② $y'' + 3y' = -2 + 2\sin 3x$ Costruiamo le soluzioni particolari di

$y'' + 3y' = 2$ e di $y'' + 3y' = 2\,\text{sen}\,3x$

$\downarrow$ $\bar{y}_1$ $\qquad$ $\downarrow$ $\text{Im}\,\bar{y}_2$

$y(x) = ax^2 + b\cancel{x} + c$

$y'(x) = 2ax + b$

$y''(x) = 2a$

$2a + 3(2ax + b) = -2$

$2a + 3b = -2 \qquad a = 0 \quad b = -\frac{2}{3}$

$6a = 0$

$\bar{y}_1(x) = -\frac{2}{3}x$

$\lambda^2 + 3\lambda = 0 \qquad \lambda = 0 \quad \lambda = -3$

$\bar{y}_2(x) = A e^{3ix}$

$\bar{y}_2' = A e^{3ix}(3i)$

$\bar{y}_2'' = -9A e^{3ix}$

$(-9 + 9i) A e^{3ix} = 2 e^{3ix}$

$A = -\frac{2}{9(1-i)} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}_2(x) = -\frac{2}{9(1-i)} e^{3ix}$

$= -\frac{2}{9}\left[\frac{1}{1+1}(1+i)(\cos 3x + i\,\text{sen}\,3x)\right]$

Devo prendere la parte immaginaria

$\text{Im}\,\bar{y}_2(x) = -\frac{2}{9}\left(\frac{\cos 3x + \text{sen}\,3x}{2}\right) = -\frac{\cos 3x + \text{sen}\,3x}{9}$

Soluzione particolare è

$\bar{y}(x) = \frac{2}{3}x - \frac{\cos 3x + \text{sen}\,3x}{9}$

Soluzione generale è $y(x) = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{2}{3}x - \frac{\cos 3x + \text{sen}\,3x}{9}$

$y'(x) = -3c_2 e^{-3x} + \frac{2}{3} - \frac{-\text{sen}\,3x + \cos 3x}{3}$

$y(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{9} = 0 \qquad c_1 = 0 \qquad y(x) = \frac{1}{9}e^{-3x} + \frac{2}{3}x - \frac{\cos 3x + \text{sen}\,3x}{9}$

$y'(0) = -3c_2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0 \qquad c_2 = \frac{1}{9}$