Es. 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{1+n^4} \qquad f_n(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$$

$$\left|\frac{\cos(n^2 x)}{1+n^4}\right| < \frac{1}{n^4} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4} \ \text{converge}$$

$\Rightarrow$ la serie converge totalmente $\forall x \in \mathbb{R}$

Dato che $f_n(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ e converge totalmente

$\Rightarrow$ $S(x)$ è continua

$$|f'_n(x)| = \left| -\frac{2 \sin(n^2 x)\, n^2}{1+n^4} \right| \leq \frac{2}{n^2}$$

$$\sum_n \frac{2}{n^2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ \text{converge}_{\text{tot.}} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ la $f'_n(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ la serie $\sum_n f_n(x)$ converge totalmente $\Rightarrow$ la serie è dunque termine a termine.