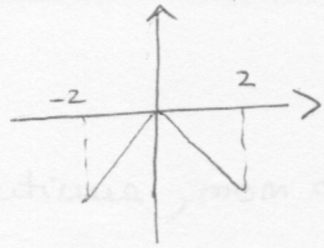
(5) $f(x) = -|x| \quad x \in [-2, 2]$

$T = 4 \quad \omega = 2\pi / T$



La funzione è pari $\Rightarrow b_k = 0$

$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,dx \qquad k = 0, 1, 2, \dots \qquad \omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$a_0 = \frac{2}{4}\int_0^4 (-|x|)\,dx = \frac{2}{4}\cdot 2\int_0^2 -|x|\,dx$

$= -\int_0^2 x\,dx = -\frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 = -2$

$a_k = -\frac{2}{4}\cdot 2\int_0^2 |x|\cos(k\omega x)\,dx = -\int_0^2 x\cos(k\omega x)\,dx$

$= -\left[\frac{x}{k\omega}\sin(k\omega x)\Big|_0^2 - \frac{1}{k\omega}\int_0^2 \sin(k\omega x)\,dx\right] =$

$= -\left[\frac{2}{k\omega}\cdot 0 - \left(\frac{1}{k\omega}\right)^2(-\cos k\omega x)\Big|_0^2\right] = -\left(\frac{\cos k\pi - 1}{(k\omega)^2}\right) = \frac{1-(-1)^k}{(k\omega)^2}$

$a_k = \frac{1-(-1)^k}{(k\omega)^2}$ La serie di Fourier converge in media quadratica

Uguaglianza di Parseval $\int_0^T f^2(x)\,dx = \frac{T}{2}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right]$

$\int_0^4 f(x)^2\,dx = \int_{-2}^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^2 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

$\frac{16}{3} = \frac{4}{2}\left[\frac{4}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^k)^2}{(k^2\omega^2)^2}\right] \Rightarrow \frac{2}{3} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^k)^2}{(k\omega)^4}$

(*)

$f(x)$ è regolare a tratti $\Rightarrow$ La serie di Fourier converge puntualmente.

$f(-2) = f(2)$ ~~f'(x) è regolare~~ $f'(x)$ è regolare a tratti

$\Rightarrow$ La serie di Fourier è derivabile termine a termine

(*) Dato che $f(x)$ è continua in $[0, T]$ $\Rightarrow$ la serie di Fourier converge a $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.