

Capitolo 7

Lastra piana

1. Generalità

La lastra piana è una struttura in cui due dimensioni predominano sulla terza. Al contrario della trave monodimensionale in cui due dimensioni sono molto più piccole della terza.

Si ipotizza che la lastra piana sia soggetta esclusivamente a forze parallele alla superficie. Si parte così dallo stato di deformazione generale secondo i due assi principali x e y .

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad (1)$$

Si consideri ora il legame elastico secondo la legge di Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} [\tau_{xy}]; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} [\tau_{yz}]; \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} [\tau_{xz}] \quad (5)$$

ne discende che aver ipotizzato $\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$:

$$\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \quad (6)$$

Tuttavia avere imposto una deformazione $\varepsilon_z = 0$ non implica che lo stato di tensione sia piano. Risulta infatti dalla (4):

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (7)$$

si suppone comunque uno stato di tensione piano per semplificare i calcoli.

Si ipotizzano inoltre agenti sulla lastra forze di volume \bar{b} e forze di superficie \bar{f} agenti sulla frontiera entrambe parallele al piano xy. Inoltre si approssima il tutto a un problema elastico piano in cui le azioni non sono variabili lungo lo spessore e si considera una forza di superficie \bar{f} media che dipende solo da x e y. Ciò è lecito per l'ipotesi di De Saint Venant in quanto lungo l'asse z ho una risultante che ha gli stessi effetti delle forze totale fino ad una certa distanza dal bordo. In conclusione quindi si può considerare come riferimento il piano medio.

2. Problema elastico

2.1. Cinematica

Si passa ora al problema cinematico della lastra piana:

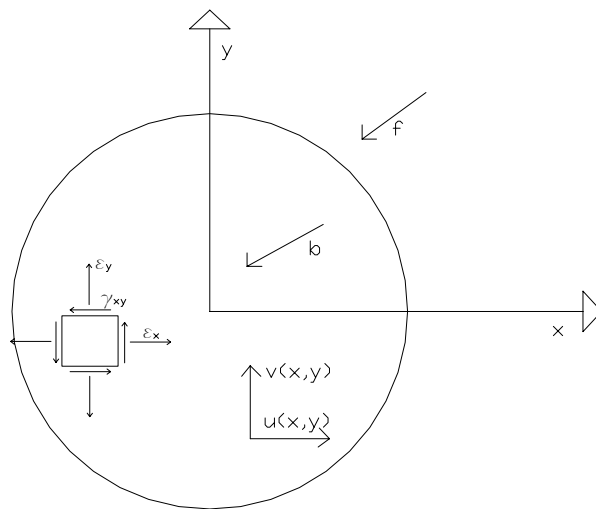


Fig. 1: Lastra con le sue tensioni e deformazioni

Lo studio della cinematica del sistema conduce a relazioni differenziali lineari tra le variabili di configurazione \mathbf{u} e deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$, nonché a condizioni algebriche al contorno. Le variabili di configurazione sono rappresentate dalle funzioni

spostamento u e v . Il campo di deformazione è misurato dalle dilatazioni specifiche ε_x , ε_y e dallo scorrimento angolare γ_{xy} :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Le equazioni implicite di congruenza sono:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy} \\ \frac{d}{dy} & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (9)$$

Le equazioni implicite di congruenza costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali nelle due funzioni spostamento. Assegnato ad arbitrio il campo di deformazioni non è possibile in generale determinare un campo di spostamento regolare che le soddisfi. Il continuo bidimensionale è pertanto cinematicamente impossibile, a prescindere dalle condizioni di vincolo eventualmente presenti sulla frontiera.

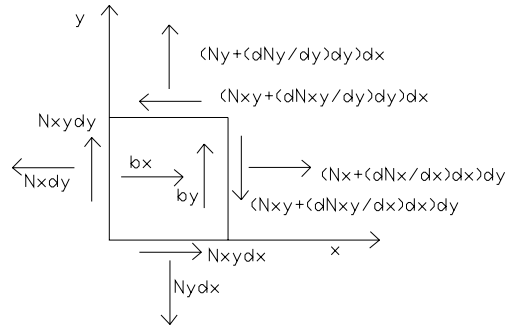
2.2. Legame elastico

Il legame elastico con le opportune semplificazioni è quindi esprimibile in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{Eh} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} \quad (10)$$

2.3. Statica

Per quanto riguarda la statica si può riassumere l'andamento delle tensioni nel modo seguente per un concio infinitesimo di lastra:

**Fig. 2:** Andamento delle tensioni

Le tensioni generalizzate N_i rappresentano la risultante sullo spessore delle la σ_i , cioè:

$$N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i dz \quad (11)$$

Si possono così scrivere le equazioni di equilibrio secondo l'asse x:

$$-N_x dy + \left(N_x + \frac{dN_x}{dx} dx \right) dy - N_{xy} dx + \left(N_{xy} + \frac{dN_{xy}}{dy} dy \right) dx + b_x dx dy \quad (12)$$

e secondo l'asse y:

$$-N_y dx + \left(N_y + \frac{dN_y}{dy} dy \right) dx - N_{xy} dy + \left(N_{xy} + \frac{dN_{xy}}{dx} dx \right) dy + b_y dx dy \quad (13)$$

In definitiva le equazione di indefinite di equilibrio si scrivono:

$$\frac{dN_x}{dx} + \frac{dN_{xy}}{dy} + b_x = 0 \quad (14)$$

$$\frac{dN_y}{dy} + \frac{dN_{xy}}{dx} + b_y = 0 \quad (15)$$

Il problema di equilibrio è governato da due equazioni nelle tre funzioni incognite N_x , N_y e N_{xy} il continuo bidimensionale è perciò staticamente indeterminato, indipendentemente dalle condizioni al contorno. Introducendo ora le tensioni generalizzate nel legame elastico risulta:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Le equazioni di equilibrio in forma matriciale invece si scrivono:

$$\begin{bmatrix} -\frac{d}{dx} & 0 & -\frac{d}{dy} \\ 0 & -\frac{d}{dy} & -\frac{d}{dx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \quad (17)$$

Si può notare che le matrici con gli operatori differenziali sono una l'aggiunta dell'altra, in quanto una è la trasposta dell'altra con le derivate dispari di segno contrario.

2.4. Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno a questo punto possono essere scritte:

- condizioni al contorno cinematiche:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \\ v &= \bar{v} \end{aligned} \quad (18)$$

- condizioni al contorno meccaniche:

$$\begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{yx} & N_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \quad (19)$$

Così scritte le equazioni di congruenza e di equilibrio sono irrisolvibili. Infatti le equazioni di congruenza costituiscono un sistema impossibile in quanto le equazioni a disposizione sono maggiori delle incognite. Al contrario le equazioni di equilibrio costituiscono un sistema indeterminato in quanto le incognite sono maggiori alle equazioni disponibili.

Nell'ottica di risolvere il problema elastico con il metodo delle forze, si introducono le equazioni di compatibilità cinematica. Esse sono scritte nella forma:

$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy} \quad (20)$$

cioè in forma operatoriale:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dy^2} & \frac{d^2}{dx^2} & -\frac{d^2}{dxy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = 0 \quad (21)$$

3. Metodi di risoluzione

In questo modo è possibile risolvere il problema indifferentemente attraverso il metodo degli spostamenti o delle forze.

3.1 Metodo degli spostamenti

Il metodo degli spostamenti consiste nell'ottenere le equazioni di equilibrio espresse in funzione delle componenti di spostamento generalizzate. Utilizzando le equazioni implicite di congruenza ed il legame costitutivo, si ottengono:

$$N_x = \frac{hE}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dx} + \nu \frac{dv}{dy} \right) \quad (22)$$

$$N_y = \frac{hE}{1-\nu^2} \left(\frac{dv}{dy} + \nu \frac{du}{dx} \right) \quad (23)$$

$$N_{xy} = \frac{hE}{2(1+\nu)} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \quad (24)$$

Queste ultime inserite nelle equazioni di equilibrio permettono di ottenere le equazioni risolutive secondo il metodo degli spostamenti:

$$-\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[u_{xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{,yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{,xx} \right] = b_x \quad (25)$$

$$-\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[v_{yy} + \frac{1+\nu}{2} u_{,xx} + \frac{1-\nu}{2} v_{,xx} \right] = b_y \quad (26)$$

Le precedenti equazioni differenziali sono dette *equazioni di Navier*.

Insieme alle condizioni meccaniche e a quelle geometriche costituiscono la formulazione del problema elastico della lastra in termini di spostamento. Queste equazioni tuttavia sono di difficile risoluzione a meno di casi semplici. Si preferisce risolvere con il metodo delle forze.

3.2. Metodo delle forze

Consiste nel determinare il generico stato di tensione equilibrato risolvendo le equazioni della statica (17). Facendo riferimento dapprima all'equazione omogenea ($b_x = b_y = 0$) si ipotizza la soluzione:

$$N_x = \frac{d^2 \chi}{dy^2}; N_y = \frac{d^2 \chi}{dx^2}; N_{xy} = -\frac{d^2 \chi}{dxdy} \quad (27)$$

che scritta in forma operatoriale diventa:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dy^2} \\ \frac{d^2}{dx^2} \\ -\frac{d^2}{dxdy} \end{bmatrix} \cdot \chi \quad (28)$$

dove $\chi(x,y)$ è una funzione arbitraria detta *funzione di tensione di Airy*. La soluzione è quindi scritta nella forma $\sigma = S \chi$ in cui S è l'operatore aggiunto dell'operatore cinematico S^* dell'equazione di compatibilità cinematica. Si ottengono così, note le χ , il campo delle tensioni in funzione delle incognite iperstatiche. Se sono presenti delle forze di volume il problema non è più omogeneo e si scrive:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{x0} \\ N_{y0} \\ n_{xy0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d^2 \chi}{dy^2} \\ \frac{d^2 \chi}{dx^2} \\ -\frac{d^2 \chi}{dxdy} \end{bmatrix} \quad (29)$$

dove i termini N_{x0} , N_{y0} e N_{xy0} dipendono dai carichi esterni. Nel caso di lastra posta verticalmente si ha solo il peso proprio e quindi:

$$N_{x0} = 0; N_{xy0} = 0; N_{y0} = -\gamma h y \quad (30)$$

Scrivendo le deformazioni in funzione di χ e usando il legame costitutivo, si può scrivere:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (\chi_{,yy} - \nu \cdot \chi_{,xx}) \quad (31)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{Eh} (\chi_{,xx} - \nu \cdot \chi_{,yy}) \quad (32)$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{1}{Eh} 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \chi_{xy} \quad (33)$$

che introdotte nell'equazione di compatibilità cinematica, forniscono:

$$\boxed{\chi_{xxxx} + \chi_{yyyy} + 2 \cdot \chi_{,xxyy} = 0} \quad (34)$$

Equazione che prende il nome di *equazione biarmonica di Airy*.

Questa equazione è comunque di difficile soluzione e si cerca di immaginare in virtù del tipo di sollecitazione come potrebbe essere la χ per risolverla. Il metodo delle forze inoltre è applicabile solo per sistemi autoequilibrati, in cui cioè le forze esterne si equilibrano da sole, data la difficoltà di esprimere condizioni di vincolo cinematiche in funzione di grandezze statiche (relazioni integro-differenziali).