

3)
$$\sum_n \frac{\cos^2(mx) + \sin(3mx)}{m! + 4\sqrt{m}}$$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\cos^2(mx) + \sin(3mx)}{m! + 4\sqrt{m}} \right| \leq \frac{2}{m!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\sum_n \frac{1}{m!} < +\infty \Rightarrow$ le serie converge assolutamente

$f_n(x) \in C^0(\mathbb{R}) +$ conv. totale $\Rightarrow S(x) \in C^0(\mathbb{R})$

$$|f'_n(x)| = \left| \frac{-2m \cos(mx) \sin(mx) + 3m \cos(3mx)}{m! + 4\sqrt{m}} \right| \leq \frac{5m}{m!}$$

$\sum_n \frac{5m}{m!} < +\infty \Rightarrow$ conv. totale serie delle derivate
 \Rightarrow conv. puntuale

$\sum_n f_n(x)$ conv. ~~tot~~ + $\sum_n f'_n(x)$ conv. tot + $f'_n \in C^0(\mathbb{R})$

\Rightarrow serie è derivabile termine a termine

4)
$$\sum_n \frac{n^4 + 2^n}{3^n + n} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n$$

$$a_n = \frac{n^4 + 2^n}{3^n + n} \cdot \frac{1}{2^n} \quad x_0 = 2$$

$$\sqrt[n]{a_n} \approx \sqrt[n]{\frac{2^n}{6^n}} = \frac{1}{3} \quad R = 3$$

$|x-2| < 3 \quad -1 < x < 5$

$x \in (-1, 5)$ conv. assoluta \Rightarrow puntuale

$x = -1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4 + 2^n}{3^n + n} \cdot \frac{3^n}{2^n} (-1)^n$ non converge
 (non è soddisfacente) CN

$x = 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4 + 2^n}{3^n + n} \cdot \frac{3^n}{2^n}$ non converge

conv. totale $\forall x \in [-1+\delta, 5-\delta] \quad \forall \delta > 0$