(4)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^{2/5}x^3}{2x^2+2y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^{2/5}x^3}{2x^2+2y^2} = 0 \Rightarrow \text{funzione continua}$$

$$\left|\frac{y^{2/5}x^3}{2x^2+2y^2}\right| = \left|\rho^{17/5}\frac{\operatorname{sen}^{2/5}\theta\cos^3\theta}{2\rho^2}\right| \leq \frac{1}{2}\rho^{7/5} \xrightarrow[\rho\to0]{} 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y^{2/5}}{2(x^2+y^2)} - \frac{1}{2}\frac{y^{2/5}x^3}{(x^2+y^2)^2}2x$$ definita per $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{5}\frac{y^{-3/5}x^3}{2(x^2+y^2)} - \frac{1}{2}\frac{y^{2/5}x^3}{(x^2+y^2)^2}2y$$ definita per $y\neq0$

Se applico la def. nei pti $(x_0,0)$ $x_0\neq0$ la derivata rispetto ad y non è definita $\Rightarrow$ nei $(x_0,0)$ $x_0\neq0$ f non è derivabile

Applichiamo la def nel pto $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0} = 0$$

$\Rightarrow f$ è derivabile in $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq0\}$ ed in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy}f(y,0)\Big|_{y=0} = 0$$

Su A le derivate parziali sono continue $\Rightarrow f$ diff. in A

differenziabilità in $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^{2/5}x^3}{2(x^2+y^2)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\left|\frac{y^{2/5}x^3}{2(x^2+y^2)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{\rho^{17/5}\operatorname{sen}^{2/5}\theta\cos^3\theta}{2\rho^3}\right| \leq \rho^{2/5} \xrightarrow[\rho\to0]{} 0$$

$\Rightarrow f$ è differenziabile su $A\cup\{(0,0)\}$

Piano tg. in (0) $z=0$