

$$f(x,y) = \frac{3yx^{1/3}}{3+y^2+x^2} \quad f \in C^0(\mathbb{R}^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^{2/3}} \frac{1}{3+y^2+x^2} - \frac{2x \cdot 3yx^{1/3}}{(3+y^2+x^2)^2}$$

non è definita nei $x=0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x^{1/3}}{3+y^2+x^2} - \frac{6y^2x^{1/3}}{(3+y^2+x^2)^2}$$

è definita e continua su tutto \mathbb{R}^2

Su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ $f_x, f_y \in C^0(A)$

$\Rightarrow f$ è differenziabile su tutto A .

Su $x=0, y \neq 0$ la f_x non è definita \Rightarrow
la funzione non è differenziabile

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left. \frac{d}{dx} f(x,0) \right|_{x=0} = \left. \frac{d}{dx} (0) \right|_{x=0} = 0$$

Vediamo se f è diff. in $(0,0)$ dato che $f_x(0,0)=0$
studio $f_y(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3yx^{1/3}}{(3+y^2+x^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\left| \frac{3yx^{1/3}}{(3+y^2+x^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \left| \frac{3\rho^{4/3} \sin\theta \cos\theta}{(3+\rho^2)\rho} \right| \leq \frac{3\rho^{1/3}}{3+\rho^2} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$$

\Rightarrow la funzione è diff. in $(0,0)$

$$B = A \cup \{(0,0)\}$$

f è derivabile su B

f è differenziabile su B