

## Capitolo 4

# La fune

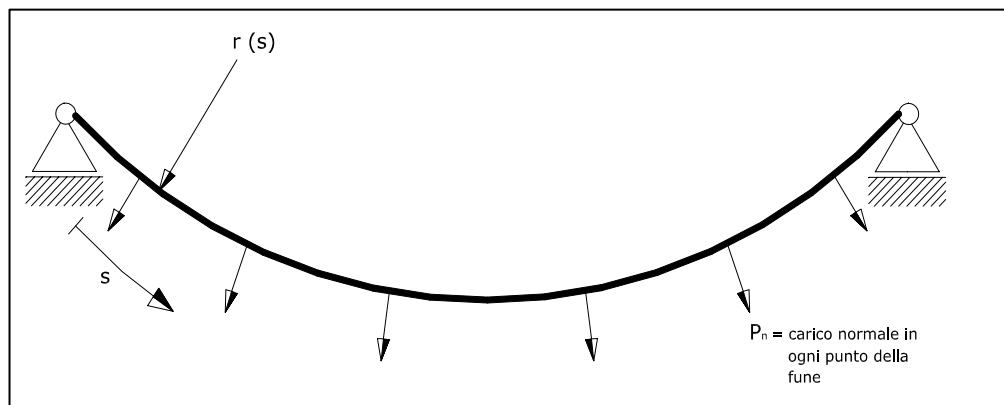
### 1. Generalità

La fune è un oggetto strutturale che ha la capacità di offrire resistenza a sforzi di trazione, in altri termini ha quindi rigidità non nulla solo in direzione assiale; non offre nessuna resistenza a sforzi taglienti e di momenti flettenti, non ha quindi rigidità tagliante e flessionale.

### 2. Problema cinematico

Per la descrizione del problema cinematico si utilizza un'ascissa curvilinea che corre lungo l'asse della struttura, in modo tale da definire punto per punto il raggio di curvatura dell'elemento stesso.

Poiché il carico applicato è in ogni punto ortogonale alla linea d'asse, l'unica componente di spostamento che è plausibile prendere in esame è proprio quella in direzione normale in ogni punto della linea d'asse, chiamata  $v$ .  
Immaginando di avere una configurazione come in fig. 1.



**Fig. 1:** Sistema di riferimento e carichi nella fune.

il vettore campo degli spostamenti sarà il seguente:

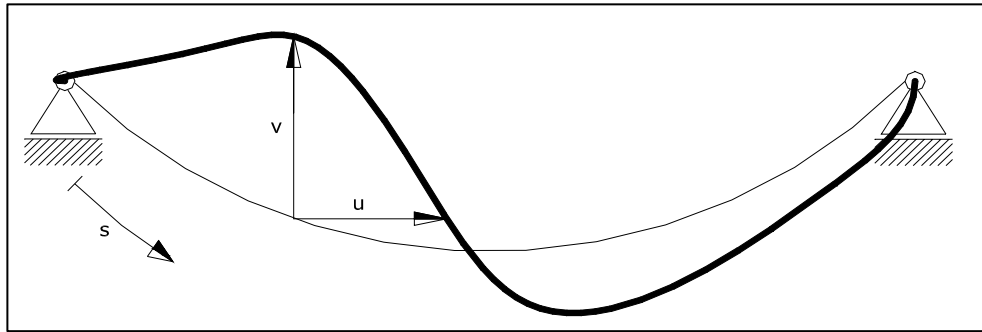
$$\mathbf{u} = \{v\}$$

e l'unica deformazione sarà:

$$\varepsilon = \{\varepsilon\}$$

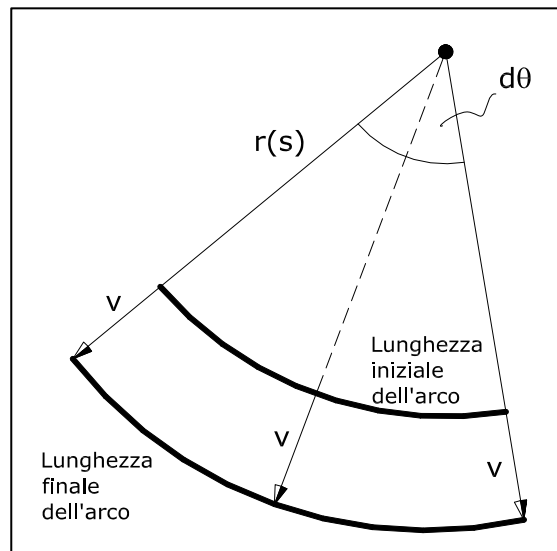
che rappresenta la *deformazione estensionale*.

E' utile far notare che se si avesse una configurazione, come quella riportata in fig.2, significherebbe avere componenti di spostamenti al di fuori della linea d'asse e quindi garantirebbe delle rigidità taglianti e flessionali, ma ciò non viene preso in esame in questo modello.



**Fig. 2:** Configurazione generica del modello di fune.

Estraendo un concetto di filo infinitesimo, si analizza la deformazione generata dall'unica componente di spostamento. Si ipotizza il raggio di curvatura costante poiché si opera nel mondo infinitesimo, ma a rigore il raggio di curvatura è funzione dell'ascissa curvilinea  $s$  (fig.3).



**Fig. 3:** Deformazione della fune.

La variazione di lunghezza dell'arco infinitesima si ottiene dalla ben nota relazione:

$$\varepsilon = \frac{(r+v)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{v}{r}$$

che rappresenta l'unica equazione di congruenza.

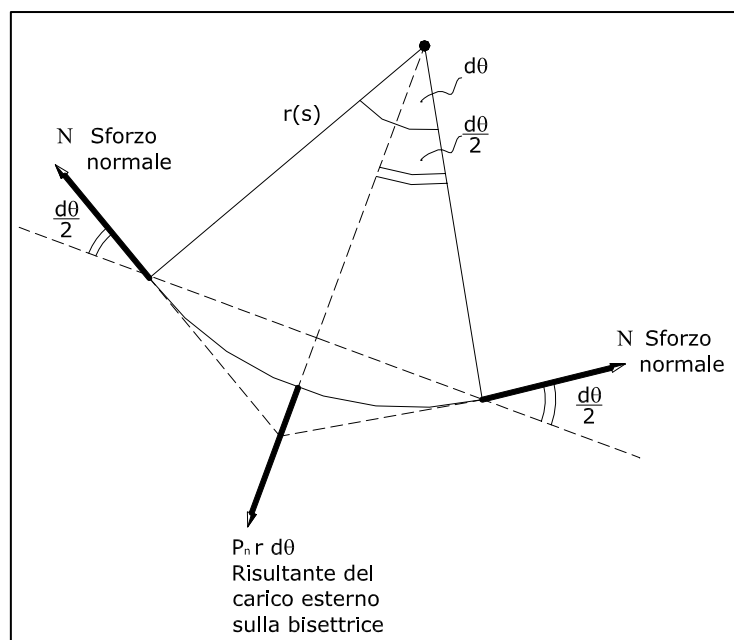
In forma matriciale:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} \{v\}$$

in cui non si ha bisogno di condizioni al contorno poiché il problema cinematico non è differenziale.

### 3. Problema statico

Per lo studio del modello cinematico associato al modello di fune, si estrae dall'elemento strutturale, un concetto infinitesimo e si analizzano le forze in gioco (fig.4).



**Fig. 4:** Tensioni nel modello di fune.

Si procede alla scrittura dell'unica equazione di equilibrio dettata dalla direzione del campo di spostamento, per cui si effettua un'equazione di equilibrio normale rispetto all'asse baricentrico dell'elemento estratto:

$$N \frac{d\theta}{2} + N \frac{d\theta}{2} - P_n r d\theta = 0$$

da cui la relazione

$$\frac{N}{r} = P_n$$

rappresenta l'unica equazione di equilibrio. In forma operatoriale il problema statico diviene:

$$\{N\} \left[ \frac{1}{r} \right] = \{P_n\}$$

in cui è possibile notare la *dualità* tra i due operatori, in più il problema statico risulta essere *staticamente determinato* per vincoli interni.

Il termine  $\frac{N}{r}$  viene chiamato **portanza funicolare**, e ha la capacità di portare il carico normale  $P_n$ .

#### 4. Legame elastico

Il *legame costitutivo* è rappresentato dalla sola equazione:

$$N = EA \varepsilon$$

dove:

- $N$  sforzo normale applicata alla sezione dell'elemento strutturale;
- $E$  modulo di Young;
- $A$  area della sezione;
- $\varepsilon$  deformazione estensionale.

#### 5. Soluzione del problema elastico

Risolvendo il problema mediante il metodo degli spostamenti, i passi da seguire sono sempre i soliti.

1. *Equazione implicita di congruenza:*

$$\{\varepsilon\} = \left[ \frac{1}{r} \right] \{v\}$$

2. *Legame costitutivo:*

$$N = EA \varepsilon$$

3. *Sostituzione dell'equazione implicita di congruenza nel legame costitutivo*

$$N = EA \frac{v}{r}$$

4. *Sostituzione dell'equazione del passo 3 nell'equazione di equilibrio e determinazione dell'equazione di campo.*

$$\frac{N}{r} = P_n \quad \text{equazione di equilibrio}$$

$\frac{EA}{r^2} v = P_n \quad \text{equazione di campo della fune}$
---