

STOCHASTIC MECHANICS/ MECCANICA STOCASTICA
MATHEMATICAL Engineering / Ingegneria MATEMATICA 6 CFU

Prof. N. Cancrini

a.a. 2007/2008

English version

Stochastic differential equations have a wide range of applications outside mathematics and have many fruitful connections to other mathematics disciplines. The course is an attempt to approach the subject from the non expert point of view. We will not be interested in the proof of the more general case, but in an easier proof of a special case. We will believe some basic results without proof in order to have time for basic applications. The program will be the following.

Introduction. Stochastic analogue of ordinary differential equations.

Basic Probability Theory. Basic definitions: probability spaces, random variables, stochastic processes. Expected value, variance. Distribution functions. Independence. Characteristic functions. Convergence of random sequences. Law of large numbers. Central Limit Theorem. Conditional expectation. Martingales (definition).

Brownian motion and white noise. Motivation and definitions. Computation of joint probabilities. Heuristic construction of the one dimensional Wiener process. Brownian motion in higher dimensions. Sample path properties. Nowhere differentiability. Markov property.

Stochastic integrals, Itô's formula. Motivation. Definition and properties of Itô integral. Indefinite Itô integrals. Itô's formula. Itô integral in higher dimensions.

Stochastic differential equations (SDE). Definitions and examples. Existence and uniqueness of solutions. Properties of solutions. Linear stochastic differential equations. The Stratonovic integral. Applications.

Diffusions Processes. Markov process. Chapman-Kolmogorov equation. Definition of diffusion process. Sufficient conditions for a diffusion process. Link between diffusion processes and SDE. Link between stochastic processes and PDE: Kolmogorov forward equation, Kolmogorov backward equation (Fokker-Planck equation). Diffusion processes as weak solutions of SDE.

Stochastic Stability. Definitions. Lyapunov function. Linearization.

Versione italiana

Le equazioni differenziali stocastiche hanno a molte applicazioni al di fuori della matematica ed hanno molte importanti connessioni con altre discipline matematiche. Il corso è un tentativo di avvicinarsi alla materia dal punto di vista non esperto. Non saremo interessati alla

dimostrazione del caso generale, ma ad una dimostrazione più semplice di un caso particolare. Alcuni risultati base verranno dati senza dimostrazione per avere più tempo per le applicazioni. Il programma sarà il seguente.

Introduzione. Analogo stocastico di equazioni differenziali classiche;

Basi di Teoria della Probabilità. Spazi di probabilità, variabili casuali e processi stocastici. Valore atteso, varianza. Funzioni di distribuzione. Indipendenza. Funzioni caratteristiche. Convergenza di successioni di variabili casuali. Legge dei grandi numeri. Teorema del limite centrale. Aspettazione condizionata. Martingale (definizione).

Moto Browniano e rumore bianco. Motivazioni e definizioni. Calcolo di probabilità congiunte. Costruzione euristica del processo di Wiener unidimensionale. Moto Browniano in dimensione maggiore di uno. Proprietà delle traiettorie. Non differenziabilità. Proprietà di Markov.

Integrali stocastici, formula di Itô. Motivazione. Definizione e proprietà dell'integrale di Itô. Integrali di Itô indefiniti. Formula di Itô. Integrale di Itô in dimensione maggiore di uno.

Equazioni differenziali stocastiche (SDE). Definizioni ed esempi. Esistenza ed unicità della soluzione. Proprietà delle soluzioni. equazioni differenziali stocastiche lineari. Integrale di Stratonovic. Applicazioni.

Processi di diffusione. Processi di Markov. equazione di Chapman Kolmogorov. definizione dei processi di diffusione. Condizioni sufficienti per un processo di diffusione. Legame tra processi di diffusione e SDE. Legame tra processi di diffusione e PDE: equazioni di Kolmogorov in avanti e indietro (equazione di Fokker-Planck). Processi di diffusione come soluzioni deboli di SDE.

Stabilità stocastica. Definizioni. Funzione di Lyapunov. Linearizzazione.