

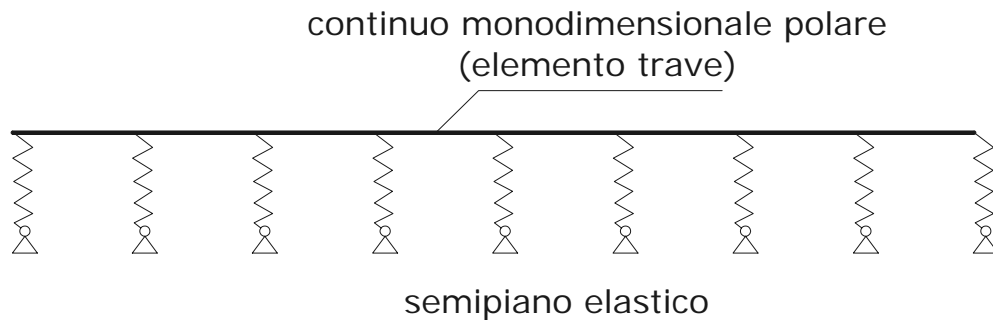
## Capitolo 3

# La trave su suolo elastico

---

### 1. Il modello

Con il termine “*trave su suolo elastico*” o anche “*trave su suolo alla Winkler*” si intende un modello di trave continuo monodimensionale polare poggiato su un semipiano elastico costituito da molle a distribuzione continua come illustrato in Fig.(1).



**Fig.1:** Schematizzazione del modello di trave su suolo elastico.

Nel semipiano elastico le molle esplicano la loro rigidità traslazionale esclusivamente nella direzione degli spostamenti verticali.

Assumendo questa schematizzazione assegniamo al terreno di fondazione, su cui poggia la trave, una certa resistenza a trazione che nella realtà sappiamo non appartenere ai materiali incoerenti come i terreni. Questa approssimazione conduce in ogni caso a dei risultati del tutto teorici che sono accettabili per descrivere molteplici situazioni di interesse pratico.

Il modello precedentemente descritto verrà analizzato nei tre aspetti che comunemente concorrono alla definizione del *problema elastico* in senso generale.

Si procede pertanto all'analisi del:

1. *problema cinematico*;
2. *problema statico*;
3. *legame costitutivo*.

### 1.1. Il problema cinematico

Nell'ambito dello studio del problema cinematico associato al modello, come di consueto, si parte dalla definizione del campo degli spostamenti associati al modello stesso in relazione alle caratteristiche prima enunciate.

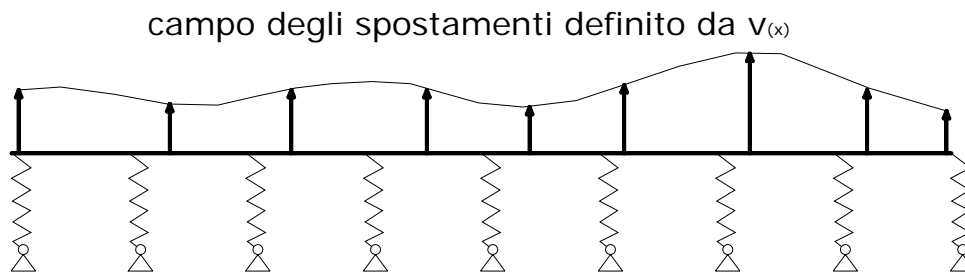
Il campo degli spostamenti è pertanto definito come segue:

$$u = \{v\} \quad (1)$$

Questa definizione si considera vera sotto delle specifiche ipotesi semplificative:

1. trave indeformabile a taglio  $\Rightarrow \varphi(x) = v'(x)$ ;
2. non ha senso considerare gli spostamenti orizzontali  $u(x)$  della trave in quanto la distribuzione di molle nel semipiano elastico non esplica rigidità nei confronti di eventuali spostamenti orizzontali (non assumendo tal ipotesi si otterrebbe dalla soluzione del problema l'equazione dell'asta già determinata in precedenza).

In definitiva, con riferimento allo schema illustrato in Fig.(2), si assume il campo di spostamenti come espresso dalla relazione (1).



**Fig.2:** Campo degli spostamenti.

In una seconda fase del problema cinematico si passa ad esaminare lo stato deformativo del modello.

Abbiamo visto che in generale lo stato deformativo della trave è descritto dalle tre grandezze caratteristiche  $\varepsilon, \gamma, \kappa$ , nell'ambito del modello che stiamo esaminando vanno considerate le opportune ipotesi semplificative che vanno a modificare la struttura generale del campo deformativo associato al problema cinematico.

Avendo introdotto in precedenza l'indeformabilità a taglio della trave si ha:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} \xrightarrow{\gamma=0} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{Bmatrix},$$

e in considerazione del fatto che non portiamo in conto possibili spostamenti in direzione orizzontale della trave quindi non si hanno deformazioni assiali ( $\varepsilon = 0$ ), il campo deformativo della trave è individuato dal vettore :

$$\kappa = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = v''(x).$$

Nell'ambito dello studio delle deformazioni è doveroso portare in conto la deformabilità delle molle costituenti il semipiano elastico. E' facile notare come le deformazioni delle molle  $\{s\}$  coincida con il campo di spostamenti del continuo monodimensionale polare, pertanto, posto:

$$s(x) = v(x),$$

si ha, in forma operatoriale:

$$\{\varepsilon\} = [D] \cdot \{u\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \kappa \\ s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ I \end{bmatrix} \cdot \{v\} \quad (2)$$

La struttura del problema cinematico mette in luce come siamo in presenza di un problema *impossibile*: il numero delle equazioni a nostra disposizione risulta essere maggiore del numero delle incognite e più precisamente, sviluppando la (2) si ha:

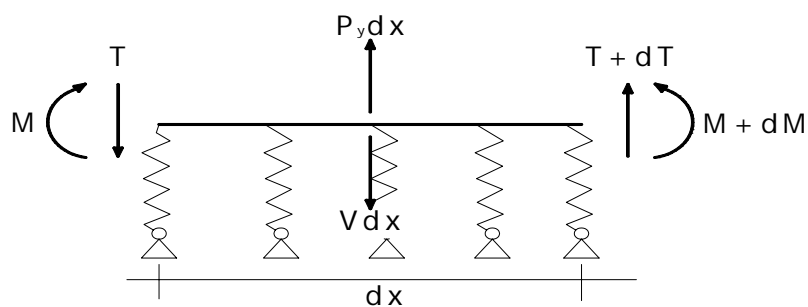
$$\begin{cases} \kappa = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = v'' \\ s = v \end{cases} \quad (3)$$

che rappresenta un sistema di due equazioni nell'unica incognita  $v(x)$ .

Tale caratteristica di impossibilità del problema cinematico è messa in luce anche dalla struttura dell'operatore cinematico  $[D]$  che risulta essere "rettangolare alto".

## 1.2. Problema statico

Per studiare il problema statico associato al modello di trave su suolo elastico, supponiamo di estrarre dalla trave un concio di lunghezza infinitesima, come illustrato dalla Fig.(3):



**Fig.3:** Concio infinitesimo di trave.

Avendo definito con le espressioni:

1.  $p_y dx$ : risultante del carico distribuito sull' elemento infinitesimo di trave;
2.  $V dx$ : reazione esplicata dalla porzione di semipiano elastico di lunghezza infinitesima  $dx$  ;

procediamo alla scrittura delle equazioni indefinite di equilibrio:

1. *equilibrio alla traslazione verticale:*

$$dT + p_y dx - V dx = 0 \Rightarrow T' + p_y - V = 0; \quad (4)$$

2. *equilibrio alla rotazione rispetto al baricentro:*

$$dM + T dx = 0 \Rightarrow M' + T = 0; \quad (5)$$

Avendo definito il sistema di equazioni atte a descrivere le condizioni di equilibrio dell'elemento infinitesimo di trave, si procede alla scrittura di tali equazioni in forma condensata (modello indeformabile a taglio) come segue.

Dalla (4) ricaviamo:

$$T' = V - p_y; \quad (6)$$

che introdotta nella equazione ricavata dalla derivazione della (5) fornisce:

$$M'' + V - p_y = 0; \quad (7)$$

che rappresenta proprio la forma dell'equazione di equilibrio condensata.

Tale equazione espressa in termini operatoriali assume la forma:

$$\{p_y\} = [D^*] \cdot \{\sigma\} \Rightarrow \{p_y\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M \\ V \end{Bmatrix}; \quad (8)$$

La struttura del problema statico mette in luce come siamo in presenza di un problema *indeterminato*: il numero delle equazioni a nostra disposizione risulta essere minore del numero delle incognite.

Tale caratteristica di indeterminatezza del problema statico è messa in luce anche dalla struttura dell'operatore  $[D^*]$  che risulta essere “rettangolare basso”.

Di fondamentale importanza è verificare che sussista il rapporto di dualità tra problema statico e cinematico, ovvero è necessario verificare che l'operatore statico  $[D^*]$  sia l'*aggiunto* dell'operatore cinematico  $[D]$ .

Ricordiamo che la relazione di matrice aggiunta comporta quanto segue:

1. la matrice  $[D^*]$  deve essere uguale alla trasposta della matrice  $[D]$  ;
2. le derivate di ordine dispari all'interno della matrice  $[D^*]$  devono essere di segno opposto alle corrispondenti derivate contenute nella matrice  $[D]$ .

Si ha pertanto:

$$[D^*] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 1 \end{bmatrix}^T; \quad (9)$$

con:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 1 \end{bmatrix} = [D]. \quad (10)$$

### 1.3. Il legame costitutivo

Il legame costitutivo del modello in esame è espresso dalla seguente relazione in forma matriciale:

$$\{\sigma\} = [C] \cdot \{\varepsilon\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} M \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \kappa \\ s \end{Bmatrix}; \quad (11)$$

All'interno dell'operatore  $[C]$ , particolare importanza riveste il termine e in posizione (2;2): “c” rappresenta quella che definiamo la “*costante di rigidezza del sottosuolo*” e determina la relazione che lega la reazione del semipiano elastico al campo degli spostamenti dello stesso come segue:

$$V(x) = c s(x); \quad (12)$$

mediante un legame che risulta essere lineare secondo “c”.

## 2. Le condizioni al contorno

Sia il problema cinematico che quello elastico, come precedentemente illustrati, sono problemi differenziali e necessitano pertanto di opportune condizioni al contorno.

### 2.1. Condizioni al contorno di tipo cinematico.

Queste condizioni sono espresse dalle relazioni seguenti:

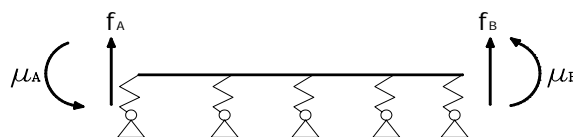
$$\begin{cases} v = \bar{v} \\ \varphi = \bar{\varphi} = \bar{v}' \end{cases}; \quad (13)$$

e la loro validità è estesa alla parte di frontiera del dominio che risulta vincolata.

### 2.2. Condizioni al contorno di tipo statico.

Le condizioni al contorno di tipo statico possono essere espresse, in relazione allo schema di Fig.(4), come segue:

$$\begin{cases} \mp M_{A,B} = \mu_{A,B} \\ \mp T_{A,B} = f_{A,B} \end{cases}; \quad (14)$$



**Fig.4:** Condizioni al contorno di tipo statico.

### 3. La soluzione

Ricerchiamo la soluzione del problema elastico associato al modello di trave monodimensionale polare su letto di molle nell'ambito del metodo degli spostamenti.

Partendo dalle equazioni indefinite di congruenza (3) e sfruttando le relazioni introdotte dal legame costitutivo (11) si ha:

$$\begin{cases} \kappa = v'' \Rightarrow M = EI v'' \\ s = v \Rightarrow V = c v \end{cases}; \quad (15)$$

con le suddette espressioni, considerate all'interno dell'equazione di equilibrio espressa nella sua forma condensata (7) si ha:

$$M'' + V = P_y \Rightarrow EI v'''' + c v = P_y; \quad (16)$$

che è l'equazione risolutiva del problema elastico espressa nell'ambito del metodo degli spostamenti, tale equazione differenziale di quarto ordine è costituita da due termini:

1.  $EI v''''$ : definita come *portanza flessionale della trave*;
2.  $c v$ : definito come *portanza del sottosuolo*.

Alla (16) sono associate le condizioni al contorno (13) e (14) e viene solitamente espressa nella forma:

$$v(x)'''' + \frac{c}{EI} v(x) = \frac{P_y(x)}{EI}; \quad (17)$$

o meglio attraverso l'espressione:

$$v''''(x) + 4\beta^4 v(x) = \frac{P_y(x)}{EI}; \quad (18)$$

con:

$$4\beta^4 = \frac{c}{EI} \Rightarrow \beta^4 = \frac{c}{4EI}; \quad (19)$$

La soluzione del problema elastico si presenta dunque in forma di equazione differenziale del quarto ordine con coefficienti costanti e non omogenea data la presenza del termine noto al secondo membro.

La (17) ha soluzione del tipo:

$$v(x) = v_0(x) + v_p(x); \quad (20)$$

con:

- $v_0(x)$ : soluzione del problema omogeneo  $v(x)'''' + 4\beta^4 v(x) = 0$
- $v_p(x)$ : soluzione particolare del problema differenziale.

Si esaminano pertanto le possibili forme delle soluzioni sopracitate  $v_0(x)$ ,  $v_p(x)$ .

### 3.1. Soluzione del problema omogeneo associato

Il problema omogeneo si presenta nella forma:

$$v(x)'''' + 4\beta^4 v(x) = 0; \quad (21)$$

cioè siamo in presenza di una equazione differenziale a coefficienti costanti con termine noto nullo. Equazioni differenziali con tali caratteristiche vengono definite “*equazione di Eulero*” e presentano una soluzione generale della forma:

$$v_0(x) = e^{\alpha x}; \quad (22)$$

si ha, pertanto, dalla (21) e dalla (22): forma:

$$\alpha^4 e^{\alpha x} + 4\beta^4 e^{\alpha x} = 0 \quad \forall x; \quad (23)$$

da cui:

$$\alpha^4 + 4\beta^4 = 0; \quad (24)$$

da cui otteniamo quattro valori della variabile  $\alpha$ .

Pertanto la soluzione generale del problema (21) sarà data dalla combinazione lineare dei valori di  $\alpha$  derivanti dalla risoluzione della (24) e si presenta nella forma: forma:

$$v_0(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x} + C_4 e^{\alpha_4 x}; \quad (25)$$

Nel nostro caso le soluzioni per il coefficiente  $\alpha$  sono rappresentate da numeri complessi: si rende necessario, per ovviare a tale inconveniente ed esprimere la soluzione in termini di numeri reali, operare matematicamente sulla forma della soluzione. Sfruttando le opportune relazioni matematiche tra numeri complessi e funzioni trigonometriche è possibile esprimere la soluzione  $v_0(x)$  come segue:

$$v_0(x) = e^{-\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x). \quad (26)$$

### 3.2. Soluzione particolare del problema differenziale

La soluzione particolare del problema differenziale è, come precedentemente accennato, funzione della forma del carico  $P_y(x)$ .

Se il carico si presenta come funzione polinomio di potenze della variabile  $x$  con grado massimo della funzione pari a tre:

$$P_y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3; \quad (27)$$

allora la soluzione particolare assume la forma:

$$v_p(x) = \frac{P_y(x)}{4\beta^4} \frac{1}{EI}; \quad (28)$$

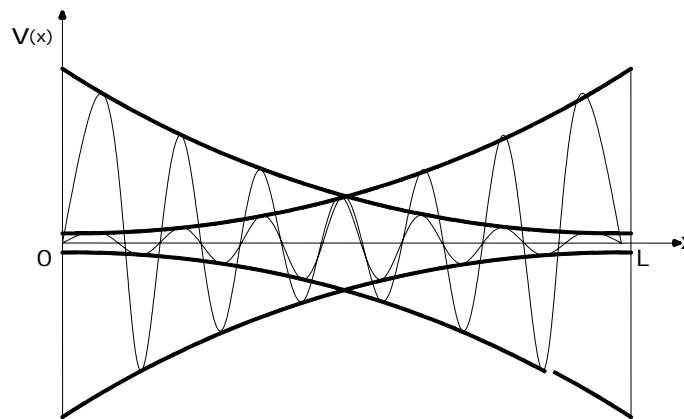
In definitiva la soluzione del problema del nostro problema elastico sarà determinata dalla somma delle due soluzioni sopra esaminate, dunque si avrà:

$$v(x) = e^{-\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{P_y(x)}{4\beta^4} \frac{1}{EI}; \quad (29)$$

alla quale andranno associate le condizioni al contorno (13) (14).

#### 4. Trave “corta” e trave “lunga”

L’andamento generale della soluzione (26) del problema omogeneo associato è riportato nel seguente grafico di Fig.(5):



**Fig.5:** Andamento generale della soluzione (26).

Esaminando l’andamento della soluzione, cioè lo smorzamento subito dalle funzioni sinusoidali, è possibile affermare quanto segue:

- i) il fattore esponenziale  $e^{-\beta x}$  descrive il comportamento della generica trave in corrispondenza dell’estremo ad ascissa  $x = 0$ ;
- ii) all’aumentare dell’ascissa il comportamento della trave è descritto in maniera preponderante dall’esponenziale  $e^{\beta x}$ .

Se ne deduce che il comportamento della generica trave è legato al coefficiente  $\beta$ . Si parlerà quindi di “trave su suolo elastico lunga” e “trave su suolo elastico corta”.

Essendo le funzioni trigonometriche, presenti nella soluzione  $v_0(x)$ , funzioni periodiche, studiamo la funzione su un periodo e poniamo:

$$\beta \lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\beta}; \quad (30)$$

con:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{c}{4EI}}; \quad (31)$$

con:

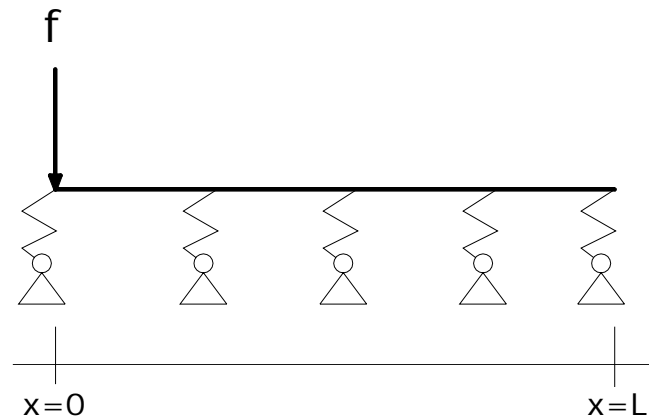
$\lambda$ : lunghezza caratteristica della trave su suolo elastico.



Sostanzialmente possiamo distinguere tra due casi:

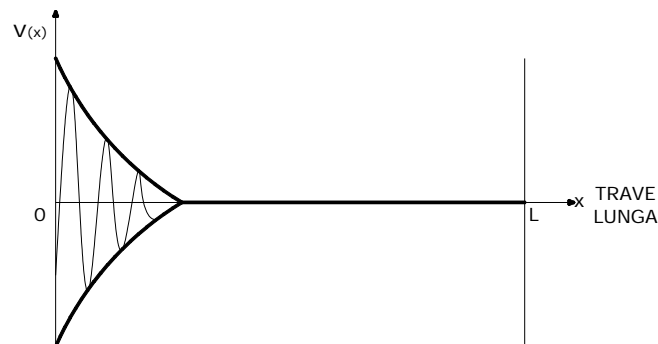
1.  $L \gg \lambda \Rightarrow$  trave lunga;
2.  $L \ll \lambda \Rightarrow$  trave corta.

Per descrivere adeguatamente le differenze di comportamento tra i due tipi di trave sopraelencati si prenda in considerazione lo schema di calcolo di Fig.(6):

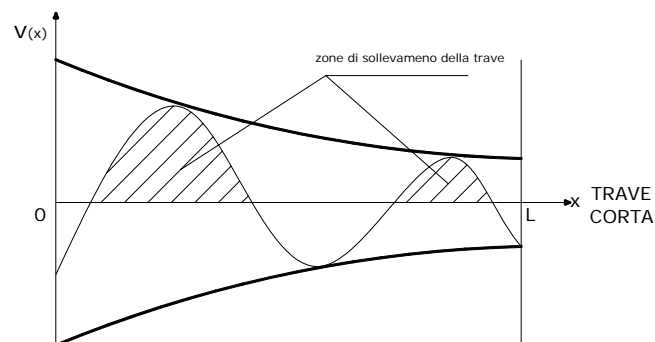


**Fig.6:** Trave su suolo elastico con carico concentrato ad un estremo.

Graficando i risultati ottenuti in termini di spostamento descritto dalla funzione  $v(x)$  si ha:



**Fig.7:** Campo degli spostamenti per trave "lunga" su suolo elastico.



**Fig.8:** Campo degli spostamenti per trave "corta" su suolo elastico.

E' facile notare come nel grafico di Fig.(7) il campo degli spostamenti, quindi la soluzione del problema elastico, subisca un forte smorzamento che porta la funzione  $v(x)$  ad abbattersi non lontano dall'estremo soggetto al carico concentrato  $f$ .

La caratteristica fondamentale delle travi su suolo elastico definite lunghe ( $\beta$  molto elevato  $\Rightarrow \lambda \ll L$ ) è quella che tutto ciò che accade ad un estremo è del tutto indipendente da ciò che accade sull'altro.

Al contrario nel grafico di Fig.(8) si nota come in presenza di travi "corte" ( $\beta$  molto piccolo  $\Rightarrow \lambda \gg L$ ) il carico, quindi gli effetti da esso generati, non subiscono l'abbattimento ma si risentono per tutta la lunghezza della trave fino a giungere all'estremo opposto a quello caricato.