

## ANALISI MATEMATICA 2 (9 CFU)

2 Parte 24.6.2015

Cognome.....  
Nome.....  
n.matricola .....

**Esercizio 1** Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y-1} & \text{se } y \neq 1 \\ 0 & \text{se } y = 1 \end{cases}$$

**a** scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di  $f$  in  $(1, 2)$ ;

**b** calcolare, mediante la definizione, la derivata direzionale  $D_{\mathbf{v}}f(0, 1)$  per il generico versore  $(\cos \theta, \sin \theta)$ ;

**c** provare a calcolare  $D_{\mathbf{v}}f(0, 1)$  usando la formula del gradiente e dire se  $f$  è differenziabile in  $(0, 1)$ .

**Esercizio 2** Determinare eventuali punti di estremo libero per la funzione

$$f(x, y) = (x - 2)^2(x^2 - 9y^2)$$

e determinarne la natura.

**Esercizio 3\*** Determinare i punti di massimo e minimo assoluti per la funzione

$$f(x, y) = 2yx^3$$

sotto la condizione  $y^2 + 4x^2 - 1 = 0$  applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

**Esercizio 4** Nel piano  $xy$  si consideri la lamina omogenea  $\Omega$  avente la forma del settore circolare espresso in coordinate polari da  $\rho \leq 3$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ . Calcolare le coordinate del baricentro della lamina.

**Esercizio 5\*** Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \frac{x}{(3 + x^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{y}{(3 + x^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{j}$$

**a** verificare se il campo è conservativo nel suo insieme di definizione;

**b** se è conservativo calcolarne un potenziale;

**c** calcolare il lavoro di  $\mathbf{F}$  lungo la curva  $\gamma: \mathbf{r}(t) = (3t^3, 1 - 2t^3)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

**Esercizio 6\*** Calcolare l'area della regione racchiusa dall'ellisse  $r(\theta) = (3 \cos \theta, 4 \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  utilizzando la formula di Gauss-Green.

\* Gli studenti immatricolati nell'anno 2013/2014 che hanno comunicato di voler sostenere l'esame secondo il programma dell'anno scorso devono svolgere al posto degli esercizi 3,5,6 gli esercizi qui sotto.

**Esercizio 3 Anno 2013/2014** Sia  $T$  il triangolo, nel piano  $xy$ , di vertici  $(0, -1)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$ . Calcolare

$$\int \int_T 3|y|xdxdy$$

**Esercizio 5 Anno 2013/2014** Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (4 + y^2)x^2$$

**a** determinare tutte le soluzioni dell'equazione;

**b** risolvere il problema di Cauchy con la condizione iniziale  $y(0) = 2$ ;

**c** precisare il più ampio intervallo su cui è definita la soluzione di Cauchy.

**Esercizio 6 Anno 2013/2014** Data l'equazione differenziale

$$4y'' + 4y' + y = e^3x$$

**a** scrivere l'integrale generale dell'equazione;

**b** risolvere il problema di Cauchy con le condizioni  $y(0) = y'(0) = 1$