

$$y'' + 6y' + 9y = 3x e^{-x}$$

Omogenea associata

$$z'' + 6z' + 9z = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \quad \lambda = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \pm 0 = -3$$

2 radici reali e coincidenti.

Le 2 soluzioni dell'eq. omogenea reale ed indipendenti sono

$$z_1(x) = e^{-3x} \quad z_2(x) = x e^{-3x}$$

Soluzioni particolare $y(x) = (ax+b)e^{-x}$

$$y'(x) = a e^{-x} + (ax+b)(-1)e^{-x} = e^{-x}(a-ax-b)$$

$$y''(x) = (-a-a+ax+b)e^{-x} = (-2a+ax+b)e^{-x}$$

$$e^{-x}[-2a+ax+b + 6(a-ax-b) + 9(ax+b)] = 3x e^{-x}$$

$$-2a+b+6a-6b+9b=0 \quad 4a+4b=0 \quad a=-b$$

$$a-6a+9a=3 \quad 4a=3 \quad a=3/4 \quad b=-3/4$$

$$y(x) = \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\right) e^{-x}$$

Sol. generale

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{3}{4}(x-1)e^{-x}$$