④ $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{2x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{2x^4+y^2}$$

$$\left|\frac{2xy^2}{2x^4+y^2}\right| \leq |2x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow f \text{ è continua su } \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y^2}{2x^4+y^2} - \frac{16x^4y^2}{(2x^4+y^2)^2} \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4xy}{2x^4+y^2} - \frac{4xy^3}{(2x^4+y^2)^2} \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

Derivabilità in $(0,0)$ $\qquad$ f è derivabile su $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left.\frac{d}{dx}f(x,0)\right|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left.\frac{df(0,y)}{dy}\right|_{y=0} = 0$$

Differenziabilità in $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{2x^4+y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$$

$$\left|\frac{2xy^2}{2x^4+y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{2\rho^3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}{2\rho^4\cos^4\theta+\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta}\cdot\frac{1}{\rho}\right| \leq 2 \quad \text{non dice nulla}$$

Se prendo $x=y$

$$g(x,x) = \frac{2x^3}{2x^4+x^2}\cdot\frac{1}{|x|\sqrt{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sgn}(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} g(x,x) = \frac{2}{\sqrt{2}} \neq \lim_{x\to 0^-} g(x,x) = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ il limite non esiste $\Rightarrow$ la f non è diff. in $(0,0)$

Dato che f_x, f_y sono continue in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$\Rightarrow$ f è differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$