(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n^2x)}{1+2n^2} \qquad |f_n(x)| = \left|\frac{\sin(2n^2x)}{1+2n^2}\right| \le \frac{1}{1+2n^2} \le \frac{1}{2n^2}$

La serie $\displaystyle\sum_n \frac{1}{2n^2}$ converge.

La serie converge totalmente $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ converge puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$

$f_n(x) \in C^0(\mathbb{R})$ $\quad \displaystyle\sum_n f_n(x)$ converge totalmente $\Rightarrow$ la somma della serie è continua

$$f_n'(x) = \frac{2n^2 \cos(2n^2x)}{1+2n^2} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \neq 0$$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_n f_n'(x)$ non converge, la serie non è derivabile termine a termine

(4) $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{3^{2n}+n}(x-1)^n \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{3^{2n}+n} \qquad x_0 = 1$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{2n}+n}{3^{2(n+1)}+n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{9} \qquad R = 9$$

La serie converge assolutamente per $|x-1| < 9$ $\quad x \in (-8, 10)$

$x-1 = 9 \qquad \displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{3^{2n}+n} 3^{2n} \qquad \frac{(-1)^n 3^{2n}}{3^{2n}+n} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ la serie NON converge

$x-1 = -9 \qquad \displaystyle\sum_n \frac{1}{3^{2n}+n} 3^{2n} \qquad \frac{3^{2n}}{3^{2n}+n} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ la serie non converge

Convergenza assoluta per $x \in (-8, 10)$

Dato che è una serie di potenze si ha convergenza totale per $x \in [-8+\delta, 10-\delta] \quad \forall \delta : 0 < \delta < 9$

oppure $\forall x \in [1-r, 1+r] \quad 0 < r < 9$