esercizio 5 anno 2013/2014** Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (9 - y^2)x^2$$

**a** determinare tutte le soluzioni dell'equazione;

**b** risolvere il problema di Cauchy con la condizione iniziale  $y(0) = 1$ ;

**c** precisare il più ampio intervallo su cui è definita la soluzione di Cauchy.

**Esercizio 6 anno 2013/2014** Data l'equazione differenziale

$$4y'' + 4y' + y = e^{2x}$$

**a** scrivere l'integrale generale dell'equazione;

**b** risolvere il problema di Cauchy con le condizioni  $y(0) = y'(0) = 1$