

Capitolo 6

Trave ad anello

1. Generalità

Un'altra tipologia di elementi strutturali è la trave ad anello. Essa è molto utilizzata in strutture tipo serbatoi. Infatti si presta molto bene ad assolvere a due compiti in particolare: irrigidente se inserita nel mantello laterale o di connessione se posta fra mantello e cupola di copertura (vedi Fig.1).

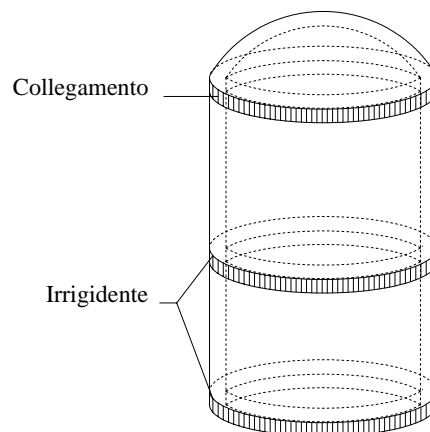


Fig.1: La trave ad anello nei serbatoi.

Passiamo ora al solito studio del problema elastico.

2. Cinematica

Generalmente su una trave ad anello possono gravare dei carichi radiali e dei momenti torcenti, come rappresentato in Fig.2.

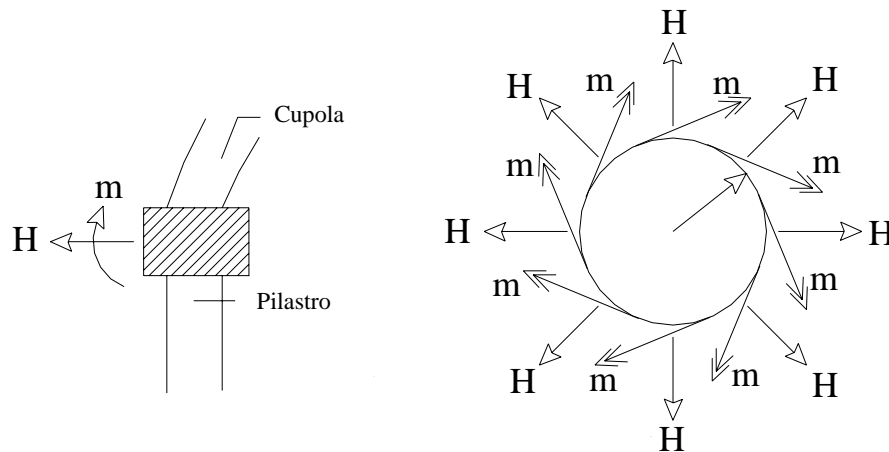


Fig.2: Carichi agenti su una generica trave ad anello.

Si noti come le forze radiali tendono ad allargare l'anello, mentre i momenti torcenti tendono a richiudere in se stessa la trave. Quindi, individuate le tensioni agenti, possiamo facilmente identificare il campo degli spostamenti come segue:

w che rappresenta lo spostamento radiale causato da H ;

φ rotazione puntuale causata dal momento m .

Per individuare il campo di deformazioni generalizzate, immaginiamo di isolare un concio infinitesimo di trave e di imprimere uno spostamento w .

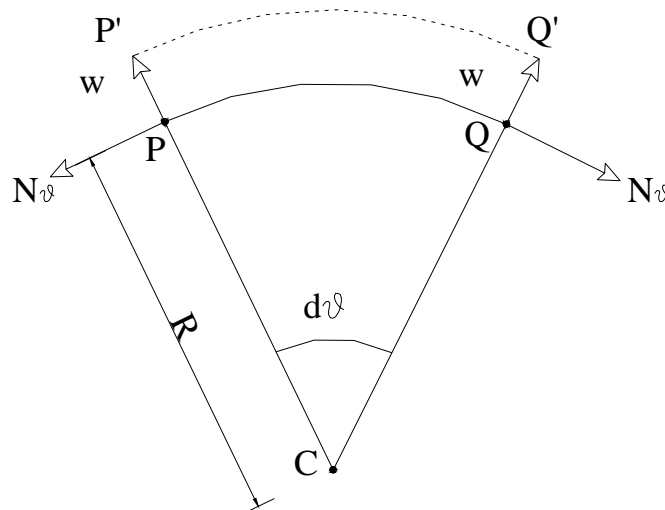


Fig.3: Spostamento radiale w .

La deformazione legata a questo spostamento sarà proprio una deformazione estensionale pari al rapporto fra la differenza della lunghezza dell'arco deformato e la lunghezza di quello non deformato diviso quest'ultima:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\overline{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}} = \frac{(R+w)d\varphi - R \cdot d\varphi}{R \cdot d\varphi} = \frac{w}{R} \quad (1)$$

Abbiamo trovato la prima equazione implicita di congruenza relativa allo spostamento radiale.

Facciamo lo stesso per la rotazione φ . Prendiamo in considerazione un punto qualsiasi della trave e fissiamo gli assi coordinati come in Fig.4.

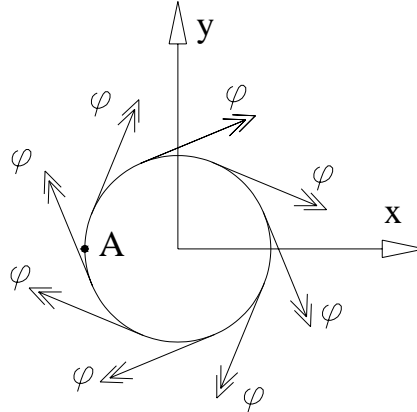


Fig.4: Rotazione torsionale φ .

Per vedere e valutare lo spostamento causato dalla rotazione impressa operiamo una sezione sulla trave ad anello passante per il punto A e perpendicolare all'asse come in Fig.5.

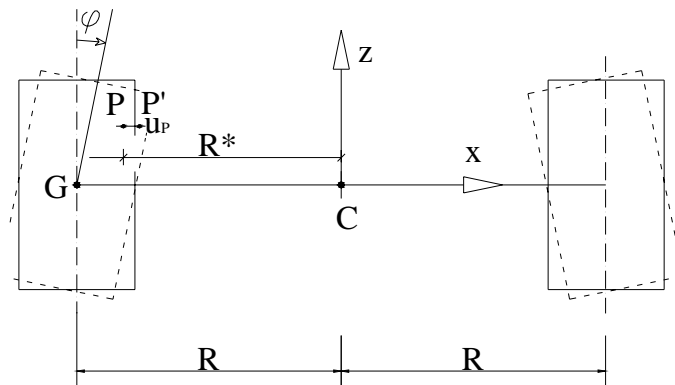


Fig.5: Sezione di una trave ad anello.

Il generico punto P subirà uno spostamento in direzione x e sarà proprio pari a

$$u_P = z \cdot \sin \varphi \cong z \cdot \varphi \quad (2)$$

Se notiamo bene questo spostamento causa una accorciamento del raggio R^* pari proprio ad u_P . Abbiamo quindi trovato l'altra grandezza deformativa:

$$\epsilon_P = \frac{(R^* - u_P) - R^*}{R^*} = \frac{-u_P}{R^*} \cong -\frac{z \cdot \varphi}{R} \quad (3)$$

In questa equazione sono presenti due variabili, z e φ . Introduciamo quindi una nuova grandezza di deformazione generalizzata definita come in seguito:

$$\kappa = \frac{\varphi}{R} \quad (4)$$

Le equazioni implicite di congruenza scritte in forma operatoriale diventano:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (5)$$

3. Legame costitutivo

Tentiamo di capire quale è la deformazione associata alla nuova deformazione generalizzata. Per fare questo partiamo da quello che noi conosciamo, e cioè dalla deformazione puntuale descritta dal legame cinematico

$$\varepsilon_p = -\kappa \cdot z$$

e dalla tensione legata alla deformazione in esame che è, abbiamo visto, estensionale e quindi:

$$\sigma_p = E \cdot \varepsilon_p \quad (6)$$

Sostituendo la deformazione generalizzata ε_p nel legame costitutivo si ha:

$$\sigma_p = -E \cdot \kappa \cdot z \quad (7)$$

che produce un campo di tensioni perpendicolare alla sezione della trave a farfalla, come in Fig.6.

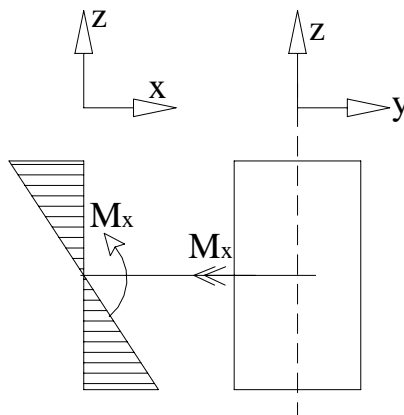


Fig.6: Tensione legata alla deformazione κ .

Un campo tensionale così fatto è generato da un momento flettente. La tensione che stiamo cercando è proprio M_x . Se calcoliamo la risultante delle forze agenti in direzione x si ha

$$N = \int_A \sigma_P \cdot dA = -E \cdot \kappa \cdot \int_A z \cdot dA = 0 \quad (8)$$

che è identicamente nulla visto che l'integrale che compare è proprio pari al momento statico baricentrico; se invece facciamo la stessa operazione equilibrando la rotazione intorno all'asse x, si ha

$$M_x = \int_A \sigma_P \cdot z \cdot dA = -E \cdot \kappa \cdot \int_A z^2 \cdot dA = -E \cdot \kappa \cdot I_x \quad (9)$$

Abbiamo trovato così la tensione associata alla deformazione generalizzata κ ed anche il legame con la sua tensione associata. In definitiva il legame costitutivo si riassume in forma operatoriale come segue:

$$\begin{Bmatrix} N_g \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & -EI_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (10)$$

4. Statica

Per ricavare le equazioni indefinite dell'equilibrio procediamo equilibrando un conico infinitesimo di trave come mostrato in Fig.7.

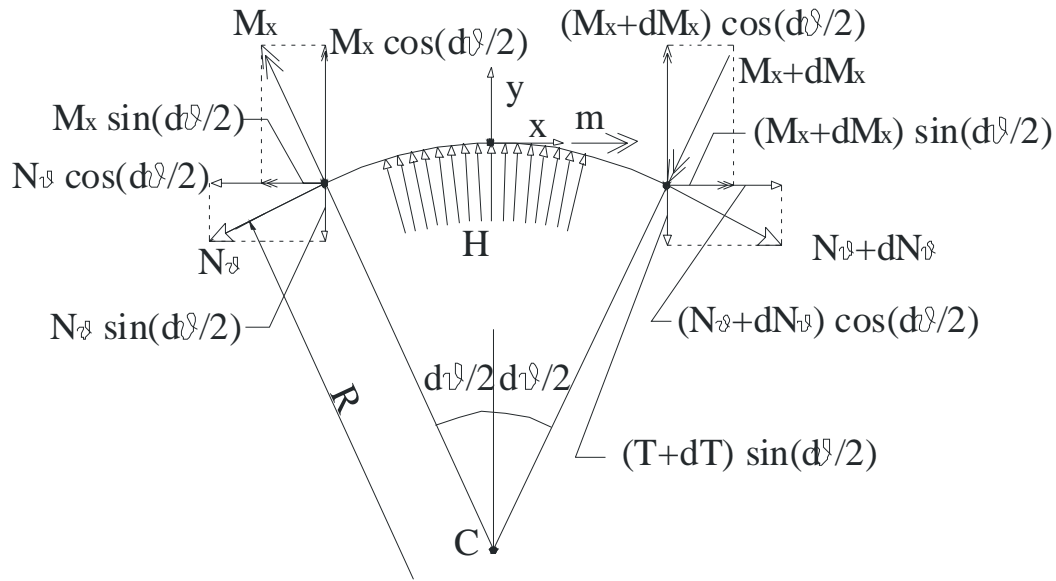


Fig.7: Forze agenti su un conico infinitesimo di trave ad anello.

Come possiamo facilmente notare in direzione x l'equilibrio è sempre verificato:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_g \cdot \cos \frac{d\theta}{2} + (N_g + dN_g) \cdot \cos \frac{d\theta}{2} = 0$$

Lungo la direzione y si ha:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_g \cdot \sin \frac{d\vartheta}{2} - (N_g + dN_g) \cdot \sin \frac{d\vartheta}{2} + H \cdot R \cdot d\vartheta = 0$$

$$H = \frac{N_g}{R} \quad (11)$$

avendo posto approssimato il seno di un angolo infinitesimo pari all'angolo stesso ed il coseno pari ad uno.

Dall'equilibrio alla rotazione risulta:

$$\sum M_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_x \cdot \sin \frac{d\vartheta}{2} - (M_x + dM_x) \cdot \sin \frac{d\vartheta}{2} + m \cdot R \cdot d\vartheta = 0$$

$$m = \frac{M_x}{R} \quad (11)$$

Abbiamo trovato quindi le due equazioni indefinite dell'equilibrio che scritte in forma operatoriale

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_g \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ m \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Verifichiamo che le grandezze statiche sono le duali di quelle cinematiche confrontando gli operatori statico e cinematico e vedendo che sono l'uno aggiunto dell'altro.

5. Metodo degli spostamenti

Per la risoluzione del problema trave ad anello procediamo come nostro solito utilizzando il metodo degli spostamenti. Notiamo subito che ho degli operatori matriciale diagonali che rendono il problema disaccoppiato e quindi di facile risoluzione. Procediamo quindi sostituiamo nelle equazioni del legame costitutivo (Eq.(10)) quelle della cinematica (Eq.(5)), ottenendo:

$$\begin{Bmatrix} N_g \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{EI_x}{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Sostituendo ora queste relazioni nelle equazioni della statica si ha:

$$\begin{Bmatrix} H \\ m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{R^2} & 0 \\ 0 & -\frac{EI_x}{R^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (14)$$

che rappresenta il sistema risolutivo.