

Capitolo 10

Piastra assialsimmetrica

1. Piastra circolare o assial - simmetrica

Per piastra circolare o assial – simmetrica si intende il caso di piastra circolare in condizioni di simmetria polare, il cui comportamento è convenientemente descritto in coordinate cilindriche $(O; r, \vartheta, z)$. La simmetria polare comporta l'indipendenza da ϑ di tutte le variabili.

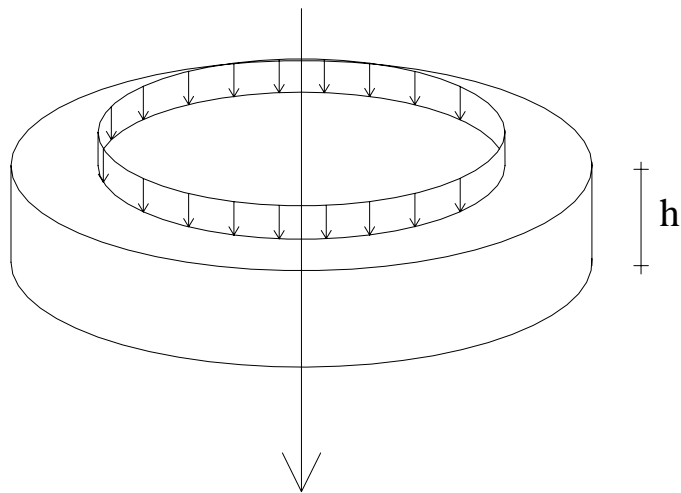


Fig.1: Piastra circola assial – simmetrica

Quindi il campo degli spostamenti in condizioni da assial – simmetria sarà dato da:

$$\begin{cases} u = u(r) \\ v = 0 \\ w = w(r) \end{cases}$$

1.1. Problema cinematico

Isoliamo una porzione infinitesima di piastra nell'intorno del generico raggio r . Ipotizziamo che gli infiniti segmenti materiali ortogonali al piano medio siano rigidi, cioè si mantengano rettilinei anche dopo la deformazione e possono subire solo una rotazione che chiamiamo φ_r .

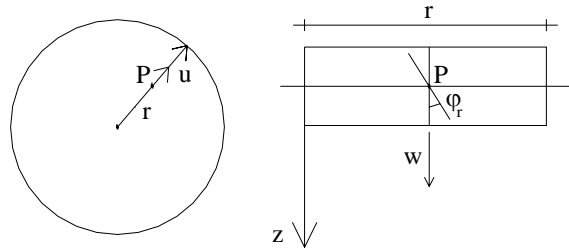


Fig.2: Porzione infinitesima di piastra

Ricaviamo le nuove componenti di spostamento sotto l'ipotesi fatta di rigidità dei segmenti materiali valutando di quanto si sposta un punto P_z posto a distanza z da P :

$$\begin{cases} u = \varphi_r \cdot z \\ v = 0 \\ w = w(r) \end{cases}$$

Per il concetto infinitesimo definiamo tre tipi di deformazioni:

- ε_c = deformazione circonferenziale;
- ε_r = deformazione radiale;
- γ_{zr} = deformazione tagliante.

Isoliamo un concetto circolare infinitesimo di piastra:

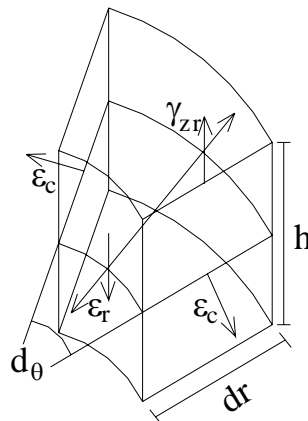


Fig.3: Deformazioni puntuali

La deformazione radiale (deformazioni lungo il generico raggio r) ε_r è data da:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

La deformazione circonferenziale ε_c è data da:

$$\varepsilon_c = \frac{u}{r}$$

La deformazione tagliante γ_{zr} è data da:

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = \varphi_r + w'$$

Sostituendo gli spostamenti nelle deformazioni si ottiene:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \varphi_r' \cdot z \\ \varepsilon_c = \frac{\varphi_r}{r} \cdot z \\ \gamma_{zr} = \varphi_r + w' \end{cases}$$

Dal campo delle deformazioni puntuali del continuo in funzione delle componenti generalizzate, isoliamo le componenti che dipendono dalla variabile r :

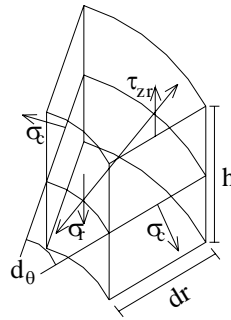
$$\begin{cases} k_r = \varphi_r' \\ k_c = \frac{\varphi_r}{r} \\ \gamma_{zr} = \varphi_r + w' \end{cases}$$

L'equazione di congruenza scritta in forma operatoriale:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{zr} \\ k_r \\ k_c \cdot r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dr} & 1 \\ 0 & \frac{d}{dr} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_r \end{Bmatrix}$$

1.2. Problema statico

Studiamo il problema statico riferendoci alla seguente fig.4 in cui viene evidenziato il campo di tensioni che agisce:

**Fig.4:** Tensioni puntuali

Le tensioni σ_r generano una coppia flettente data da:

$$M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r \cdot z dz$$

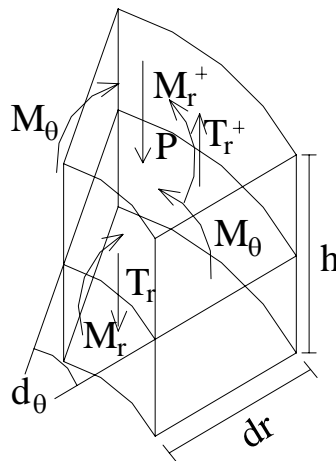
Le tensioni σ_θ generano una momento circonferenziale data da:

$$M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta \cdot z dz$$

La risultante delle tensioni tangenziali τ_{zr} , costante lungo lo spessore e variabile lungo r, è data da:

$$T_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zr} \cdot dz$$

All'equilibrio avremo:

**Fig.5:** Tensioni generalizzate

Imponendo l'equilibrio alla traslazione in direzione verticale, otteniamo la prima equazione di equilibrio:

$$-\frac{d}{dr}(T_r \cdot r) + p \cdot r = 0$$

Imponendo l'equilibrio dei momenti intorno alla direzione tangente, otteniamo la seconda equazione di equilibrio:

$$\frac{d}{dr}(M_r \cdot r) - M_\theta + T_r \cdot r = 0$$

In forma operatoriale:

$$\begin{bmatrix} -\frac{d}{dr} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{d}{dr} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -(T_r \cdot r) \\ M_r \cdot r \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \cdot r \\ 0 \end{Bmatrix}$$

1.3. Legame costitutivo

Il legame costitutivo è dato da:

$$\begin{Bmatrix} M_r \\ M_\theta \\ T_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} Gh \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_r \\ k_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}$$

1.4 Piastra indeformabile a taglio

Si definisce piastra indeformabile a tagli una piastra in cui $h < 1/20r$.

Partiamo dalle condizioni cinematiche: l'indeformabilità a taglio comporta che $\varphi_r = -w'$ e il campo delle deformazioni generalizzate si modifica come segue:

$$\begin{cases} k_r = -w'' \\ k_\theta = -\frac{w'}{r} \end{cases}$$

✓ *Statica*

Il taglio diventa una grandezza reattiva e va ricavato dalle equazioni di equilibrio. Dalle equazioni indefinite di equilibrio otteniamo:

$$\begin{aligned} (T_r \cdot r)' &= p \cdot r \\ (M_r \cdot r)'' - M_\theta' + (T_r \cdot r)' &= 0 \end{aligned}$$

L'equazione condensata sarà:

$$(M_r \cdot r)'' - M_\theta' + p \cdot r = 0$$

La statica in forma operatoriale diventa:

$$\begin{bmatrix} -\frac{d^2}{dr^2} & \frac{d}{dr} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_r \cdot r \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \{p \cdot r\}$$

La cinematica in forma operatoriale diventa:

$$\begin{Bmatrix} k_r \\ r \cdot k_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d^2}{dr^2} \\ \frac{d}{dr} \end{bmatrix} \cdot \{w\}$$

Il legame costitutivo diventa:

$$\begin{Bmatrix} M_r \\ M_\theta \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_r \\ k_c \end{Bmatrix}$$

Il modello risolutivo in termini di spostamento è dato da:

$$M_r = -D \left(w'' + \nu \frac{w'}{r} \right)$$

$$M_\theta = -D \left(\nu w'' + \frac{w'}{r} \right)$$

Con queste espressioni, l'equazione di equilibrio diventa:

$$w^{IV} + \frac{2}{r} w''' - \frac{1}{r^2} w'' + \frac{1}{r^3} w' = \frac{P}{D}$$