La soluzione è definita per $3 \neq e^{x^2}$ $\quad x^2 \neq \lg 3$

$x \neq \pm\sqrt{\lg 3}$

dunque la soluzione è definita

per $x \in \left(-\sqrt{\lg 3}, \sqrt{\lg 3}\right)$ $\quad y(x) = \dfrac{9-e^{x^2}}{3-e^{x^2}}$ sol. del pb. di Cauchy

$$y'(x) = \frac{2cxe^{x^2}}{1+ce^{x^2}} - \frac{2cxe^{x^2}}{1+ce^{x^2}}\, y = \frac{2cxe^{x^2}}{(1+ce^{x^2})^2}\left[1+ce^{x^2} - (3+ce^{x^2})\right] = -\frac{4cxe^{x^2}}{(1+ce^{x^2})^2}$$

$$(y-3)(y-1) = \left(\frac{3+ce^{x^2}}{1+ce^{x^2}} - 3\right)\left(\frac{3+ce^{x^2}}{1+ce^{x^2}} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{(1+ce^{x^2})^2}\left[\left(\cancel{3}+ce^{x^2}-\cancel{3}-3ce^{x^2}\right)\left(3+ce^{x^2}-1-ce^{x^2}\right)\right] = -\frac{2ce^{x^2}\cdot 2}{(1+ce^{x^2})^2}$$

$$= -2ce^{x^2}\cancel{2} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = x\,(y-3)(y-1) \quad \text{ok.}$$

(2) $y'' + 5y' + 6y = 2x + e^{-x}$

omogenea associata $\quad y'' - 5y' + 6y = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \qquad \lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$z(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$

Troviamo una sol. particolare (usiamo sovrapposizione)

$\bar{y}(x) = ax + b \qquad \bar{y}'(x) = a \qquad \bar{y}''(x) = 0$

$0 - 5a + 6(ax+b) = 2x \qquad 6a = 2 \qquad -5a + 6b = 0$

$\qquad a = \dfrac{1}{3} \qquad -\dfrac{5}{3} + 6b = 0 \quad b = \dfrac{5}{18}$

$\bar{y}(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{18}$

$\tilde{y}(x) = Ae^{-x} \qquad \tilde{y}'(x) = -Ae^{-x} \qquad \tilde{y}''(x) = Ae^{-x}$

$Ae^{-x} + 5Ae^{-x} + 6Ae^{-x} = e^{-x} \qquad A + 5A + 6A = 1 \quad 12A = 1 \quad A = \dfrac{1}{12}$

INT. GENERALE è

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3}x + \frac{5}{18} + \frac{1}{12}e^{-x}$$