

Capitolo 13

Gusci cilindrici (Tubi)

1. Le Piastre Curve o Gusci : Generalità

Le piastre curve, chiamate anche gusci, sono oggetti geometricamente molto simili alle membrane curve analizzate nel capitolo 10.

Tuttavia, mentre nel caso delle strutture laminari curve di spessore piccolissimo (membrane) le deformazioni che fanno variare la curvatura provocano delle *tensioni di flessione* trascurabili rispetto alle *tensioni di membrana*, nel caso in cui lo spessore non sia piccolissimo le tensioni di flessione possono invece essere considerevoli.

Nel seguito, ci occuperemo principalmente delle piastre curve di rivoluzione, che vengono considerate (per ipotesi) con uno spessore sufficientemente piccolo da consentire lo studio mediante teorie elementari¹, ma non tanto piccolo da poterle considerare come membrane.

Come si osserverà più avanti, il problema delle piastre curve è staticamente indeterminato per vincoli interni (esternamente invece, può essere sia determinato che indeterminato), poiché oltre agli sforzi membranali N_m , N_p e N_{pm} , che nelle membrane bastavano per equilibrare le forze esterne, si hanno anche momenti flettenti e sforzi di taglio normali alla superficie media della piastra.

Le deformazioni che provocano le tensioni di flessione possono essere dovute sia a forze o a coppie agenti lungo il bordo della lastra² (che distruggono il *regime membranale*, secondo quanto asserito al capitolo 10 sulle membrane), sia alle forze esterne distribuite sulla superficie della piastra stessa.

Nel primo caso tali tensioni si smorzano rapidamente a breve distanza dal bordo (o dal parallelo caricato), e quindi praticamente sono soltanto delle *tensioni locali*. Queste tensioni locali si hanno anche se lo spessore s è piccolissimo (membrane); però si smorzano con rapidità tanto maggiore quanto più s è piccolo rispetto alle altre dimensioni della piastra curva. Nel secondo caso invece, le forze distribuite

¹ Il piccolo spessore rende attendibile l'ipotesi della variazione lineare delle σ nello spessore, consueta nella scienza delle costruzioni, che consente di studiare l'equilibrio e le deformazioni di elementi di volume aventi l'intero spessore s ; mentre se la piastra fosse grossa, si potrebbe studiare soltanto coi metodi della Teoria dell'Elasticità, cioè considerando elementi di volume infinitesimi nelle tre direzioni.

² Oppure lungo un parallelo generico.

deformano l'intera lastra; per cui, se la curvatura dei meridiani si modifica, le tensioni di flessione (e di taglio) si manifestano in tutta la piastra.

Tuttavia, esse sono molto minori delle tensioni di membrana dovute agli sforzi N_m , N_p e delle tensioni locali suddette; per cui si possono trascurare. Per conseguenza, le tensioni e le deformazioni provocate dalle forze esterne distribuite sulla superficie della piastra si possono studiare (come si vedrà in seguito), con grande semplificazione e con buona approssimazione, usando gli stessi metodi e le stesse formule trovate per le membrane curve.

Nel presente capitolo, si studieranno con maggiore attenzione i gusci³ cilindrici (tubi), mentre nel capitolo 12 si studieranno i gusci di rivoluzione (cupole)

2. Gusci cilindrici (tubi): Generalità

In questo capitolo vengono analizzati i *gusci cilindrici* (o tubi), ovvero quelle strutture di rivoluzione⁴ generate dalla rotazione di un segmento rettilineo intorno ad un asse di rotazione ad esso parallelo, posto a distanza R dal segmento stesso.

Analogamente ai gusci di forma qualsiasi, anche in questo caso si ipotizza che l'oggetto è dotato di uno spessore piccolo rispetto alle altre due dimensioni dell'elemento strutturale (e al raggio R).

Come nelle membrane poi, il caso più semplice è quello in cui le forze applicate sono simmetriche rispetto all'asse di rivoluzione (Fig. 1)⁵, cioè variano in generale da un parallelo all'altro, ma sono invariabili lungo uno stesso parallelo; così che esse sono funzioni soltanto della coordinata che definisce i vari paralleli (angolo θ nelle cupole e nelle membrane, ascissa x nelle lastre coniche o cilindriche).

In tal caso, anche le sollecitazioni e le deformazioni sono funzioni di quella sola coordinata, per cui lo studio del problema elastico associato al modello di tubo⁶ dipende da equazioni differenziali ordinarie, anziché alle derivate parziali.

Inoltre, il loro numero si riduce perché si annullano le azioni torcenti e taglienti fra i vari meridiani.

L'assialsimmetria concludendo, riduce il dominio bidimensionale su cui può essere definito l'oggetto strutturale e il problema elastico associato, in un dominio monodimensionale: il comportamento del tubo lungo ogni meridiano è analogo a quello di tutti i meridiani, ed è rappresentativo del comportamento dell'intero tubo⁷.

Infine, prima di iniziare l'analisi dei 3 sottoproblemi del problema elastico associato al modello di tubo, si osserva che – come già fatto per le membrane – anche nel caso dei tubi ci si può aspettare (e di conseguenza, si può *ipotizzare*) un

³ O lastre.

⁴ E quindi assialsimmetriche, geometricamente.

⁵ Il campo di forze agente sui gusci cilindrici si ipotizza essere assialsimmetrico, cioè con direzione perpendicolare alla superficie del guscio in ogni punto e con intensità dipendente esclusivamente dalla distanza dal centro di rotazione.

⁶ E nel capitolo 12, al modello di guscio di rivoluzione.

⁷ La stessa proprietà si potrà osservare anche per i gusci di rivoluzione.

comportamento globale caratterizzato dalla collaborazione di due diversi ordini di travi:

- travi rettilinee (che corrono lungo i meridiani);
- travi ad anello (che corrono lungo i paralleli).

Il tubo cioè, può essere pensato (a livello comportamentale) come costituito dalla sovrapposizione di questi due ordini di travi.

Si vedrà tra breve allora, che le azioni esterne sono *portate* dal *contributo flessionale* delle travi rettilinee (effetto flessionale) e dal *contributo estensionale* (si ricorda che i carichi radiali distribuiti hanno un effetto estensionale sulle travi ad anello) delle travi ad anello.

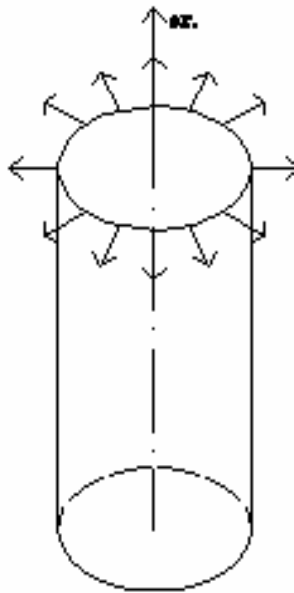


Fig.1: Rappresentazione del guscio cilindrico con campo di forze polare.

OSS 1:

L'ipotesi di campo di forze assialsimmetrico è giustificata dalle condizioni di carico a cui sono assoggettate, normalmente, le *strutture composte*⁸ che contengono i gusci cilindrici (come ad esempio i *serbatoi cilindrici*).

In questi casi infatti, preso un cilindro di raggio medio R e di spessore s , soggetto alla pressione p sulla parete (assumendo p positiva, se agente dall'interno verso l'esterno), si osserva che lo spessore e la pressione possono essere costanti o variabili lungo il tubo, rimanendo comunque costanti lungo ogni singolo parallelo. I tubi infatti, e più in generale i serbatoi, sono strutture utilizzate prevalentemente come contenitori di fluidi, i quali applicano all'elemento tubo una pressione p che ha le caratteristiche sopra definite.

Ed in queste condizioni di simmetria radiale, il tubo si deforma in modo che ciascun parallelo si allarga o si restringe rimanendo circolare. Le generatrici della superficie media del tubo in generale, si deformano, inflettendosi nei piani radiali. La parete del tubo allora, si può pensare decomposta sia in *strisce longitudinali*,

⁸ Di cui si parlerà nel Capitolo 14.

parallele all'asse del tubo e limitate da due generatrici, sia in *strisce anulari*, limitate da due circonferenze.

Ogni striscia longitudinale si deforma nello stesso modo, per cui basta studiarne una qualunque, che riterremo di larghezza unitaria. Supponendo poi, che la pressione p sia sopportata da queste strisce, la deformazione di ciascuna di esse è contrastata dalle strisce anulari, che servono da appoggio continuo alle prime.

OSS 2:

Nel modello di tubo, come già visto nei modelli di lastra, piastra e membrana, il processo di scrittura del problema statico e cinematico consisterà nel **condensare la variabilità delle grandezze statiche e cinematiche lungo lo spessore, nella superficie media** (chiamata *superficie elastica*).

3. Risoluzione del problema elastico associato al modello di tubo

3.1. Problema cinematico

In questa sezione, si analizza il problema cinematico delle gusci cilindrici (tubi). Analogamente a quanto visto per i modelli precedenti, tale problema è caratterizzato ed è volto alla determinazione dalle Equazioni Implicite di Congruenza, che costituiscono un legame tra le deformazioni (generalizzate o puntuali) e gli spostamenti (generalizzati o puntuali).

Il primo passo da effettuare nell'ambito di questo problema è la definizione del *campo di spostamenti* $\{u\}$.

In generale, considerando un tubo cilindrico di raggio medio R (raggio della superficie media dell'elemento) e di spessore s , e prendendo un punto P (generico) posto sulla superficie media del guscio, il campo degli spostamenti⁹ può essere descritto compiutamente dal vettore

$$u = \{u, v, w\}^T,$$

costituito da tre componenti, così come riportato in Fig.(2):

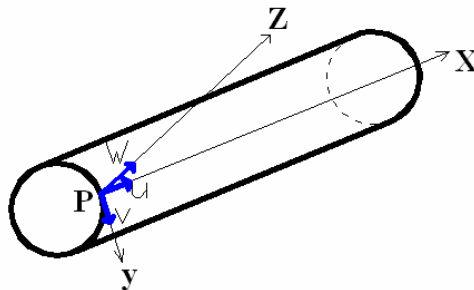


Fig.2: Schematizzazione del campo degli spostamenti.

⁹ Considerando quanto detto nel primo e secondo paragrafo del presente capitolo.

Nella precedente figura si mostra che, nell'ambito di questo modello, si considera *un sistema di riferimento locale*, con l'origine collocata sul generico punto P; gli assi coordinati di tale sistema di riferimento sono:

- x : direzione della direttrice;
- z : direzione perpendicolare al guscio;
- y : direzione perpendicolare al piano definito dalle direzioni x - z .

Il sistema di riferimento allora, non è sempre fisso nello spazio ma muta la sua orientazione punto per punto.

Tuttavia, poiché i gusci cilindrici sono superfici assial-simmetriche, lo spostamento “ v ” non soddisfa le condizioni di simmetria tranne quando è identicamente nullo; quindi da un campo di spostamenti $\{u\} = \{u, v, w\}^T$ si può passare ad un campo

$$\{u\} = \{u, w\}^T \quad (1)$$

Di conseguenza, il dominio in cui è definito il problema cinematico diventa monodimensionale; il comportamento del tubo lungo un meridiano cioè, è rappresentativo del comportamento su tutti i meridiani, e quindi del tubo nella sua interezza.

Concludendo, per descrivere il comportamento strutturale dell'oggetto tubo è sufficiente conoscere il comportamento lungo un suo meridiano; il dominio, cioè, può essere pensato come un insieme di aste rettilinee.

A questo punto, volendo condensare le grandezze cinematiche nella superficie media, si fa l'ipotesi che i segmenti materiali ortogonali all'asse x (e appartenenti alle aste rettilinee) si mantengano rettilinei durante la deformazione¹⁰, così come rappresentato in Fig.(3).

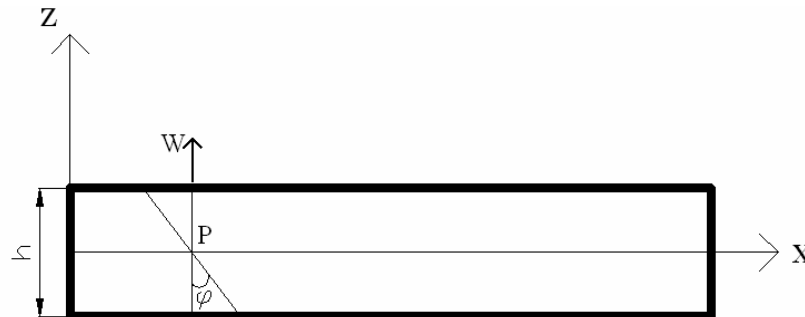


Fig.3: Segmenti rettilinei durante la deformazione.

Inoltre, si utilizzano le stesse regole di condensazione delle grandezze cinematiche, viste nel capitolo 10 relativo alle membrane.

Il segmento materiale passante per il punto P quindi, può subire i seguenti 2 *spostamenti generalizzati*, che descrivono compiutamente la cinematica del modello:

- rotazione φ (positiva in senso antiorario);
- spostamento verticale w .

¹⁰ Anche questa ipotesi deriva dall'aver considerato un piccolo spessore per il tubo.

Il vettore degli spostamenti (1) precedentemente definito allora, espresso in funzione degli spostamenti generalizzati, diventa:

$$u = \{u, w\}^T = \{-\varphi \cdot z, w\}^T \quad (2)$$

E' utile osservare che le precedenti relazioni sono da intendersi come funzioni di x (la w varia a rigore sullo spessore, ma dato che quest'ultimo è piccolo tale variazione può considerarsi piccola e può essere considerato il valor medio sullo spessore stesso, funzione solo dell'ascissa x).

Il secondo passo invece, nell'ambito dello studio del problema cinematico associato al modello, è la determinazione del *campo delle deformazioni* associate al campo degli spostamenti.

Per quanto riguarda le deformazioni puntuali all'interno del tubo, esse possono essere determinate mediante le Equazioni Implicite di Congruenza, valide per il continuo di Cauchy tridimensionale:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du}{dx} = -\varphi' \cdot z & \varepsilon_y &= \frac{dv}{dy} = 0 & \varepsilon_z &= \frac{dw}{dz} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0 & \gamma_{xz} &= \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = -\varphi + w' & \gamma_{yz} &= \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

A questo punto, si possono definire 3 parametri di deformazione generalizzati¹¹, prelevando – all'interno delle equazioni (3) – le grandezze cinematiche che non dipendono dallo spessore del tubo (dalla coordinata z). Essi sono

- $k_x = \varphi' =$ curvatura flessionale;
- $\gamma_x = w' - \varphi$; scorrimento angolare medio;
- $\varepsilon_\theta = w/R =$ deformazione della circonferenza di raggio R , causata dallo spostamento radiale w (analoga alla deformazione circonferenziale delle travi ad anello).

Con l'introduzione di questi parametri, si riscontra ancora una volta che il comportamento del tubo può essere studiato ipotizzando che per un suo punto passano due ordini di trave: una è la trave parallela alla generatrice (a cui corrispondono i primi due parametri deformativi) e una è la trave ad anello (a cui corrisponde il terzo parametro deformativo ε_θ).

Riportando in forma operatoriale, le equazioni implicite di congruenza, si ha:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\theta \\ k_x \\ \gamma_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & -1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (4)$$

¹¹ Che descrivono compiutamente la cinematica del modello, poiché - una volta noti - è possibile definire le deformazioni puntuali in qualunque punto del tubo.

Le Equazioni implicite di Congruenza mettono in evidenza che il problema cinematico è impossibile per vincoli interni.

L'operatore cinematico infatti, è rettangolare alto, dato che il numero delle equazioni è maggiore del numero delle incognite.

Ciò implica che se sono note a priori le deformazioni, le incognite del problema sono gli spostamenti, e il problema cinematico (inverso¹²) non ha, in genere, soluzione.

Affinché tuttavia, il problema cinematico ammetta soluzione, devono essere verificate le Equazioni di Compatibilità Cinematica (o Equazioni esplicite di congruenza):

$$\mathbf{S}^* \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad \text{su } V \quad (5)$$

dove \mathbf{S}^* è l'operatore di compatibilità cinematica, duale rispetto all'operatore di autotensione \mathbf{S} .

Infine, si osserva che il problema cinematico è differenziale del 2° ordine, nelle due variabili generalizzate w e φ .

Di conseguenza, per poter trovare la soluzione del problema cinematico, integrando le (4) e calcolando i valori delle costanti di integrazione, è necessario imporre 2 *condizioni al contorno cinematiche* sulla superficie vincolata S_u , una per w e una per φ :

$$\begin{aligned} w &= \bar{w} \\ \varphi &= \bar{\varphi} \end{aligned} \quad (6)$$

2.2. Problema statico

In questa sezione, si analizza il problema statico dei gusci cilindrici.

Analogamente a quanto visto per i modelli precedenti, tale problema è caratterizzato ed è volto alla determinazione dalle Equazioni Indefinite¹³ di Equilibrio, che costituiscono un legame tra gli sforzi (generalizzati o puntuali) e i carichi agenti.

Per dedurre le condizioni di equilibrio, si utilizza il seguente postulato: condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo deformabile è che valgano le equazioni cardinali della statica per ogni porzione di volume del corpo.

Inoltre, come da prassi, si isola un concio infinitesimo appartenente alla membrana, e si analizzano gli sforzi applicati ai bordi di quest'ultimo (che vengono scambiati con la restante parte di struttura), deducendoli mediante considerazioni geometrico – meccaniche.

Si utilizza infine, un *approccio semplificato* (come già visto nel caso delle membrane), nell'ambito del quale **si individuano a priori le grandezze statiche generalizzate, verificando poi a posteriori la dualità tra il problema statico e cinematico e tra i corrispondenti operatori.**

Nell'ambito di tale approccio, si scelgono a priori le seguenti grandezze come tensioni generalizzate (Fig. 4):

¹² Dato che il problema cinematico diretto ammette sempre soluzione (noti gli spostamenti, è possibile sempre trovare il campo delle deformazioni).

¹³ Poiché riferite ad un elemento di volume del corpo di dimensioni infinitesime.

$$\sigma = \{N_\theta \quad M_x \quad T_x\}^T \quad (7)$$

Il problema statico perciò, viene analizzato isolando idealmente un concio infinitesimo di guscio nell'intorno di un generico punto P. Le possibili forze allora, **comprese le grandezze statiche generalizzate individuate a priori sull'areola di tubo**¹⁴, a cui il concio può essere sottoposto (nelle condizioni di assial simmetria) sono rappresentate nella seguente Fig.(4).

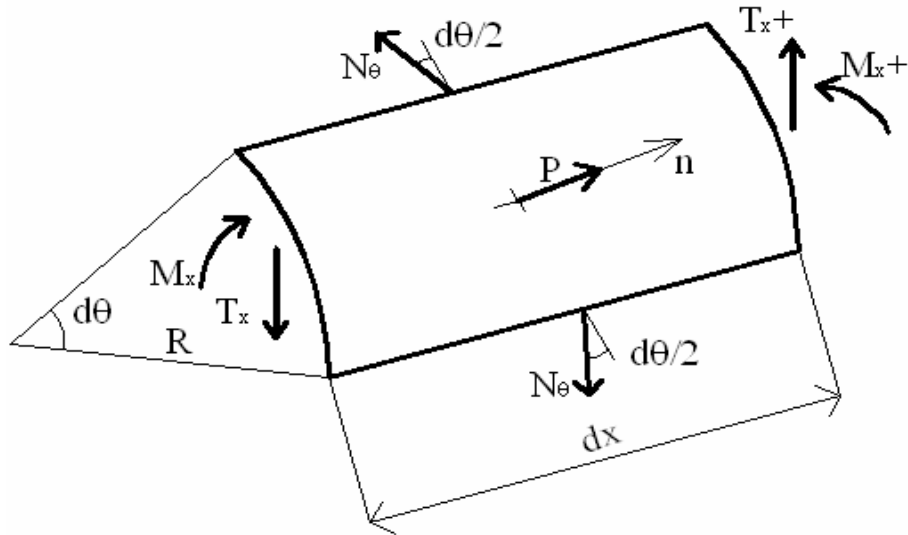


Fig.4 : Forze agenti sul concio infinitesimo di tubo.

Nella rappresentazione grafica si possono individuare le seguenti grandezze:

- R = distanza della generatrice dal centro di rotazione (costante).
- $d\theta$ = angolo individuato dall'estensione del concetto infinitesimo.
- dx = estensione del concetto infinitesimo nella direzione della generatrice.
- P = carico esterno agente in direzione radiale n .
- T_x = tensione tagliante generata dagli sforzi τ_{xz} (vedi Fig.(5)).
- N_θ = tensione estensionale circonferenziale generata dagli sforzi σ_θ (vedi Fig.(5)).
- M_x = momento flettente generato dalle tensioni σ_x (vedi Fig.(5)).

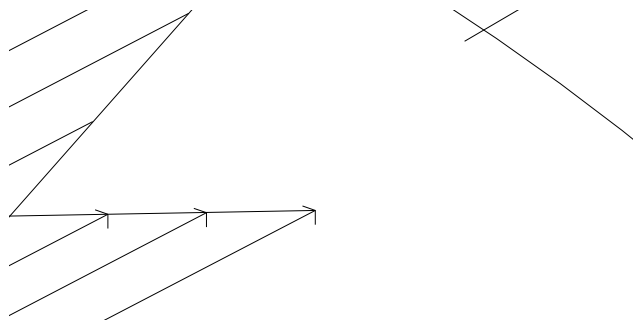


Fig.5: Distribuzione delle tensioni puntuali sulla sezione del tubo.

¹⁴ Ed intese, come già ribadito precedentemente, come le risultanti delle tensioni puntuali agenti sul concio infinitesimo (di tubo) sullo spessore s .

A questo punto è possibile scrivere le equazioni indefinite di equilibrio¹⁵ (lungo le direzioni suggerite dalle componenti generalizzate del campo di spostamenti)¹⁶:

1. *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione della normale n* (Fig. 4)

$$\begin{aligned} \sum F_n = 0 \rightarrow P \cdot R \cdot d\vartheta \cdot dx - T_x \cdot R \cdot d\vartheta + (T_x \cdot R \cdot d\vartheta + \frac{d}{dx}(T_x)dx \cdot R \cdot d\vartheta) - 2N_g \cdot dx \cdot \frac{d\vartheta}{2} = 0 \rightarrow \\ \rightarrow T_x' \cdot R - N_g + P \cdot R = 0 \rightarrow T_x' - \frac{N_g}{R} + P = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

2. *Equilibrio alla rotazione intorno ad un asse perpendicolare alla generatrice passante per il punto di applicazione del carico esterno P , e tangente al tubo*

$$\begin{aligned} -M_x \cdot R \cdot d\vartheta + \left(M_x \cdot R \cdot d\vartheta + \frac{d}{dx}(M_x)dx \cdot R \cdot d\vartheta \right) + T_x \cdot R \cdot d\vartheta \cdot \left(\frac{dx}{2} \right) + \\ + \left(T_x \cdot R \cdot d\vartheta + \frac{d}{dx}(T_x)dx \cdot R \cdot d\vartheta \right) \cdot \frac{dx}{2} = 0 \rightarrow M_x' \cdot R + T_x \cdot R = 0 \rightarrow \\ \rightarrow M_x' + T_x = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Se fosse presente una coppia risultante m sull'areola (agente nello stesso piano in cui agiscono M_x e M_x'), avremmo ottenuto l'equazione in forma canonica:

$$\rightarrow -M_x' - T_x = m$$

Esprimendo ora, il problema statico descritto dalle due equazioni indefinite di equilibrio (8) e (9), nella forma operatoriale $[D^*]\{\sigma\} = \{P\}$, si ottiene

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 & -\frac{d}{dx} \\ 0 & -\frac{d}{dx} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_g \\ M_x \\ T_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

E' verificata, allora, la dualità del problema statico e cinematico, e la dualità delle grandezze statiche e cinematiche. Le grandezze statiche generalizzate (7) scelte precedentemente quindi, sono effettivamente le duali di quelle cinematiche generalizzate: ciò implica la validità, nell'ambito del modello di tubo, del Teorema dei Lavori Virtuali.

¹⁵ Ne sono soltanto 2. Le altre 4 equazioni indefinite di equilibrio, sono identicamente soddisfatte.

¹⁶ Si tenga presente che nell'effettuazione dell'equilibrio del concio, si utilizza un *sistema di riferimento locale centrato nel baricentro geometrico della superficie media del concio di tubo*. In questo stesso punto agiscono le risultanti (sull'areola di tubo) dei carichi esterni.

Di conseguenza, dato che la matrice $[D^*]$ è effettivamente l'aggiunta della matrice $[D]$ ricavata nel problema cinematico (4), è lecito procedere con la risoluzione del problema elastico associato al modello in esame.

A causa della dualità tra problema statico e cinematica comunque, si osserva che il problema statico è indeterminato per vincoli interni¹⁷.

L'operatore statico infatti, è rettangolare basso, dato che il numero delle equazioni è minore del numero delle incognite.

Ciò implica che se è noto a priori il vettore $\{P\}$, le incognite del problema sono le tensioni generalizzate, e il problema statico (diretto¹⁸) ha ∞^1 soluzioni, poiché indeterminato di grado 1¹⁹: Gli stati di tensione equilibrati con date forze esterne $\{P\}$ sono pertanto infiniti.

Questa proprietà è indipendente dalle condizioni al contorno sulla superficie vincolata S_u , che possono solo aumentare l'indeterminatezza del problema.

Una volta noto il vettore $\{P\}$ perciò, non si possono determinare univocamente le tensioni generalizzate riportate in (7), mediante integrazione delle Equazioni Indefinite di Equilibrio (10), poiché rimarrebbe indeterminata una delle tre grandezze statiche generalizzate (7).

Infine, si osserva che il problema statico è differenziale del 2° ordine, nelle due variabili generalizzate M_x e T_x .

Di conseguenza, per poter trovare la soluzione del problema statico, integrando le (10) e calcolando i valori delle costanti di integrazione, è necessario imporre 2 condizioni al contorno meccaniche sulla superficie libera S_l , una per M_x e una per T_x :

$$\begin{aligned} M_x &= \pm \mu \\ T_x &= \pm f_y \end{aligned} \quad (11)$$

OSS:

Pur volendo assegnare una condizione al contorno su N_g , si osserva subito che tale condizione non può essere assegnata sulla superficie libera dell'oggetto strutturale, poiché violerebbe l'assialsimmetria.

2.3. Legame costitutivo

Nel presente paragrafo, si determina il legame costitutivo elastico $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$ tra le grandezze statiche e cinematiche generalizzate.

Dato che, a livello infinitesimo, un concio di tubo è assimilabile ad un concio di piastra piana, il legame costitutivo del modello di tubo può essere supposto identico a quello vigente per il modello di piastra piana.

¹⁷ Ciò è coerente con il fatto che il problema di piastra curva o di guscio (problema bidimensionale curvo), può essere considerato l'estensione del problema di piastra piana (problema bidimensionale piano), anch'essa indeterminata staticamente per vincoli interni.

¹⁸ Dato che il problema statico inverso ammette sempre soluzione (noto il campo di tensione generalizzato, è possibile sempre trovare le forze attive con esso equilibrate).

¹⁹ Come appare dal bilancio delle 2 equazioni di equilibrio nelle 3 incognite.

Il legame costitutivo quindi, viene estrapolato dai modelli bidimensionali precedenti, e nasce da una osservazione dei due ordini di trave presenti nel tubo.

Considerando una striscia di *trave rettilinea* del tubo con area pari a $A = h \cdot 1$ (dove h è lo spessore del tubo), in forma diretta²⁰ vale un legame di questo tipo:

$$\begin{Bmatrix} N_\theta \\ M_x \\ T_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Eh & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6}Gh \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\theta \\ k_x \\ \gamma_x \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Inoltre, a causa dell'effetto Poisson si genera la deformazione $\varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{1}{Eh} \cdot N_\theta$.

Analogamente a quanto visto nelle piastre piane, il coefficiente $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ viene definito *rigidezza flessionale delle travi rettilinee del tubo*. Se si considerasse infatti, una trave rettilinea isolata di area pari a $A = h \cdot 1$, la rigidezza flessionale varrebbe $\frac{Eh^3}{12}$.

Si fa presente allora, che il coefficiente $(1-\nu^2)$ è una correzione della rigidezza flessionale, che tiene conto della impedita contrazione laterale delle travi rettilinee del modello di tubo (e di piastra piana), a causa dell'effetto Poisson.

3. Indeformabilità a taglio

Se si procede alla determinazione della soluzione del problema elastico associato al modello di tubo, si nota che le equazioni risolventi che si ottengono sono molto complesse, ed è difficile determinare in forma analitica la soluzione stessa.

Il problema elastico in esame tuttavia, si semplifica, se si introduce l'ipotesi di indeformabilità a taglio per le travi rettilinee del modello di tubo.

Se un tubo è indeformabile a taglio infatti, vale la seguente relazione (scorrimento angolare medio nullo)

$$\gamma_x = 0 \quad (13)$$

(v. par. 2.1), da cui deriva

$$w' = \varphi. \quad (14)$$

OSS:

²⁰ Il legame in forma inversa si ottiene invertendo la matrice riportata in (12).

Considerando la trave rettilinea del tubo indeformabile a taglio, le sezioni di tale trave – passando dalla configurazione indeformata a quella deformata – ruotano mantenendosi piane e ortogonali all'asse della trave rettilinea stessa.

Anche in presenza delle azioni taglianti T_x , cioè, si suppone che a deformazione avvenuta una sezione inizialmente ortogonale all'asse della trave rettilinea si trasforma in una sezione piana, ortogonale all'asse deformato, conservando la propria forma.

Di conseguenza, mediante l'indeformabilità a taglio si inserisce all'interno della trave un vincolo cinematico interno, che mantiene le sezioni della trave rettilinea perpendicolari all'asse longitudinale, anche nella configurazione deformata.

Questo implica che la deformazione generalizzata $\gamma_x=0$ viene eliminata dal problema cinematica, come anche la rotazione φ (parametro di spostamento generalizzato), che può essere determinata per derivazione di w mediante la (14). La rotazione φ , cioè, non è più un parametro di spostamento generalizzato indipendente.

Le equazioni implicite di congruenza (3) diventano:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ k_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R \\ d^2/dx^2 \end{bmatrix} \cdot \{w\} \quad (15)$$

Di conseguenza, le incognite si riducono da 2 a 1, mentre le equazioni del problema cinematica si riducono da 3 a 2.

Il problema cinematico tuttavia, rimane differenziale del 2° ordine, nell'unica variabile generalizzata w .

Di conseguenza, per poter trovare la soluzione del problema cinematico, integrando le (15) e calcolando i valori delle costanti di integrazione, è necessario imporre 2 *condizioni al contorno cinematiche* sulla superficie vincolata S_u , una per w e una per $w' = \varphi$:

$$\begin{aligned} w &= \bar{w} \\ \varphi = w' &= \bar{w}' \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il problema statico invece, si osserva che imporre $\gamma_x=0$ non implica che il taglio T_x è nullo all'interno del tubo. A causa del vincolo cinematico interno infatti, il taglio è divenuto una grandezza reattiva, che non può essere determinata mediante le equazioni del legame costitutivo (poiché per ipotesi vale $\gamma_x=0$, avendo posto la rigidità tagliente $G = \infty$).

Questo implica che il taglio T_x può essere ricavato soltanto dalle equazioni indefinite di equilibrio; condensando, allora, il taglio T_x all'interno di queste ultime, si ottiene una *unica equazione indefinita di equilibrio condensata*, del tipo

$$\begin{cases} \frac{N_g}{R} - T_x' = P \\ M_x' + T_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_x' = \frac{N_g}{R} - P \\ M_x'' + T_x' = 0 \end{cases} \Rightarrow M_x'' + \frac{N_g}{R} = P \quad (16)$$

Quest'ultima equazione, afferma in sostanza che il carico P è *portato da due contributi*:

- M_x'' = Portanza flessionale;

- $\frac{N_g}{R}$ = Portanza funicolare (sempre presente negli elementi curvi).

Riportando la (16) nella forma operatoriale $[D^*]\{\sigma\} = \{P\}$ si ha:

$$\left[\frac{1}{R} \quad \frac{d^2}{dx^2} \right] \cdot \begin{Bmatrix} N_g \\ M_x \end{Bmatrix} = \{P\} \quad (17)$$

E' verificata ancora una volta allora, la dualità del problema statico e cinematico, e la dualità delle grandezze statiche e cinematiche; la matrice $[D^*]$ poi, è effettivamente l'aggiunta della matrice $[D]$ dell'equazione (15).

Una volta risolto il problema statico quindi, il taglio T_x si può ricavare dalle equazioni (16) nel seguente modo:

$$T_x' = -P + \frac{N_g}{R} = -M_x'' - \frac{N_g}{R} + \frac{N_g}{R} = -M_x'' \Rightarrow T_x = -M_x' \quad (18)$$

Il legame costitutivo elastico $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$ infine, tra le grandezze statiche e cinematiche generalizzate, è del tipo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_g &= \frac{1}{Eh} \cdot N_g \\ k_x &= \frac{1}{D} M_x \end{aligned} \quad (19)$$

avendo trascurato l'effetto Poisson, ed avendo eliminato dal novero le grandezze T_x e γ_x per i motivi sopra esposti.

4. Soluzione

La soluzione del problema elastico associato al modello di tubo indeformabile a taglio, può essere ricavata – come per tutti i problemi elastici – con il metodo degli spostamenti e con il metodo delle forze.

Nel seguente capitolo tuttavia, si utilizza la strategia di risoluzione del Metodo degli Spostamenti. Secondo tale metodo, le Equazioni Risolutive del Problema elastico sono le Equazioni di Equilibrio espresse in termini di spostamento.

In sintesi, nello spirito del metodo degli spostamenti, fra tutte le configurazioni cinematicamente ammissibili si ricerca l'unica che è anche equilibrata.

Utilizzando la procedura diretta di tale metodo, una volta assegnati gli spostamenti ed attraverso le equazioni implicite di congruenza si calcolano le deformazioni:

$$\varepsilon = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (20)$$

Inserendo tali deformazioni all'interno del legame costitutivo, si determinano le tensioni associate ai dati spostamenti:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \Rightarrow \begin{cases} N_g = Eh \cdot \varepsilon_g = Eh \cdot \frac{w}{R} \\ M_x = D \cdot K_x = D \cdot w'' \end{cases} \quad (21)$$

Imponendo infine, che le tensioni – funzione degli spostamenti – siano equilibrate con le forze attive (inserendo le relazioni (21) nell'equazione di equilibrio condensata (16)), si ottiene:

$$\frac{N_g}{R} + M_x'' = P \rightarrow \frac{Eh}{R^2} w + Dw^{IV} = P \rightarrow Dw^{IV} + \frac{Eh}{R^2} w = P \quad (22)$$

Quest'ultima è l'equazione risolutiva del problema elastico dei gusci cilindrici.

Ponendo $4\beta^4 = \frac{Eh}{R^2 D}$, è possibile fare delle considerazioni su tale equazione, che diventa:

$$w^{IV} + 4\beta^4 w = \frac{P}{D} \quad (23)$$

Questa equazione coincide esattamente (a livello formale) con l'equazione risolvente la trave su suolo elastico.

L'unica differenza tuttavia, è che questa volta il termine $4\beta^4$ contiene la rigidezza radiale delle travi ad anello (del tubo), e non la rigidezza del suolo elastico.

Il termine $4\beta^4$ inoltre, analogamente a quanto avveniva nelle travi su suolo elastico²¹, fornisce informazioni sulla rigidezza relativa tra le travi ad anello e le travi rettilinee del tubo.

In pratica, l'equazione (23) esprime il fatto che l'ordine di travi circonferenziale esercita una azione di *confinamento* sulle travi rettilinee longitudinali.

A livello matematico, la (23) si presenta nella forma di equazione differenziale del quarto ordine e la sua soluzione, analogamente a quanto visto per le travi su suolo elastico, è del tipo:

$$w = w_o + w_p \quad (24)$$

dove w_p è la soluzione particolare che, nel caso in cui il carico P assume la forma di un polinomio algebrico di grado ≤ 4 , vale $P/4\beta^4 D$. w_o invece, è la soluzione del problema omogeneo associato (in cui il termine noto è = 0) e vale:

$$w_o = e^{-\beta x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x) \quad (25)$$

dove C_1, C_2, C_3 e C_4 sono le costanti di integrazione, ricavabili imponendo delle opportune condizioni al contorno. Anche in questo caso, è possibile definire una *lunghezza caratteristica del tubo*:

$$\beta \lambda = 2\pi \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (26)$$

²¹ In cui forniva informazioni sulla rigidezza relativa tra terreno e trave.

Infatti, la (25) è una soluzione periodica (poiché somma di funzioni di tipo periodico), che riassume lo stesso valore numerico dopo aver compiuto un periodo spaziale; la lunghezza di questo periodo spaziale è proprio λ .

A seconda della lunghezza totale del tubo L allora, un tubo può essere classificato in due modi:

1. $\lambda \gg L$: tubo corto
2. $\lambda \ll L$: tubo lungo

Nella pratica, si ha quasi sempre a che fare con tubi lunghi; per questi ultimi si osserva che, a causa dell'alto smorzamento (dovuto all'elevato valore della costante β), applicando una azione ad un estremo del tubo, gli effetti di tale azione sono trascurabili in corrispondenza dell'altro estremo dell'elemento strutturale; tali effetti, cioè, subiscono un abbattimento veloce lungo la lunghezza del tubo.

E' solito affermare allora, in maniera più speditiva, che in un tubo lungo ciò che accade meccanicamente ad un estremo non influenza ciò che accade meccanicamente all'altro estremo;

Scelto, quindi, un sistema di riferimento per una qualsiasi trave rettilinea del tubo, nelle vicinanze dell'estremo in cui è posta l'origine del sistema di riferimento la soluzione generale è influenzata soprattutto dal termine con l'esponente negativo della (25), mentre all'altro estremo la soluzione generale è influenzata soprattutto dal termine con l'esponente positivo.

5. Coefficienti di bordo del tubo

Nell'ambito dei modelli strutturali definiti per la trave ad anello, per le lastre piane e per le piastre piane, sono stati determinati i *coefficienti di bordo di rigidità e di flessibilità*, nonché le matrici dei coefficienti di bordo; in sintesi, in tutti i casi sopra riportati sono stati determinati dei legami *diretti* di questo tipo:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} w_H & w_m \\ \varphi_H & \varphi_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ m \end{Bmatrix} \quad (27)$$

e dei legami inversi di questo tipo:

$$\begin{Bmatrix} H \\ m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_w & H_\varphi \\ m_w & m_\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (28)$$

dove H ed m sono rispettivamente la distribuzione delle forze e delle coppie ai bordi degli elementi strutturali, mentre w e φ sono rispettivamente lo spostamento radiale e la rotazione ai bordi.

La matrice del legame (27) è definita *matrice dei coefficienti di bordo di flessibilità* mentre quella del legame (28) è definita *matrice dei coefficienti di bordo di rigidità*.

Tale denominazione degli operatori è legata al fatto che in (27) i coefficienti di bordo rappresentano gli spostamenti e le rotazioni che si osservano al bordo dell'elemento strutturale a causa dell'applicazione di distribuzioni unitarie di forze H e coppie m ; analogamente, in (28) i coefficienti di bordo rappresentano le

distribuzioni di forze H e coppie m che generano degli spostamenti e delle rotazioni unitarie ai bordi.

I coefficienti di bordo allora, rappresentano e costituiscono il legame esistente al bordo dell'elemento strutturale in esame, tra le grandezze statiche e cinematiche generalizzate (anch'esse di bordo).

Si osserva altresì, che le due matrici in (27) e (28) sono simmetriche a causa del legame costitutivo usato, di tipo elastico lineare isotropo.

Determinazione dei coefficienti di bordo di flessibilità e di rigidezza per il modello di Tubo

A livello operativo e per il modello di tubo (come anche per i modelli strutturali visti nelle sezioni precedenti), la determinazione dei *coefficienti di bordo di flessibilità* deve essere effettuata prendendo in considerazione un oggetto strutturale di tipo *labile*²² (non vincolato ai bordi), in corrispondenza dei quali si applicano rispettivamente delle distribuzioni costanti di forze H e di coppie m : a questo punto possono essere valutati gli spostamenti w e le rotazioni di bordo φ , che rappresentano gli *effetti cinematici* delle forze attive in corrispondenza del bordo dell'oggetto in esame.

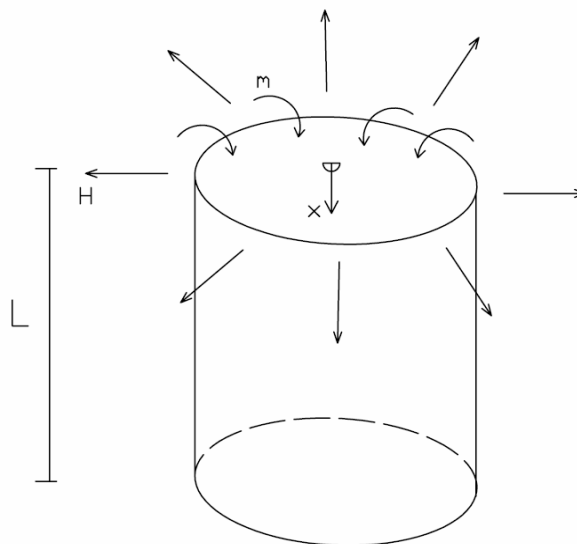


Fig. 6 : Sistema su cui si valutano i coefficienti di bordo

Ipotizzando di analizzare un *tubo lungo* (come generalmente accade nella realtà), e sapendo che le distribuzioni costanti di forze H e di coppie m (applicate ad una sola estremità²³) costituiscono delle azioni esterne *autoequilibrate*, si determinano i coefficienti di bordo di flessibilità studiando separatamente questi due problemi:

²² La labilità dell'elemento strutturale è riferita ai gradi di libertà w e φ , nel senso che gli eventuali vincoli presenti ai bordi non devono bloccare i gradi di libertà w e φ .

²³ Il tubo è – per ipotesi – lungo. Ciò implica che le azioni esterne per la valutazione dei coefficienti di bordo possono essere applicate ad un solo estremo dell'elemento strutturale, dato che *ciò che accade meccanicamente ad un estremo del tubo non influenza ciò che accade meccanicamente all'altro estremo*.

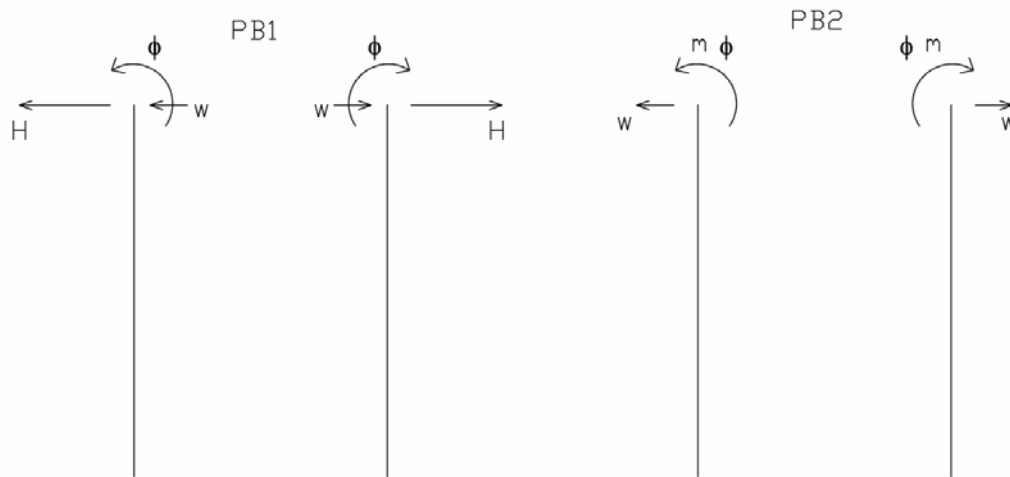


Fig 7 : PB 1 e PB 2

Nel primo problema (PB1) si assegna al bordo superiore del tubo la sola distribuzione di forze H , e si determinano i suoi effetti cinematici in termini di w e φ . Nel secondo (PB2) si assegna al bordo superiore del tubo la sola distribuzione di coppie m , e si determinano i suoi effetti cinematici in termini di w e φ .

Considerando allora, il PB1, si assegnano 4 condizioni al contorno meccaniche²⁴ (2 per ogni bordo del tubo). Al bordo superiore (in cui l'ascissa $x = 0$) si ha:

$$\begin{aligned} M_x(0) &= D w''(0) = 0 \\ T_x(0) - H &= 0 \Rightarrow T_x(0) = H \end{aligned}$$

mentre al bordo inferiore (in cui l'ascissa $x = L$, dove L è la lunghezza del tubo) si ha:

$$\begin{aligned} M_x(L) &= 0 \\ T_x(L) &= 0 \end{aligned}$$

Mediante queste 4 condizioni al contorno meccaniche, è possibile determinare le 4 costanti di integrazione contenute nella soluzione generale del problema elastico (vedi (24) e (25)).

In questo modo, si ottengono proprio i coefficienti di bordo della 1° colonna della matrice dei coefficienti di bordo di flessibilità (w_H e φ_H), che valgono

$$\begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\alpha}{\beta} & - \\ 2 \frac{\alpha^2}{\beta} & - \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ m \end{Bmatrix}$$

dove

²⁴ Dato che i bordi del tubo non sono vincolati (si considera un sistema labile), i bordi costituiscono la superficie libera dell'oggetto, su cui vanno imposte le 4 condizioni al contorno.

$$\beta = \frac{Eh}{R^2} \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4D}}$$

Tali coefficienti rappresentano, come detto in precedenza, il legame tra la distribuzione radiale di forze H , e gli spostamenti w e φ in corrispondenza del bordo caricato del tubo.

Considerando invece, il PB2, si assegnano sempre 4 condizioni al contorno meccaniche (2 per ogni bordo del tubo). Al bordo superiore (in cui l'ascissa $x = 0$) si ha:

$$\begin{aligned} M_x(0) - m &= 0 \\ T_x(0) &= 0 \end{aligned}$$

mentre al bordo inferiore (in cui l'ascissa $x = L$, dove L è la lunghezza del tubo) si ha:

$$\begin{aligned} M_x(L) &= 0 \\ T_x(L) &= 0 \end{aligned}$$

Mediante queste 4 condizioni al contorno meccaniche, è possibile determinare le 4 costanti di integrazione contenute nella soluzione generale del problema elastico (vedi (24) e (25)).

In questo modo, si ottengono proprio i coefficienti di bordo della 2° colonna della matrice dei coefficienti di bordo di flessibilità (w_m e φ_m), che valgono

$$\begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 2\frac{\alpha^2}{\beta} \\ - & 2\frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ m \end{Bmatrix}$$

Tali coefficienti rappresentano, come detto in precedenza, il legame tra la distribuzione radiale di coppie m , e gli spostamenti w e φ in corrispondenza del bordo caricato del tubo.

Quanto sopra esposto dimostra che gli effetti di H ed m non sono più disaccoppiati (le matrici in (27) e (28) sono piene), come accadeva per i modelli precedentemente analizzati; applicando una distribuzione radiale di forze H cioè, al bordo caricato del tubo si ottiene sia uno spostamento radiale w che una rotazione φ . Lo stesso si può affermare applicando al tubo una distribuzione radiale di coppie m .

Il legame (27) allora, che definisce i coefficienti di bordo di flessibilità, è il seguente:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\frac{\alpha}{\beta} & 2\frac{\alpha^2}{\beta} \\ 2\frac{\alpha^2}{\beta} & 4\frac{\alpha^3}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ m \end{Bmatrix}$$

Per definire infine, il legame (28), che contiene al suo interno la matrice dei coefficienti di bordo di rigidezza, è sufficiente invertire la matrice dei coefficienti di bordo di flessibilità, ottenendo:

$$\begin{Bmatrix} H \\ m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha} & -\frac{\beta}{2\alpha^2} \\ -\frac{\beta}{2\alpha^2} & \frac{\beta}{2\alpha^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix}$$