

Capitolo 9

La piastra di forma qualsiasi

1. Generalità

Il modello di piastra, così come il modello di lastra, è un oggetto strutturale in cui due dimensioni predominano sulla terza (spessore).

Al contrario della lastra, che è caricata solamente nel proprio piano, la piastra è soggetta a forze ortogonali, le quali potrebbero essere anche inclinate rispetto al piano, ma in ogni caso si possono scomporre in una forza nel piano, studiata con il modello di lastra, e in una ortogonale studiata con il modello di piastra.

A rigore questo oggetto strutturale è tridimensionale, per cui le tre componenti di spostamento sono funzioni delle tre variabili spaziali, ma sotto opportune ipotesi si vedrà che la piastra può essere studiata come un oggetto bidimensionale.

2. Problema cinematico

L'oggetto strutturale in esame, come già detto in precedenza, è tridimensionale ovvero le componenti di spostamento a rigore dipendono dalle tre variabili spaziali x, y, z . Per cui il campo di spostamento sarebbe dato dalla seguente espressione:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{cases}$$

Al fine di semplificare il modello si introducono delle ipotesi cinematiche tra cui quella fondamentale utilizzata per le travi rettilinee e cioè che nella generica

configurazione deformata, il segmento materiale, inizialmente retto e verticale, in virtù dello stato deformativo e tensionale, ruota rimanendo rettilineo .

Prendendo in considerazione un concetto infinitesimo di piastra e un sistema di riferimento che corre lungo il piano medio, il segmento materiale nella configurazione indeformata è ortogonale al piano medio (fig.1).

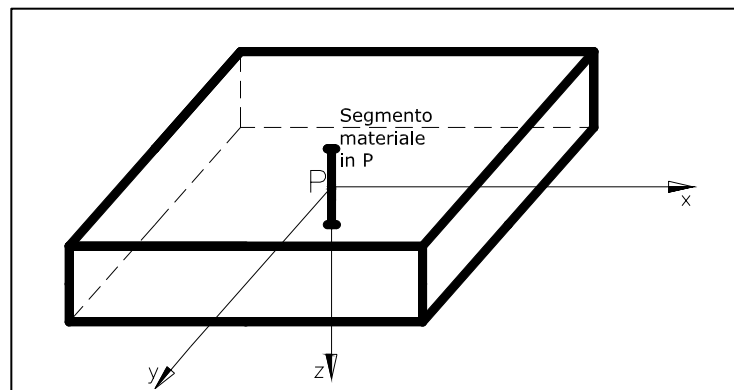


Fig. 1: Segmento materiale nella configurazione indeformata

Estraendo il segmento materiale, vengono analizzati i possibili spostamenti del generico punto P posizionato nel piano medio della piastra (fig.2).

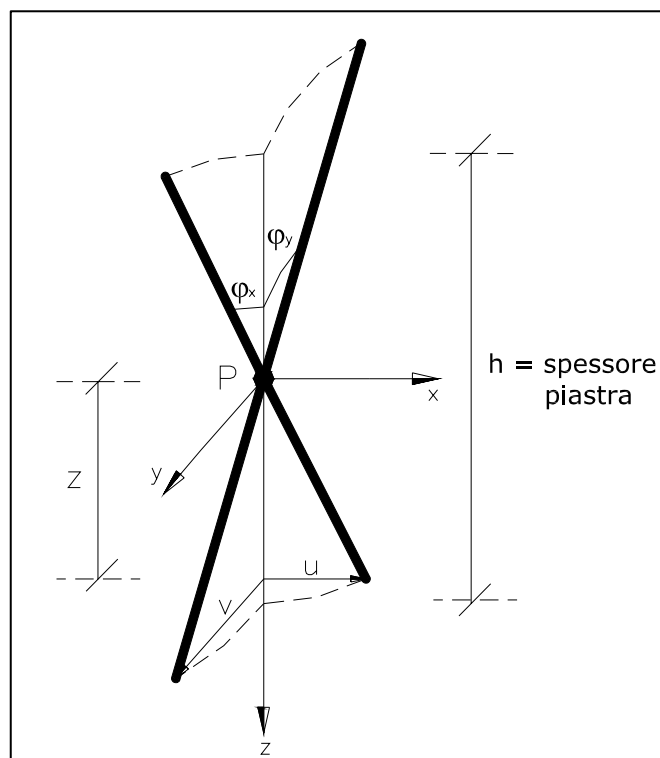


Fig.2: Spostamenti del generico punto P

I possibili spostamenti sono:

1. *rotazione φ_x intorno all'asse delle y che provoca uno spostamento in direzione x pari a u di un generico punto posto a quota z ;*
2. *rotazione φ_y intorno all'asse delle x che provoca uno spostamento in direzione y pari a v di un generico punto posto a quota z .*

Per descrivere lo spostamento verticale del generico punto P, si introduce una variabile puntuale funzione solo delle variabili spaziali x e y poichè, essendo piccolo lo spessore, si ipotizza che le differenze degli spostamenti verticali tra i punti collocati sul piano medio e quelli al di fuori, siano uguali.

In base alle ipotesi fatte il campo degli spostamenti è il seguente:

$$u = \varphi_x(x, y) \cdot z$$

$$v = \varphi_y(x, y) \cdot z$$

$$w = \omega(x, y)$$

Le deformazioni di Cauchy puntuali sono le seguenti:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_{x,x} \cdot z$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi_{y,y} \cdot z$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = (\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x}) \cdot z$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = (\varphi_x + w_{,x})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = (\varphi_y + w_{,y})$$

Da queste espressioni vengono estratti i termini che dipendono dalle variabili spaziali x e y , poiché l'obiettivo principale è quello di passare da un modello

tridimensionale, ad un nuovo modello in cui tutte le grandezze cinematiche siano definite su un dominio bidimensionale che corre lungo il piano medio.

Viene quindi definito un vettore di deformazione generalizzato dei punti collocati nel piano medio.

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{x,x} \\ \varphi_{y,y} \\ \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} \\ \varphi_x + w_{,x} \\ \varphi_y + w_{,y} \end{Bmatrix}$$

Per cui:

$$\varepsilon_x = \kappa_x \cdot z$$

$$\varepsilon_y = \kappa_y \cdot z$$

$$\varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = \kappa_{xy} \cdot z$$

$$\gamma_{xz} = \varphi_x + w_{,x}$$

$$\gamma_{yz} = \varphi_y + w_{,y}$$

rappresentano le deformazioni tridimensionali di Cauchy, che descrivono le deformazioni in tutti i generici punti sullo spessore della piastra.

Un'osservazione va fatta sul fatto che $\varepsilon_z = 0$ (deformazione nulla sulla faccia di normale z), non implica una $\sigma_z = 0$ (tensione nulla sulla faccia di normale z), ma di fatto nel modello si considera nulla in quanto non influisce sul comportamento che la piastra ha sul piano medio.

Nella fig.3, viene rappresentato l'andamento delle deformazioni di Cauchy, e allo stesso tempo le rispettive tensioni correlate attraverso il legame costitutivo.

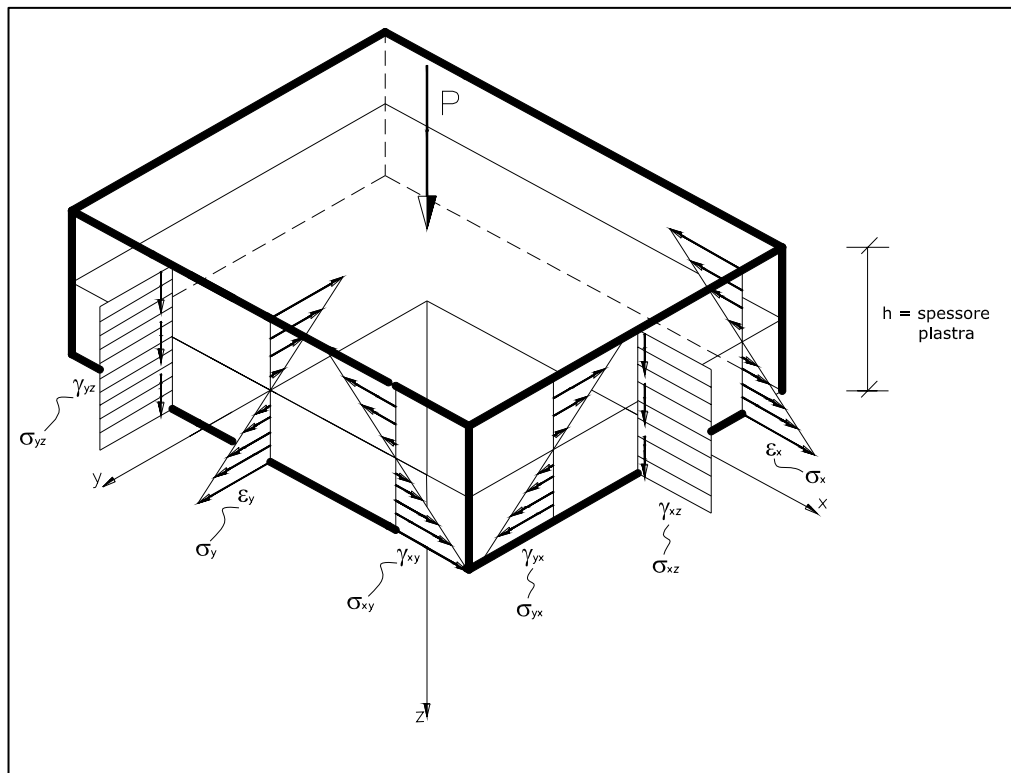


Fig. 3: Andamento delle deformazioni di Cauchy

Si definiscono:

κ_x = *curvatura flessionale degli ordini di travi in direzione x;*

κ_y = *curvatura flessionale degli ordini di trave in direzione y;*

κ_{xy} = *curvatura torsionale degli ordini di trave in direzione x e y.*

La piastra è costituita da due ordini di travi:

1. una lungo la direzione x che subisce **curvatura flessionale** κ_x e ruota attorno all'asse y;
2. una lungo la direzione y che subisce **curvatura flessionale** κ_y e ruota attorno all'asse x.

In forma operatoriale il problema cinematico diventa:

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \omega \end{Bmatrix}$$

Dal quale si nota che l'operatore cinematico della piastra è rettangolare alto, quindi impossibile visto che vi sono cinque equazione a fronte di tre incognite.

Al problema cinematico vanno associate le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \overline{\varphi_x} \\ \varphi_y &= \overline{\varphi_y} \\ \omega &= \overline{\omega} \end{aligned}$$

3. Problema statico

Per studiare il problema statico associato al modello di piastra bisogna introdurre le grandezze statiche generalizzate che sono le duali di quelle deformative generalizzate.

Si definiscono grandezze statiche generalizzate la risultante delle tensioni sullo spessore della piastra e definite nel modo seguente:

$$T_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz$$

$$T_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz$$

Sulla base di queste tensioni generalizzate, vengono scritte le equazioni di equilibrio sul piano medio. Nelle fig. 4 e 5, vengono riportate le forze agenti su un concetto infinitesimo di piastra separando i tagli dai momenti in modo tale da evitare confusioni.

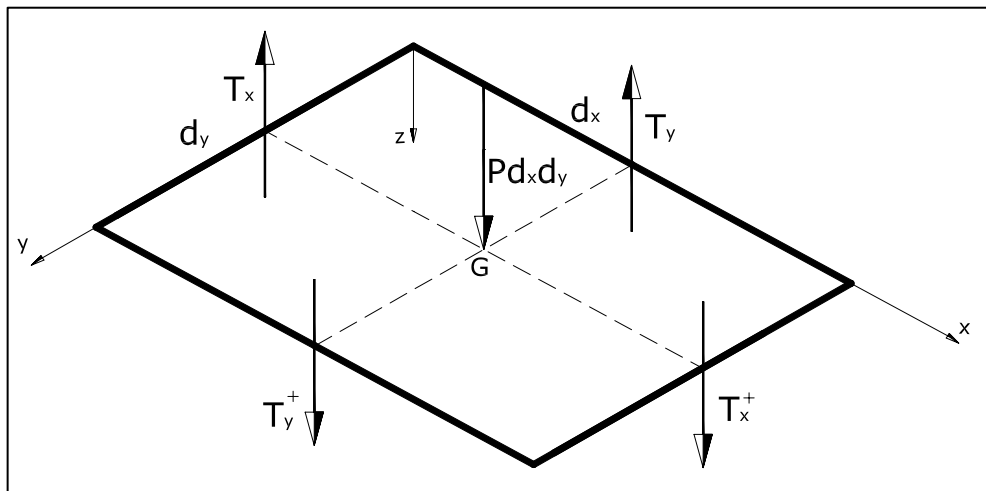


Fig. 4: Forze taglienti agenti sulla piastra.

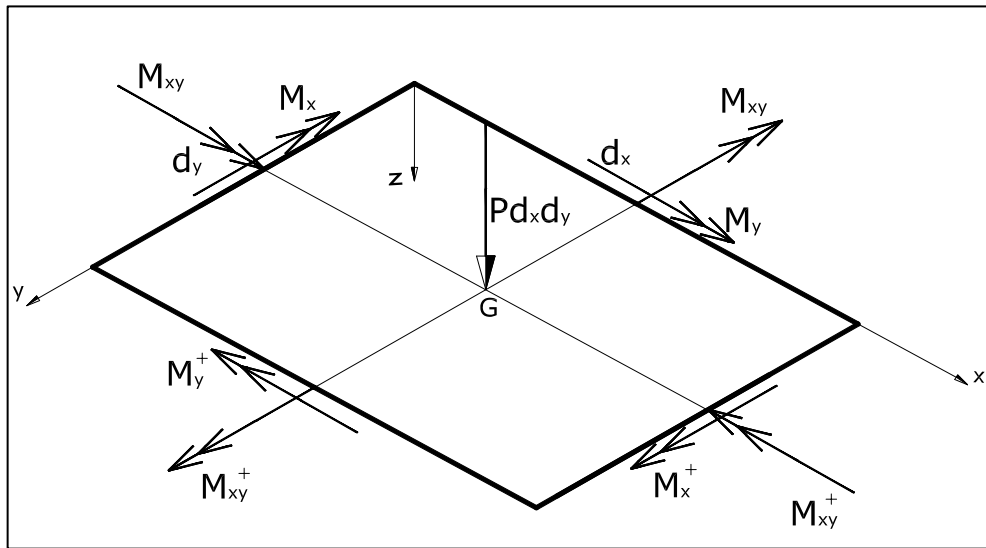


Fig. 5: Coppie flettenti e torcenti agenti nella piastra.

Il numero di equazioni di equilibrio è definito dal numero dei parametri di spostamento del problema cinematico e in particolare:

1. *Equazione di equilibrio in direzione verticale corrispondente al parametro di spostamento w ;*

$$-T_x dy + (T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx) dy - T_y dx + (T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy) dx + P dx dy = 0$$

semplificando si ottiene:

$$\boxed{-\frac{\partial T_x}{\partial x} - \frac{\partial T_y}{\partial y} = P}$$

2. *Equazione di equilibrio alla rotazione rispetto all'asse y corrispondente al parametro di rotazione φ_x fatta rispetto ad un asse parallelo all'asse x e passante per il baricentro;*

$$T_y dx \frac{dy}{2} + (T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy) dx \frac{dy}{2} + M_y dx - (M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy) dx + \dots$$

$$\dots + M_{xy} dy - (M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx) dy = 0$$

Semplificando si ottiene:

$$T_y - \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0$$

3. Equazione di equilibrio alla rotazione rispetto all'asse x corrispondente al parametro di rotazione φ_y fatta rispetto ad un asse parallelo all'asse y e passante per il baricentro G .

Analogamente a quanto fatto prima si ottiene:

$$T_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$$

In forma operatoriale il problema statico diventa

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{Bmatrix}$$

Il problema statico risulta essere staticamente indeterminato poiché l'operatore differenziale è rettangolare basso e in quanto si hanno tre equazioni in cinque incognite, inoltre è possibile notare la dualità tra i due operatori.

Le condizioni al contorno di tipo meccanico sono le seguenti:

$$T_x = \pm f_x$$

$$T_y = \pm f_y$$

$$M_x = \pm \mu_x$$

$$M_y = \pm \mu_y$$

$$M_{xy} = \pm \mu_{xy}$$

Le condizioni meccaniche sopra scritte, sono ottenute immaginando le frontiere libere parallele agli assi x e y . Se invece si avessero dei lati generici, non paralleli agli assi di riferimento x e y , le condizioni meccaniche andrebbero imposte proiettando le tensioni interne generalizzate nella direzione della normale uscente, ed uguagliando queste proiezioni, all'effettivo stato di forze esterne agenti in quel punto del mantello, mediante la seguente relazione:

$$[\sigma]\{\hat{n}\} = \{f\}$$

dove:

- σ = tensioni interne;
- \hat{n} = coseni direttori del piano tangente all'elemento considerato;
- f = forze di superficie.

4. Legame costitutivo

Anche in questo caso viene derivato dal continuo tridimensionale, utilizzando la legge di Hooke generalizzata, che fornisce un legame puntuale tra deformazioni e tensioni.

Essendo noto il legame tra deformazioni puntuali e deformazioni generalizzate e

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = E \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu^2} & \frac{\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu^2} & \frac{1}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

anche tra tensioni puntuali e tensioni generalizzate, si riesce, attraverso il legame di Hooke, a risalire ad un legame costitutivo per il nostro modello.

La legge di Hooke è la seguente:

Ricordando il legame tra tensioni puntuali e tensioni generalizzate e quello tra deformazioni puntuali e deformazioni generalizzate, si ottiene un legame elastico tra tensioni e deformazioni generalizzate.

Questo passaggio viene qui messo in evidenza solo per la grandezza momento flettente.

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dz \quad 9.1$$

Ma dal legame costitutivo

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \kappa_x z + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \kappa_y z = \frac{E}{1-\nu^2} (\kappa_x + \nu \cdot \kappa_y) z \quad 9.2$$

Si introduce nella 9.1

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\nu^2} (\kappa_x + \nu \kappa_y) z^2 dz \quad 9.3$$

Ottenendo

$$M_x = \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \cdot (\kappa_x + \nu \kappa_y) = D \cdot (\kappa_x + \nu \kappa_y) \quad 9.4$$

Il termine $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ rappresenta la **rigidezza flessionale** di una striscia di

piastra di larghezza unitaria.

Ripetendo questa operazione per tutte le grandezze statiche generalizzate si ottiene il legame utilizzato per il modello di piastra, e cioè:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} Gh & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} Gh \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$\text{con } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ rigidezza tangenziale.}$$

Un'ultima osservazione va fatta per il coefficiente $\frac{5}{6}$ relativamente ai tagli,

aggiunto in quanto sperimentalmente è stato osservato che la matrice di legame della piastra offriva delle rigidezze elevate. Inoltre ciò è giustificato dal fatto che una distribuzione costante delle tensioni tangenziali τ_{xz} e τ_{yz} , derivanti dalle ipotesi cinematiche fatte, non può valere poiché non soddisfa la condizioni al contorno di tipo meccanico, in quanto per la proprietà di reciprocità degli sforzi tangenziali sull'estradosso e intradosso dovrebbero esserci degli sforzi tangenziali rispettivamente pari a τ_{zx} e τ_{zy} . Quest'ultime non sono equilibrate da nessuna forza esterna, in quanto nel modello non sono presenti forze nel piano ma solo ortogonali al piano stesso.

Sperimentazioni successive hanno dimostrato che l'andamento di quelle tensioni tangenziali è di tipo parabolico, tali da rispettare le condizioni al contorno.

L'integrazione di questo andamento parabolico fornisce il coefficiente $\frac{5}{6}Gh$

presente nel legame costitutivo (fig.6).

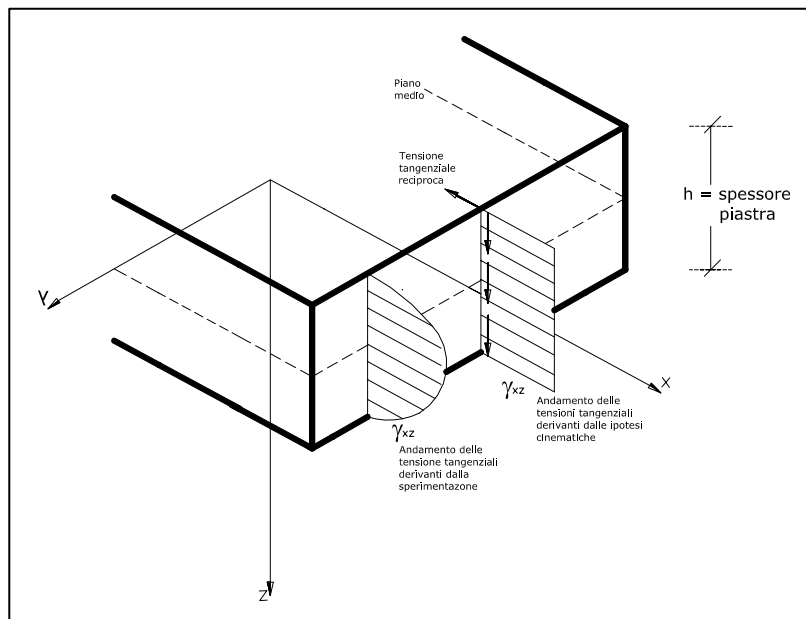


Fig. 6: Andamento delle tensioni tangenziali

Si hanno tutti gli elementi per trovare le equazioni di campo del modello di piastra. Il modello presentato fino ad ora è quello di **Midlin**.

Procedendo con il metodo degli spostamenti, si ha un problema di campo difficile da risolvere. Più in particolare sono state ottenute tre equazioni differenziali alle derivate parziali in funzione delle derivate del campo degli spostamenti fortemente accoppiate tra di loro.

Non si riesce, a questo livello, a risolvere il problema elastico e quindi ad ottenere le equazioni di campo, per cui il modello di piastra alla Midlin è irrisolvibile.

5. Modello di Kirchhoff

Sulla base del quadro fin qui delineato, si analizza l'ipotesi di indeformabilità a taglio del modello di piastra, modello che va sotto il nome di modello di piastra alla **Kirchoff**.

L'indeformabilità a taglio annulla le deformazioni tangenziali ovvero:

$$\gamma_{yz} = \varphi_y + \omega_{,y} = 0 \Rightarrow \varphi_y = -\omega_{,y}$$

$$\gamma_{xz} = \varphi_x + \omega_{,x} = 0 \Rightarrow \varphi_x = -\omega_{,x}$$

Non ha quindi senso considerare le rotazioni φ_x e φ_y come parametri di spostamento indipendenti, visto che sono correlati al parametro di spostamento verticale $w = \omega$.

Ne deriva che:

$$\kappa_x = -\omega_{,xx} = -w_{,xx}$$

$$\kappa_y = -\omega_{,yy} = -w_{,yy}$$

$$\kappa_{xy} = -\omega_{,xy} - \omega_{,yx} = -2\omega_{,xy} = -2w_{,xy}$$

$$\varphi_x = -\omega_{,x} = -w_{,x}$$

$$\varphi_y = -\omega_{,y} = -w_{,y}$$

Il problema cinematico, in termini operatoriali in seguito all'ipotesi di indeformabilità a taglio, diviene:

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \{w\}$$

$$\varphi_y = -\omega_{,y} = -w_{,y}$$

$$\varphi_x = -\omega_{,x} = -w_{,x}$$

risulta essere impossibile con stesso grado di impossibilità.

L'ipotesi di indeformabilità a taglio comporta l'annullarsi delle tensioni tangenziali, ma ciò non comporta anche l'annullarsi della grandezza statica generalizzata che continua ad esistere come reazione interna.

Si procede all'operazione di condensazione del taglio, dalla seconda e terza equazione di equilibrio si ricava:

$$T_x = M_{x,x} + M_{xy,y}$$

$$T_y = M_{y,y} + M_{xy,x}$$

si sostituiscono nella prima equazione di equilibrio ottenendo:

$$-M_{x,xx} - M_{y,yy} - 2M_{xy,xy} = P$$

Il problema statico in termini operatoriali, in seguito all'ipotesi di indeformabilità a taglio, diviene:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right] \cdot \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \{P\}$$

$$T_x = M_{x,x} + M_{xy,y}$$

$$T_y = M_{y,y} + M_{xy,x}$$

La matrice di legame si ottiene eliminando le righe relative alle grandezze statiche generalizzate taglio:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & D \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

Questo modello deve essere associato a delle condizioni al contorno, che sono di tipo cinematico e statico.

6. Condizioni al contorno di tipo cinematico e statico.

Le *condizioni cinematiche* sono qui riferite ad una piastra rettangolare riportata nella fig. 7.

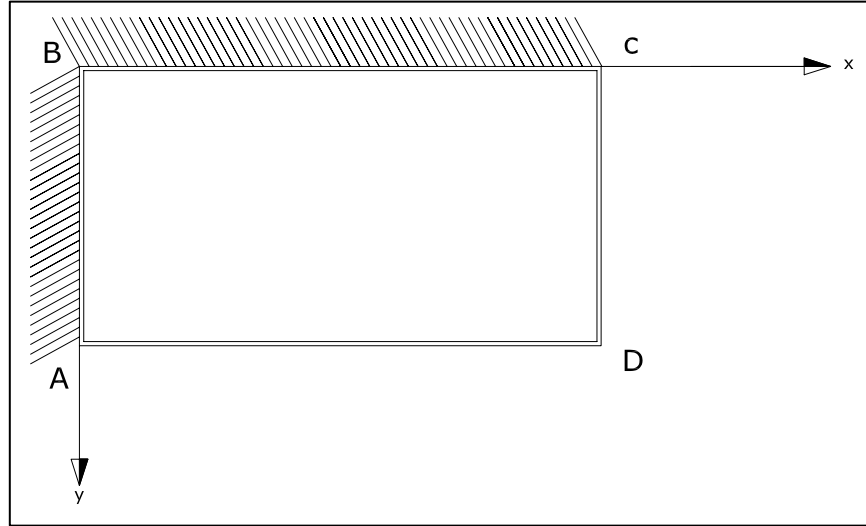


Fig. 7: Piastra rettangolare

Si ricorda che le condizioni al contorno cinematiche vanno imposte sulla frontiera vincolata ovvero su \overline{AB} e \overline{BC} e in particolare:

$$\overline{AB} \Rightarrow w(0, y) = 0 \quad e \quad \varphi_x(0, y) = 0$$

$$\overline{BC} \Rightarrow w(x, 0) = 0 \quad e \quad \varphi_x(x, 0) = 0$$

nel caso in cui fosse assegnato un cedimento vincolare, allora sarebbe collegato anche una rotazione, per cui la condizioni andrebbero imposte in questa maniera:

$$\overline{AB} \Rightarrow w(0, y) = \bar{w}(y) \Rightarrow \varphi_y(0, y) = \bar{w}'(y)$$

$$\overline{BC} \Rightarrow w(x, 0) = \bar{w}(x) \Rightarrow \varphi_x(x, 0) = \bar{w}'(x)$$

Le condizioni al contorno di tipo *meccanico* vanno imposte sulla frontiera libera. Prendendo in considerazione la frontiera CD, è possibile applicare su di essa, ovvero sulla faccia di normale x , le seguenti forze in gioco:

- forza tagliante T_x , diretta secondo l'asse z , e applicata sulla faccia di normale x ;
- momento flettente M_x , che sollecita gli ordini di travi in direzione x ;
- momento torcente M_{xy} .

Supponendo di applicare sulla frontiera CD una distribuzione di forze con legge nota f_x verticale, e contestualmente una distribuzione di coppie μ_{xy} torcenti, è possibile mettere in evidenza la correlazione tra queste forze esterne.

Poiché il modello considerato è indeformabile a taglio, le due grandezze, ovvero f_x e μ_{xy} , sono tra di loro correlate, visto che è possibile sostituire le coppie torcenti esterne, con una equivalente distribuzione di forze che produca la stessa risultante in termini di momento torcente e ciò è possibile poichè esiste un legame tra forze traslazionali e forze rotazionali.

La distribuzione di coppie esterne viene sostituita con una distribuzione di forze verticali come mostrato in figura dove è rappresentato il prospetto del lato CD della piastra (fig.8).

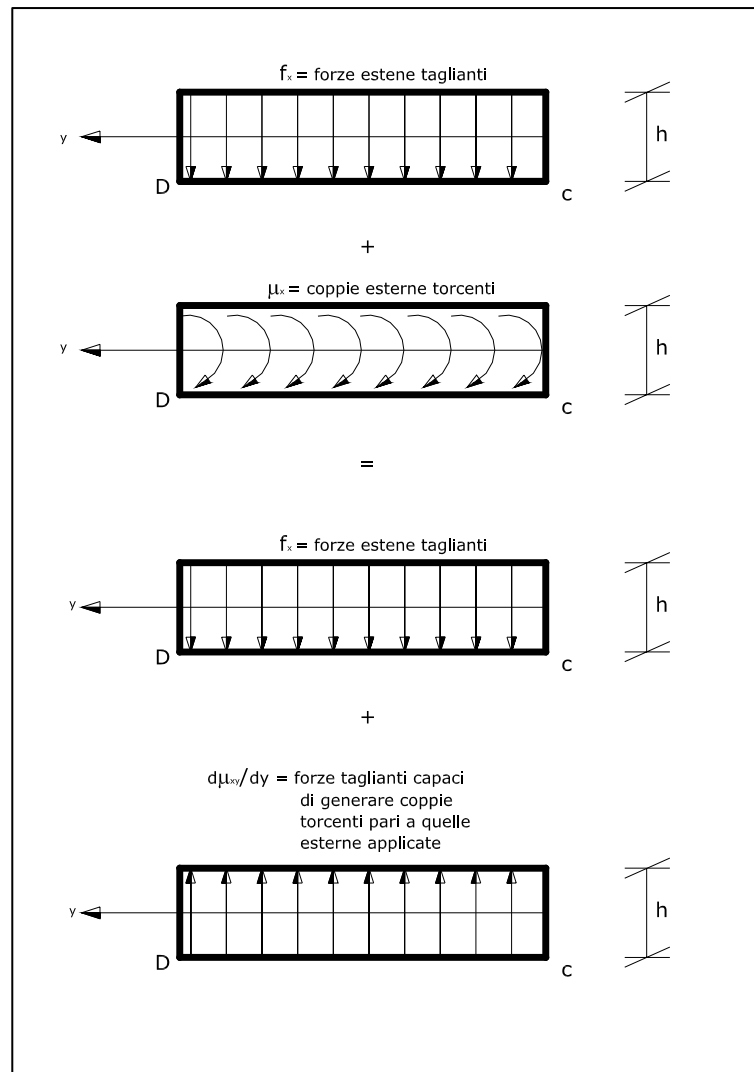


Fig. 8: Legame tra forze traslazionali e rotazionali.

In definitiva sulla frontiera CD agisce:

- una distribuzione di forze verticali direttamente applicata f_x ;
- una distribuzione di forze che produca la stessa risultante in termini di momento torcente.

Le azioni interne affioranti sulla frontiera libera, in grado di equilibrare le forze esterne f_x e μ_x , sono:

- una forza tagliante T_x
- una distribuzione di forze interne che produca la stessa risultante in termini di momento torcente, poichè anche in questo caso è possibile sostituire al momento torcente interno una distribuzione di forze.

Sulla frontiera CD affiorerà una particolare distribuzione tagliante che è un'opportuna combinazione di taglio e momento. Si definisce taglio di **Kirchoff**:

$$T_x^* = T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

Il medesimo ragionamento vale sulla frontiera AD:

$$T_y^* = T_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

Dove:

T_x^* = taglio di Kirchoff sulla faccia di normale x;

T_x = azione interna tagliante che affiora sul mantello;

$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ = forze interne capaci di equilibrare coppie torcenti μ_x .

In conclusione, le *condizioni meccaniche* da assegnare alla frontiera libera sono:

- una sul momento flettente agente sulla faccia di normale x e/o sulla faccia di normale y , che deve essere nullo se non vi sono coppie esterne applicate nella medesima direzione, oppure pari alle coppie esterne applicate;

$$\overline{AB}: M_y = \mu_y \quad oppure \quad M_y = 0$$

- una sul taglio di Kirchoff che rappresenta il legame tra taglio e momento torcente.

$$\overline{AB}: T_y^* = f_y$$

Con il modello di Kirchoff si ha quindi una riduzione del numero delle condizioni al contorno da imporre, da tre (Mindlin) a due (Kirchoff).

E' doveroso infine far notare come la schema di calcolo del taglio di Kirchoff comporti delle situazioni particolari in corrispondenza delle facce di bordo.

Sul concetto infinitesimo di bordo di sinistra, che si può immaginare di estrarre dalla piastra, deve esserci una forza che deve equilibrare quella del concetto infinitesimo nella parte di destra; nascono quindi in corrispondenza dei spigoli, delle forze concentrate pari a M_{xy} .

Anche per il lato \overline{AB} affiorano queste forze concentrate di estremità (fig.9).

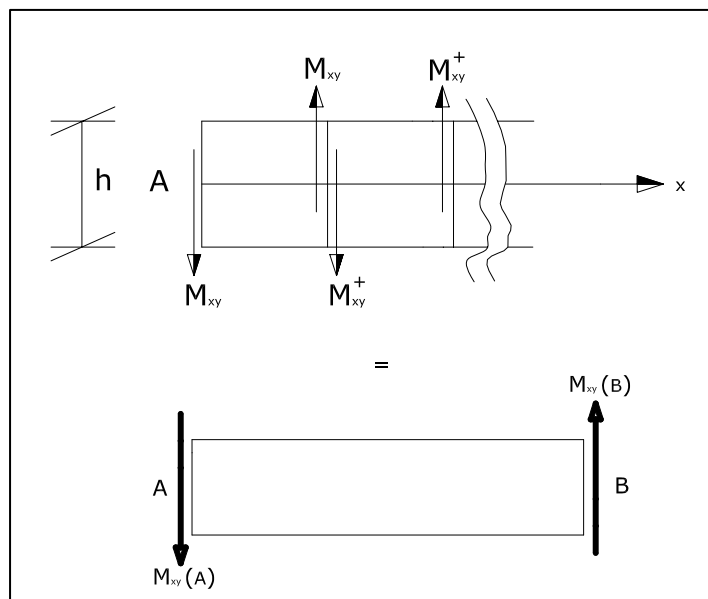


Fig. 9: Forze di estremità nel lato AB.

Analogamente, il discorso vale su ogni frontiera della piastra, infatti come è possibile notare dalla figura qui sotto riportata, vi sono delle forze concentrate in corrispondenza di ogni spigolo pari a $2M_{xy}$ in quanto una forza arriva da un lato, l'altra da quello perpendicolare (fig.10).

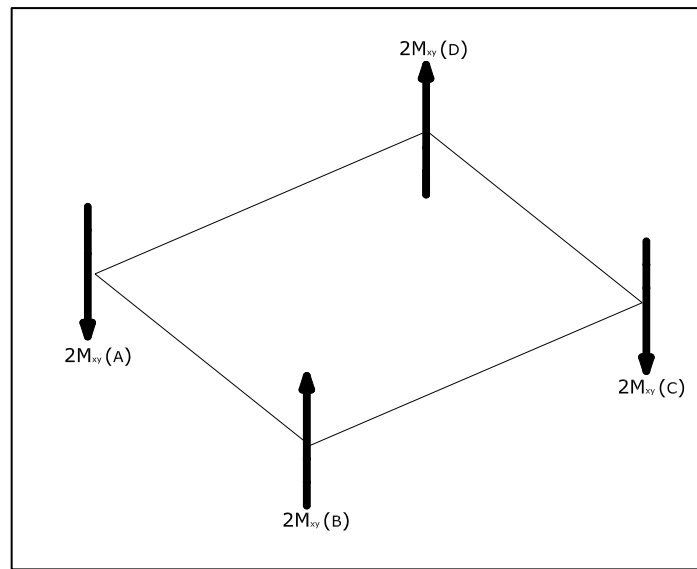


Fig. 10: Forze di estremità in corrispondenza degli spigoli.

Al fine di evitare possibili equivoci, si ricorda che le forze concentrate nascono in seguito alle ipotesi cinematiche introdotte nel modello di piastra alla **Kirchoff**.

In realtà, è possibile vedere che non esistono come forze concentrate, ma permettono di capire il comportamento della piastra.

7. Soluzione del modello di Kirchhoff

Al fine di individuare le equazioni di campo, risolutive del modello di piastra alla Kirchhoff, vengono qui richiamate le equazioni in termini matriciali.

1. Problema cinematico

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \cdot \{w\}$$

2. Problema statico

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \{P\}$$

3. Legame costitutivo

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & D \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

Risolvendo nell'ottica del metodo degli spostamenti, si otterrà l'equazione di campo della piastra detta anche **equazione di Lagrange** che descrive, se integrata, la linea elastica della piastra:

$$\boxed{w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = \frac{P}{D}}$$

dove:

- P = carico che sollecita la piastra;
- D = coefficiente di rigidezza della piastra.
- w = parametro di spostamento verticale.

Sebbene l'equazione di campo sia molto semplice non si è riusciti a trovare una soluzione generale, ma solo per alcune condizioni di carico e vincoli.

Si riesce a risolvere il problema elastico mediante le tecniche di *Navier*, qualora la piastra sia appoggiata sui bordi, e di *Levy*, qualora due lati paralleli siano appoggiati e gli altri vincolati genericamente.