(3) $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} e^{-3m(x-1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(e^{-3(x-1)}\right)^m$

la condizione necessaria è verificata se

$$e^{-3(x-1)} < 1 \iff -3(x-1) < 0 \quad x > 1$$

Se $x > 1$ la serie converge puntualmente a $S(x)$

$$S(x) = \frac{1}{1 - e^{-3(x-1)}}$$

La serie converge totalmente in ogni ~~x~~ $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq r+1, \ r > 0\}$

infatti se $x \in [r+1, \infty)$ $r > 0$

$$e^{-3(x-1)} \leq e^{-3r} \Rightarrow e^{-3m(x-1)} \leq \left(e^{-3r}\right)^m$$

e $\sum_m \left(e^{-3r}\right)^m < +\infty$ perché $e^{-3r} < 1$ dato che $r > 0$

~~Per~~ $x \in [r+1, \infty)$ $\left(e^{-3(x-1)}\right)^m$ è continua e la serie

$\sum_m \left(e^{-3(x-1)}\right)^m$ converge totalmente $\Rightarrow S(x)$ è continua.

(Si vedeva comunque dalla sua forma esplicita!)

$$f'_m(x) = e^{-3m(x-1)}(-3m) = \left(e^{-3(x-1)}\right)^m(-3m)$$

in $[r+1, \infty)$ $|f'_m(x)| \leq e^{-rm}\,3m$

$\sum_m e^{-rm}\,3m$ converge perché $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \lim \frac{e^{-r(m+1)}\,3(m+1)}{e^{-rm}\,3m} = e^{-r} < 1$

dunque la serie delle derivate converge totalmente $x \in [r+1, \infty)$

$\sum_m f_m(x) < +\infty$ $\quad x \in [r+1, \infty)$

$\sum_m f'_m(x)$ converge totalmente $\quad x \in [r+1, \infty)$

$\Rightarrow$ la serie di funzioni è derivabile termine a termine.