② $3y''+8y'+4y = e^{2x}+\cos x$

Eq. lineare 2° ordine non omogenea

omogenea associata $3z''+8z'+4z=0$

$3\lambda^2+8\lambda+4=0 \qquad \lambda=\begin{cases}-2/3\\ -2\end{cases} \qquad z(x)=c_1e^{-2/3x}+c_2e^{-2x}$

$\bar y_1(x)=A\,e^{2x}=\frac{1}{32}e^{2x}$

$e^{2x}A(12+16+4)=e^{2x} \Rightarrow A=\frac{1}{32}$

$\bar y_2(x)=\mathrm{Re}\,(Be^{ix})$

$(-3+8i+4)B\,e^{ix}=e^{ix} \Rightarrow B=\frac{1}{1+8i}=\frac{1-8i}{65}$

$\bar y_2(x)=\mathrm{Re}\left(\frac{1-8i}{65}(\cos x+i\,\mathrm{sen}\,x)\right)=\frac{1}{65}\cos x+\frac{8}{65}\,\mathrm{sen}\,x$

Soluzione particolare è $\bar y(x)=\bar y_1(x)+\bar y_2(x)$

$\bar y(x)=\frac{e^{2x}}{32}+\frac{1}{65}\cos x+\frac{8}{65}\,\mathrm{sen}\,x$

Integrale generale

$y(x)=c_1e^{-2/3x}+c_2e^{-2x}+\frac{1}{32}e^{2x}+\frac{1}{65}\cos x+\frac{8}{65}\,\mathrm{sen}\,x$

③ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(1+2x^2)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{1+2x^2}\right)^n$ serie geometrica

converge ~~puntualmente~~ $\frac{x^2}{1+2x^2}<1 \qquad x^2<1+2x^2 \qquad 1+x^2>0$ sempre

La serie converge $\forall x\in\mathbb{R}$

$\left|\frac{x^2}{1+2x^2}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{1+2x^2}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \sum_n\left(\frac{1}{2}\right)^n<+\infty$

$\Rightarrow$ la serie converge totalmente

$f_n(x)=\left(\frac{x^2}{1+2x^2}\right)^n \in C^0(\mathbb{R}) \qquad \sum_n f_n(x)$ converge totalmente

$\Rightarrow S(x)$ è continua. Si vede anche dal fatto che $S(x)=\frac{1+2x^2}{1+x^2}$

$f_n'(x)=n\left(\frac{x^2}{1+2x^2}\right)^{n-1}\left(\frac{2x}{1+2x^2}-\frac{x^2\cdot 4x}{(1+2x^2)^2}\right) \Rightarrow \sum_n f_n'(x)=\frac{1}{(1+2x^2)}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{x^2}{1+2x^2}\right)^{n-1}$

$|f_n'(x)|<n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \sum_n n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<+\infty$ la serie delle derivate converge tot.