Formula del gradiente

$$D_v f(\vec{x}_0) = \nabla f(x_0) \cdot \vec{v} =$$

$$D_v f(0,0) = (1, +1) \cdot (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta = g'(0)$$

La formula del gradiente è valida.

Vediamo se la funzione è differenziabile in $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)\operatorname{sen}(x^2+y^2) - (x+y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2) - (x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0 \quad \text{infatti}$$

$$\left| (x+y) \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2) - (x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right| = \left| \rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) \frac{\operatorname{sen}\rho^2 - \rho^2}{\rho^{3/2}} \right|$$

$$\leq \rho^{1/2} \left| \frac{\operatorname{sen}\rho^2}{\rho^2} - 1 \right| \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$$

$\Rightarrow$ la funzione è differenziabile in $(0,0)$