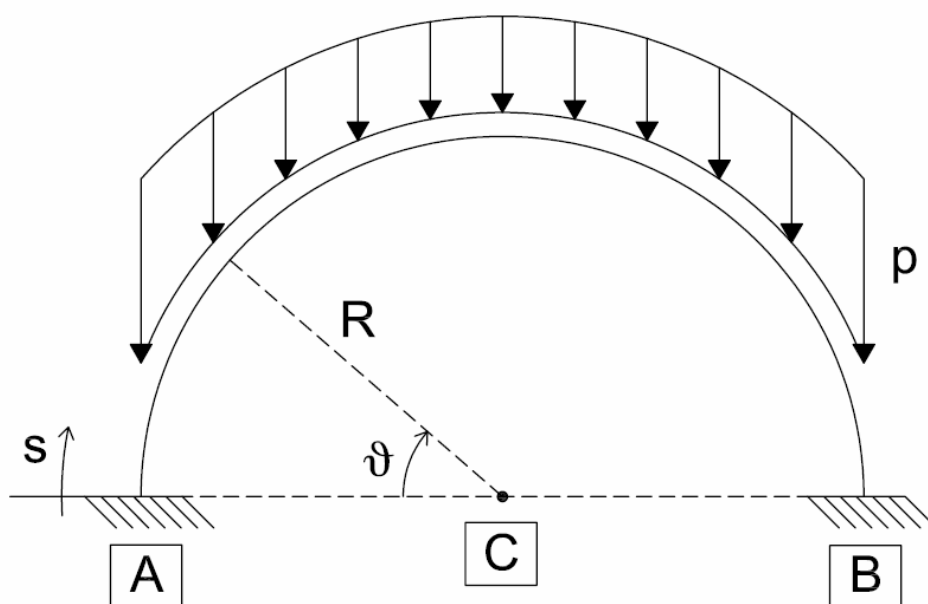


# Capitolo 1

## Arco a tutto sesto

### 1. Dati del problema

Studiamo un arco a tutto sesto incastrato agli estremi, di raggio  $R = 3m$ , sezione quadrata  $b = h = 0,5m$  (momento d'inerzia  $I = 0,00520833m^4$ ) e modulo elastico  $E = 30000000kN/m^2$ , sottoposto ad un carico ripartito  $p = 20kN/m$ . In Fig.(1) è riportato uno schema del problema in esame.



**Fig.1:** Geometria dell'arco a tutto sesto in esame.

Per la risoluzione del problema scomponiamo il carico agente  $p$  (dipendente dall'ascissa curvilinea  $s$ ) nelle sue due componenti normale ( $p_n$ ) e tangenziale ( $p_t$ ):

$$\begin{aligned} p_n &= p \sin \vartheta = p \sin \left( \frac{s}{R} \right) \\ p_t &= p \cos \vartheta = p \cos \left( \frac{s}{R} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

## 2. Risoluzione

### 2.1. Equazione di campo e condizioni al contorno

Il modello di arco, grazie alle ipotesi di indeformabilità a taglio e di inestensibilità, ci fornisce relazioni che legano gli spostamenti  $u$  agli spostamenti  $v$  ed alle rotazioni  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} v &= -Ru' \\ \varphi &= -Ru'' - \frac{u}{R} \end{aligned} \quad (2)$$

Procediamo con la risoluzione del problema attraverso il metodo degli spostamenti. L'equazione di campo del modello è:

$$-EI \left( R^2 u^{(6)} + 2u^{(4)} + \frac{u''}{R^2} \right) = p_t + Rp_n' \quad (3)$$

Trattandosi di un'equazione differenziale di sesto grado, dobbiamo imporre 6 condizioni al contorno di tipo cinematico sulla frontiera vincolata, rispettivamente 3 nel punto A ( $s = 0$ ):

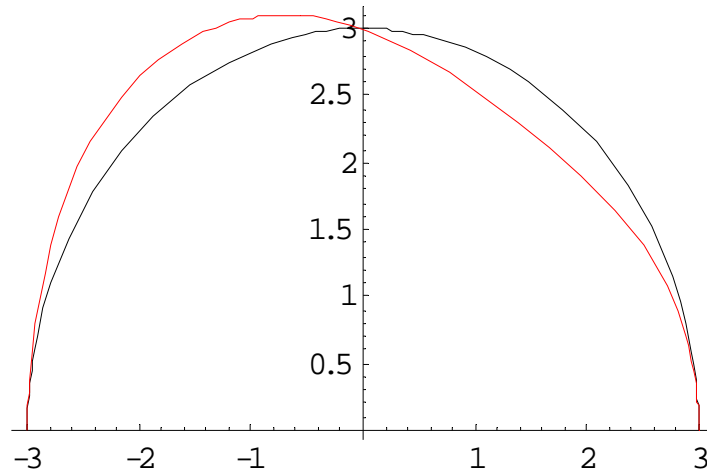
$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ v(0) &= -Ru'(0) = 0 \\ \varphi(0) &= -Ru''(0) - \frac{u(0)}{R} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

e 3 nel punto B ( $s = \pi R$ ):

$$\begin{aligned} u(\pi R) &= 0 \\ v(\pi R) &= -Ru'(\pi R) = 0 \\ \varphi(\pi R) &= -Ru''(\pi R) - \frac{u(\pi R)}{R} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

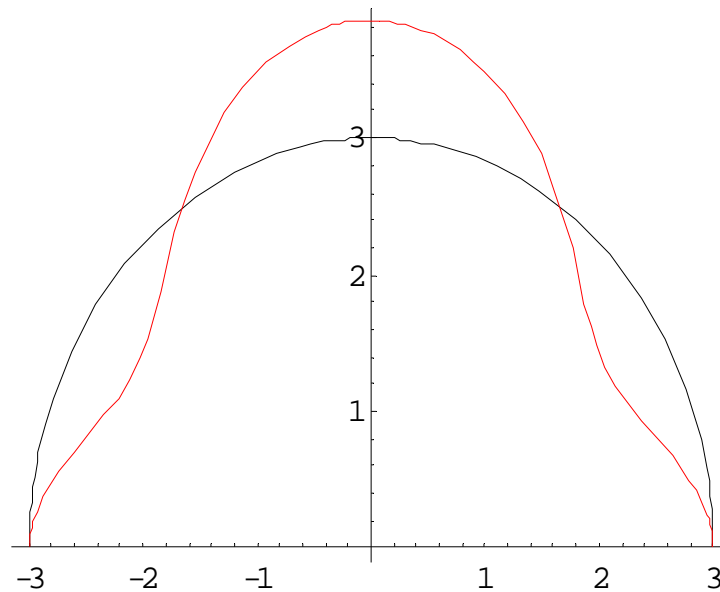
## 2.2. Calcolo degli spostamenti

Possiamo calcolare, quindi, l'andamento dello spostamento  $u$  nella variabile curvilinea  $s$ , che risulta assumere una configurazione del tipo:



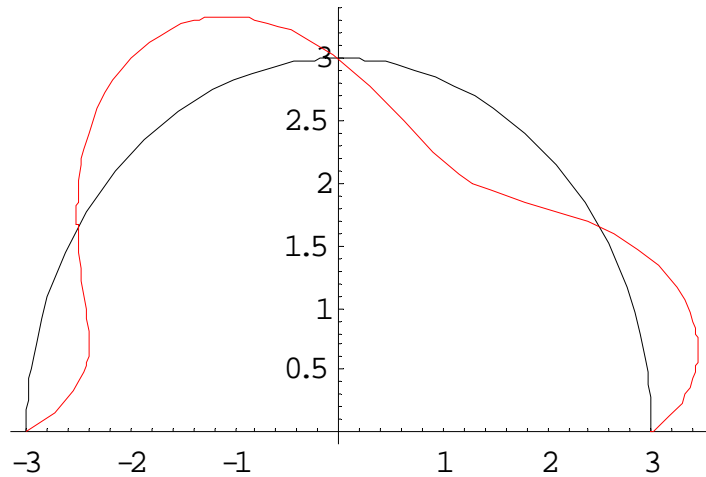
**Fig.2:** Andamento dello spostamento  $u$ .

Tramite le Eq.(2) calcoliamo l'andamento dello spostamento  $v$ , che assume una configurazione del tipo:



**Fig.3:** Andamento dello spostamento  $v$ .

e della rotazione  $\varphi$ , che assume una configurazione del tipo:

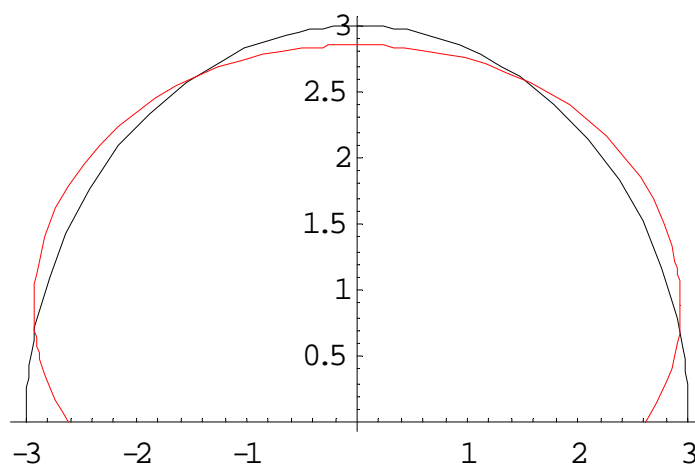
Fig.4: Andamento della rotazione  $\varphi$ .

### 2.3. Calcolo degli sforzi

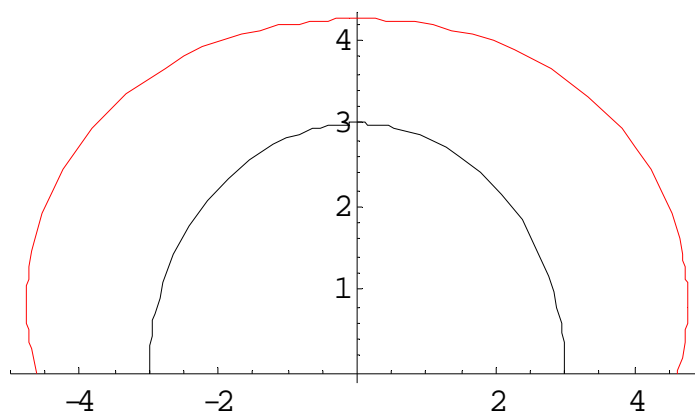
Il modello di arco ci fornisce relazioni che esprimono gli sforzi  $M$ ,  $T$  ed  $N$  in funzione dell'incognita  $u$ :

$$\begin{aligned} M &= EI \left( -Ru''' - \frac{u'}{R} \right) \\ T &= EI \left( Ru^{(4)} - \frac{u''}{R} \right) \\ N &= EIR \left( Ru' - \frac{u'''}{R} \right) + Rp_n \end{aligned} \quad (6)$$

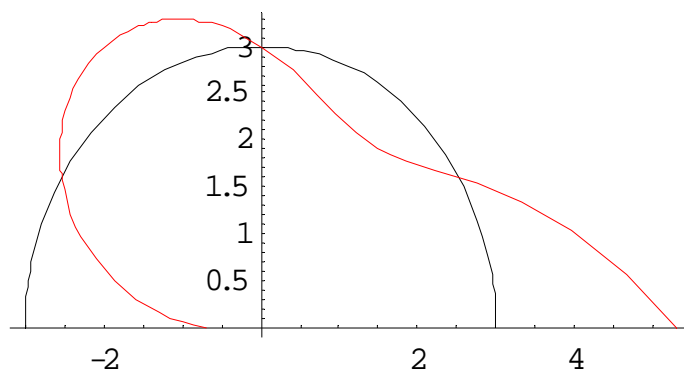
Utilizzando, quindi, le Eq.(6) calcoliamo l'andamento del momento  $M$ , che assume una configurazione del tipo:

Fig.5: Andamento del momento  $M$ .

dello sforzo normale  $N$ , che assume una configurazione del tipo:

**Fig.6:** Andamento dello sforzo normale  $N$ .

e del taglio  $T$ , che assume una configurazione del tipo:

**Fig.7:** Andamento del taglio  $T$ .

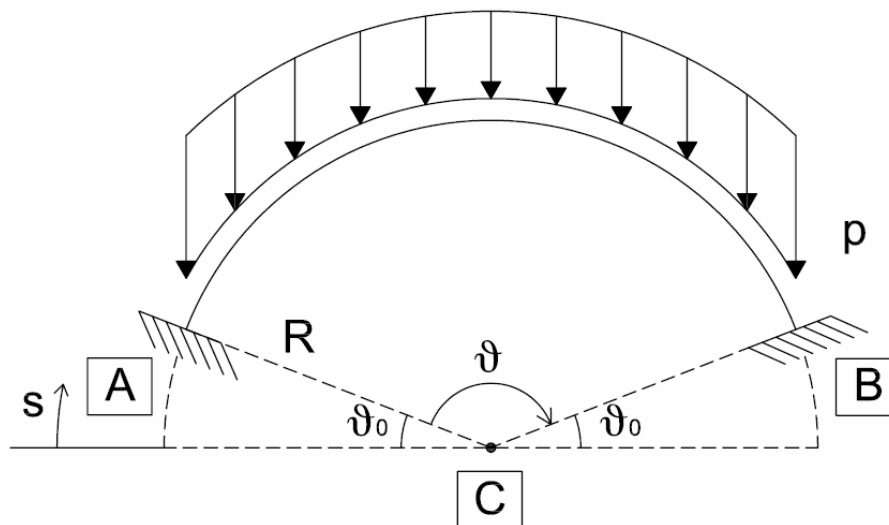
## Capitolo 2

# Arco a sesto ribassato

---

### 1. Dati del problema

Studiamo un arco a sesto ribassato  $\vartheta_0 = 30^\circ$  incastrato agli estremi. I dati sono gli stessi del caso studiato nel precedente capitolo: raggio  $R = 3m$ , sezione quadrata  $b = h = 0,5m$  (momento d'inerzia  $I = 0,00520833m^4$ ) e modulo elastico  $E = 300000000 kN/m^2$ ; l'arco è sottoposto ad un carico ripartito  $p = 20 kN/m$ . In Fig.(8) è riportato uno schema del problema in esame.



**Fig.8:** Geometria dell'arco a sesto ribassato in esame.

## 2. Risoluzione

### 2.1. Equazione di campo e condizioni al contorno

Per la risoluzione di questo problema valgono alcune considerazioni fatte per l'arco a tutto sesto: scomponiamo il carico  $p$  nelle sue due componenti come in Eq.(1); utilizziamo le Eq.(2) per esprimere gli spostamenti  $v$  e le rotazioni  $\varphi$  in funzione degli spostamenti  $u$ ; infine facciamo riferimento, per risolvere il problema con il metodo degli spostamenti, all'equazione di campo descritta in Eq.(3).

Cambiamo, rispetto al caso precedente, le condizioni al contorno: trattandosi di un'equazione differenziale di sesto grado, dobbiamo imporre 6 di tipo cinematico sulla frontiera vincolata, rispettivamente 3 nel punto A ( $s = \frac{\pi}{6}R$ ):

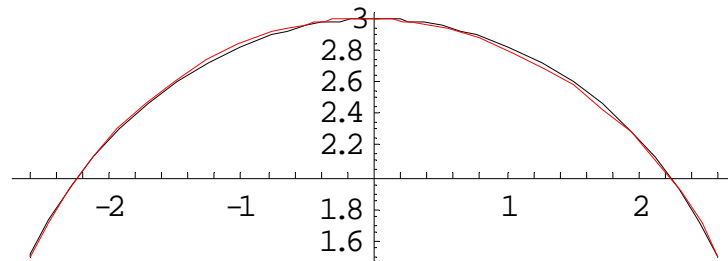
$$\begin{aligned} u\left(\frac{\pi}{6}R\right) &= 0 \\ -Ru'\left(\frac{\pi}{6}R\right) &= 0 \\ -Ru''\left(\frac{\pi}{6}R\right) - \frac{u\left(\frac{\pi}{6}R\right)}{R} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

e 3 nel punto B ( $s = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)R$ ):

$$\begin{aligned} u\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)R\right) &= 0 \\ -Ru'\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)R\right) &= 0 \\ -Ru''\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)R\right) - \frac{u\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)R\right)}{R} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

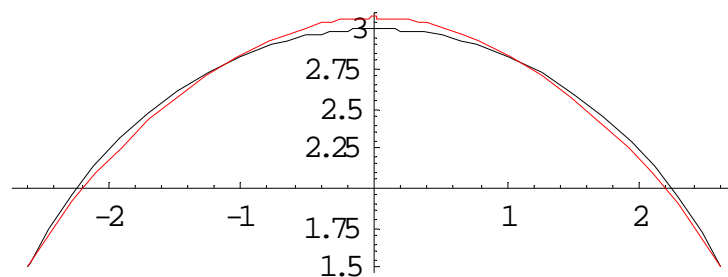
## 2.2. Calcolo degli spostamenti

Possiamo calcolare, quindi, l'andamento dello spostamento  $u$  nella variabile curvilinea  $s$ , che risulta assumere una configurazione del tipo:



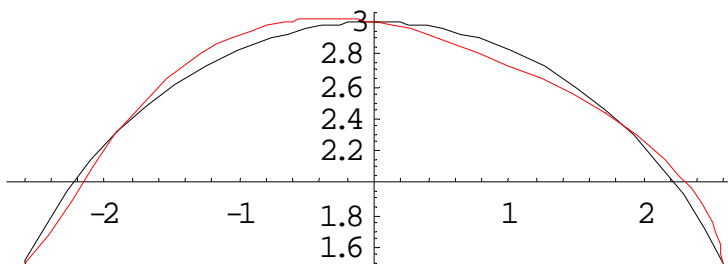
**Fig.9:** Andamento dello spostamento  $u$ .

Tramite le Eq.(2) calcoliamo l'andamento dello spostamento  $v$ , che assume una configurazione del tipo:



**Fig.10:** Andamento dello spostamento  $v$ .

e della rotazione  $\varphi$ , che assume una configurazione del tipo:

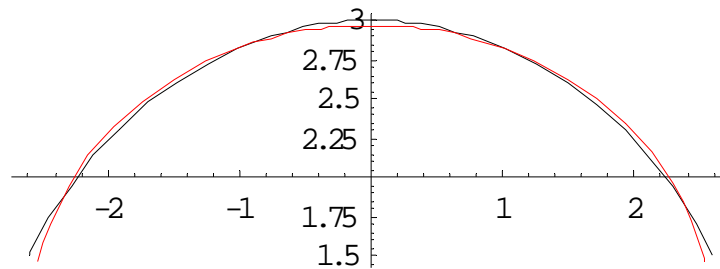


**Fig.11:** Andamento della rotazione  $\varphi$ .



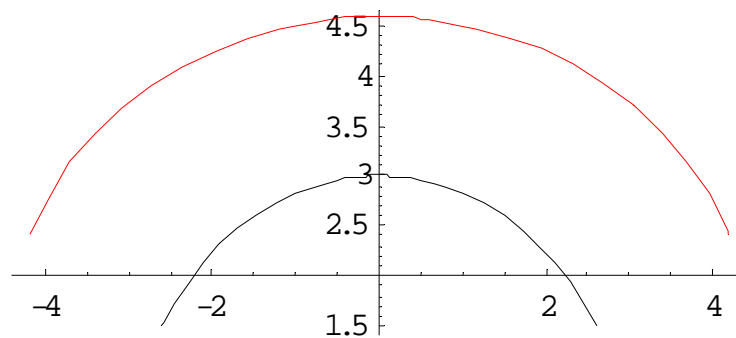
### 2.3. Calcolo degli sforzi

Utilizziamo le Eq.(6), che esprimono gli sforzi  $M$ ,  $T$  ed  $N$  in funzione dell'incognita  $u$ ; calcoliamo l'andamento del momento  $M$ , che assume una configurazione del tipo:



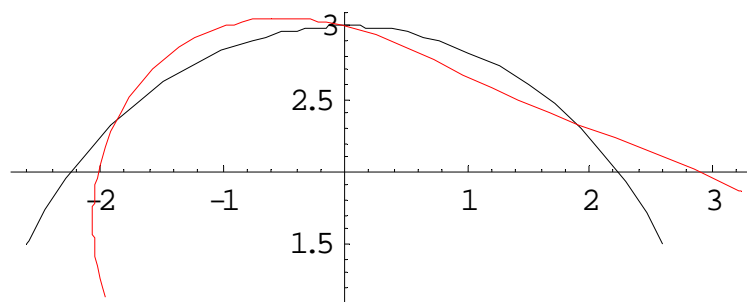
**Fig.12:** Andamento del momento  $M$ .

dello sforzo normale  $N$ , che assume una configurazione del tipo:



**Fig.13:** Andamento dello sforzo normale  $N$ .

e del taglio  $T$ , che assume una configurazione del tipo:



**Fig.14:** Andamento del taglio  $T$ .

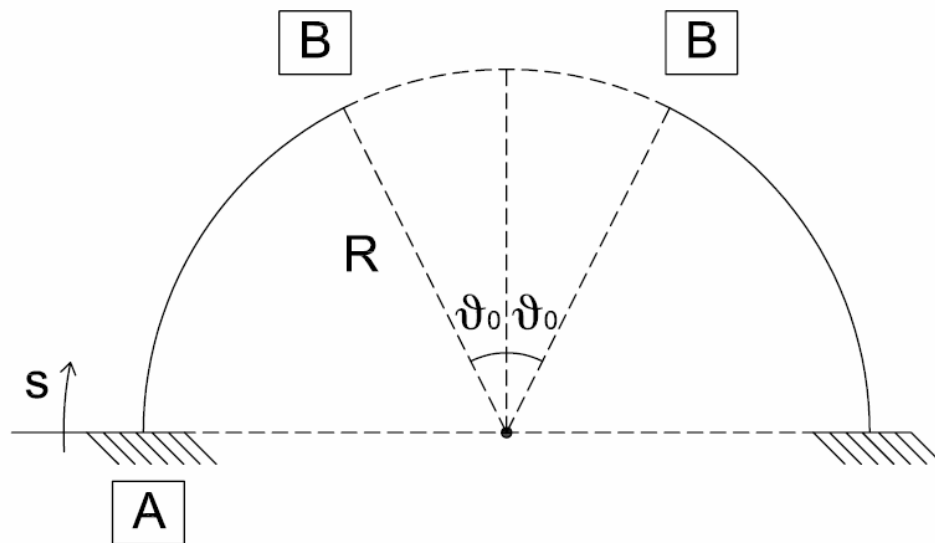
## Capitolo 3

# Arco a sesto acuto

---

### 1. Dati del problema

Studiamo un arco a sesto acuto, incastrato agli estremi, generato a partire dall'arco a tutto sesto di Capitolo 1, come mostra Fig.(15):



**Fig.15:** Generazione dell'arco a sesto acuto in esame.

I dati sono gli stessi del caso studiato nel precedente capitolo:  $\vartheta_0 = 30^\circ$ , raggio  $R = 3m$ , sezione quadrata  $b = h = 0,5m$  (momento d'inerzia  $I = 0,00520833m^4$ ) e modulo elastico  $E = 30000000kN/m^2$ ; l'arco è sottoposto ad un carico ripartito  $p = 20kN/m$ .

Il problema in esame è simmetrico: per questo studieremo mezzo arco, il cui schema è illustrato in Fig.(16), imponendo le condizioni di continuità nel punto B che ci assicureranno la simmetrica validità dei risultati ottenuti lungo l'intero arco.

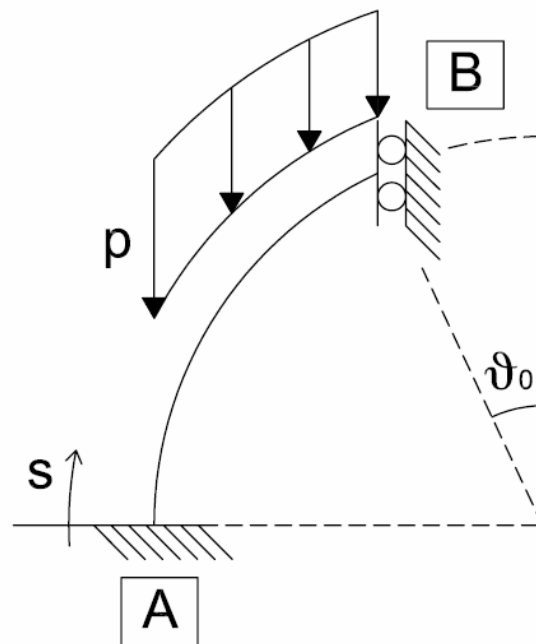


Fig.16: Geometria del mezzo arco a sesto acuto in esame.

## 2. Risoluzione

### 2.1. Equazione di campo e condizioni al contorno

Anche in questo caso valgono alcune considerazioni fatte in precedenza: scomponiamo il carico  $p$  nelle sue due componenti come in Eq.(1); utilizziamo le Eq.(2) per esprimere gli spostamenti  $v$  e le rotazioni  $\varphi$  in funzione degli spostamenti  $u$ ; infine facciamo riferimento, per risolvere il problema con il metodo degli spostamenti, all'equazione di campo descritta in Eq.(3).

Cambiamo, rispetto ai casi precedenti, le condizioni al contorno: dobbiamo imporre 3 condizioni al contorno di tipo cinematico sulla frontiera vincolata, ovvero nel punto A ( $s = 0$ ):

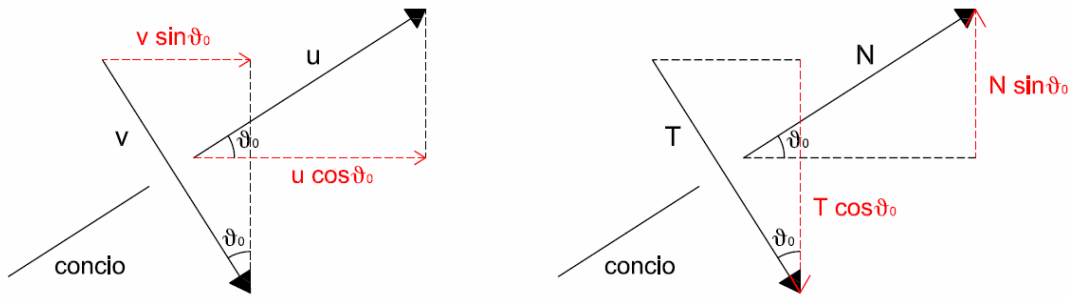
$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ -Ru'(0) &= 0 \\ -Ru''(0) - \frac{u(0)}{R} &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

e 3 condizioni di continuità (dello spostamento  $u$ , della rotazione  $\varphi$  e del taglio  $T$ )

nel punto B ( $s = \frac{\pi}{3}R$ ):

$$\begin{aligned}
u\left(\frac{\pi}{3}R\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \left(Ru'\left(\frac{\pi}{3}R\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 0 \\
-Ru''\left(\frac{\pi}{3}R\right) - \frac{u\left(\frac{\pi}{3}R\right)}{R} &= 0 \\
-EI\left(Ru^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}R\right) - \frac{u''\left(\frac{\pi}{3}R\right)}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(EIR\left(Ru^{(5)}\left(\frac{\pi}{3}R\right) - \frac{u'''\left(\frac{\pi}{3}R\right)}{R}\right) + Rp\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

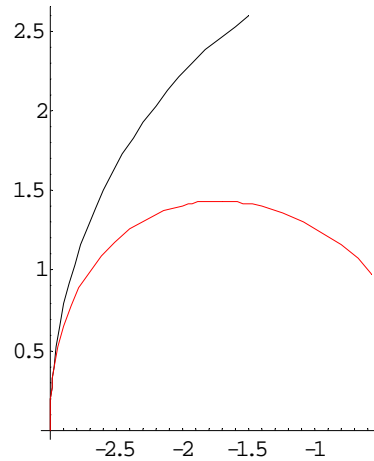
Data la non ortogonalità nel punto B tra arco e glifo, nell'impostazione delle condizioni di continuità di  $u$  e  $T$  abbiamo preso in considerazione, rispettivamente, le componenti orizzontali di  $u$  e  $v$  e quelle verticali di  $T$  ed  $N$ , come schematizzato in Fig.(17):



**Fig.17:** Impostazione delle condizioni di continuità nel punto B.

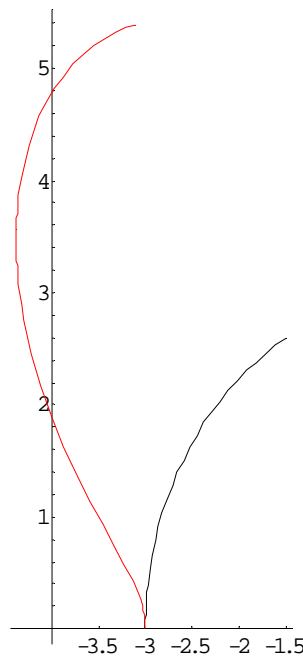
## 2.2. Calcolo degli spostamenti

Possiamo calcolare, quindi, l'andamento dello spostamento  $u$  nella variabile curvilinea  $s$ , che risulta assumere una configurazione del tipo:



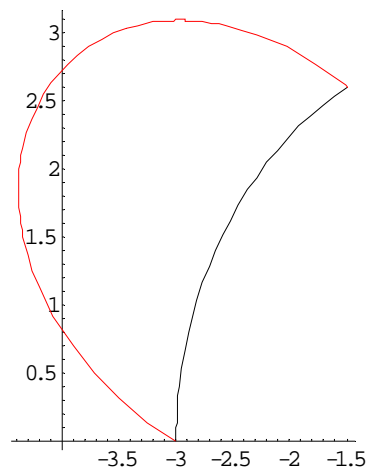
**Fig.18:** Andamento dello spostamento  $u$ .

Tramite le Eq.(2) calcoliamo l'andamento dello spostamento  $v$ , che assume una configurazione del tipo:



**Fig.19:** Andamento dello spostamento  $v$ .

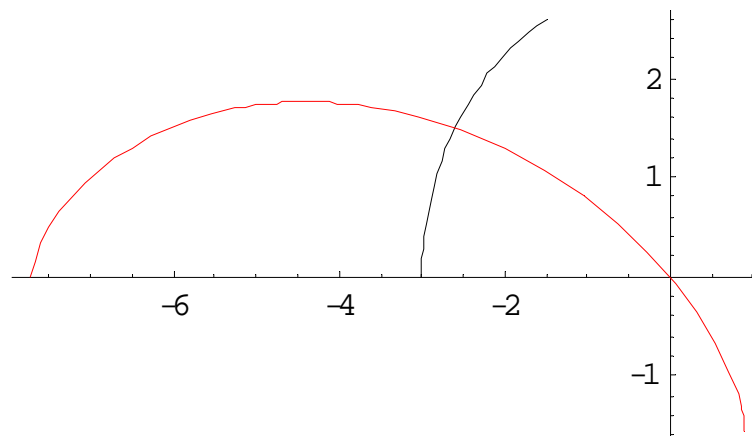
e della rotazione  $\varphi$ , che assume una configurazione del tipo:



**Fig.20:** Andamento della rotazione  $\varphi$ .

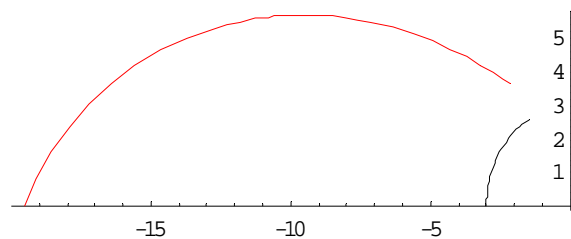
### 2.3. Calcolo degli sforzi

Utilizziamo le Eq.(6), che esprimono gli sforzi  $M$ ,  $T$  ed  $N$  in funzione dell'incognita  $u$ ; calcoliamo l'andamento del momento  $M$ , che assume una configurazione del tipo:



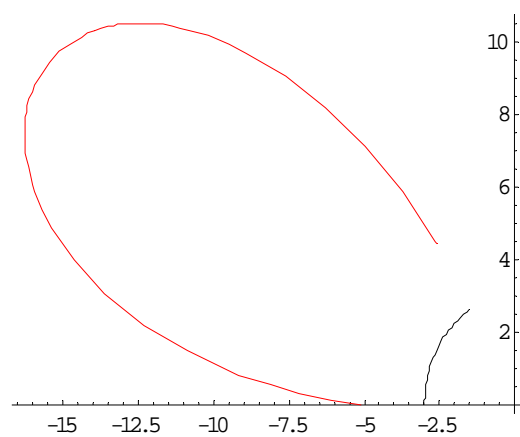
**Fig.21:** Andamento del momento  $M$ .

dello sforzo normale  $N$ , che assume una configurazione del tipo:



**Fig.22:** Andamento dello sforzo normale  $N$ .

e del taglio  $T$ , che assume una configurazione del tipo:

**Fig.23:** Andamento del taglio  $T$ .

Appendice  
**Mathematica 5.2**

---



## Equazione di campo

$$\begin{aligned} \text{eq} = & \\ & -\text{el in} \left( R^2 u^{(6)}[s] + 2 u^{(4)}[s] + \frac{u''[s]}{R^2} \right) = p \cos\left[\frac{s}{R}\right] + \frac{p}{R} \cos\left[\frac{s}{R}\right] \\ & -\text{el in} \left( \frac{u''[s]}{R^2} + 2 u^{(4)}[s] + R^2 u^{(6)}[s] \right) = p \cos\left[\frac{s}{R}\right] + \frac{p \cos\left[\frac{s}{R}\right]}{R} \end{aligned}$$

**Sol = DSolve[eq, u, s]**

$$\left\{ \left\{ u \rightarrow \text{Function}[s], \right. \right. \\ \left. \left. C[5] + s C[6] + \frac{1}{16 \text{el in}} \left( 8 R^3 (p + p R - 2 \text{el in} C[4]) \cos\left[\frac{s}{R}\right] - \right. \right. \right. \\ \left. \left. R (-15 p R^2 - 15 p R^3 + 2 p s^2 + 2 p R s^2 + 16 \text{el in} R C[1] + \right. \right. \\ \left. \left. 16 \text{el in} R s C[2] + 16 \text{el in} R^2 C[4]) \cos\left[\frac{s}{R}\right] + \right. \right. \\ \left. \left. 4 R^2 (p s + p R s + 4 \text{el in} R C[2]) \sin\left[\frac{s}{R}\right] + 8 R^2 (p s + p R s + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \text{el in} R C[2] - 2 \text{el in} C[3] - 2 \text{el in} s C[4]) \sin\left[\frac{s}{R}\right] \right) \right\} \right\}$$

**u[s\_] =**

$$\begin{aligned} & \text{ExpandAll} \left[ C[5] + s C[6] + \frac{1}{16 \text{el in}} \left( 8 R^3 (p + p R - 2 \text{el in} C[4]) \cos\left[\frac{s}{R}\right] - \right. \right. \\ & \left. \left. R (-15 p R^2 - 15 p R^3 + 2 p s^2 + 2 p R s^2 + 16 \text{el in} R C[1] + \right. \right. \\ & \left. \left. 16 \text{el in} R s C[2] + 16 \text{el in} R^2 C[4]) \cos\left[\frac{s}{R}\right] + \right. \right. \\ & \left. \left. 4 R^2 (p s + p R s + 4 \text{el in} R C[2]) \sin\left[\frac{s}{R}\right] + 8 R^2 \right. \right. \\ & \left. \left. (p s + p R s + 2 \text{el in} R C[2] - 2 \text{el in} C[3] - 2 \text{el in} s C[4]) \sin\left[\frac{s}{R}\right] \right) \right] \\ & C[5] + s C[6] + \frac{23 p R^3 \cos\left[\frac{s}{R}\right]}{16 \text{el in}} + \frac{23 p R^4 \cos\left[\frac{s}{R}\right]}{16 \text{el in}} - \frac{p R s^2 \cos\left[\frac{s}{R}\right]}{8 \text{el in}} - \\ & \frac{p R^2 s^2 \cos\left[\frac{s}{R}\right]}{8 \text{el in}} - R^2 C[1] \cos\left[\frac{s}{R}\right] - R^2 s C[2] \cos\left[\frac{s}{R}\right] - \\ & 2 R^3 C[4] \cos\left[\frac{s}{R}\right] + \frac{3 p R^2 s \sin\left[\frac{s}{R}\right]}{4 \text{el in}} + \frac{3 p R^3 s \sin\left[\frac{s}{R}\right]}{4 \text{el in}} + \\ & 2 R^3 C[2] \sin\left[\frac{s}{R}\right] - R^2 C[3] \sin\left[\frac{s}{R}\right] - R^2 s C[4] \sin\left[\frac{s}{R}\right] \end{aligned}$$

## Dati del problema

```
el = 30000000;  
in = 0.00520833;  
R = 3;  
p = 20;
```

## Arco a tutto sesto

### ■ Condizioni al contorno

```
cc1 = u[0] == 0;
cc2 = -R u'[0] == 0;
cc3 = -R u''[0] -  $\frac{u[0]}{3}$  == 0;
cc4 = u[Pi R] == 0;
cc5 = -R u'[Pi R] == 0;
cc6 = -R u''[Pi R] -  $\frac{u[Pi R]}{3}$  == 0;
```

### ■ Risoluzione

```
Sol = Solve[{cc1, cc2, cc3, cc4, cc5, cc6},
  {C[1], C[2], C[3], C[4], C[5], C[6]}]

{{C[1] → 0.000288, C[2] → -0.000201062, C[3] → 0.000687325,
  C[4] → -0.0000178547, C[5] → -0.0182442, C[6] → 0.00387153}}
```

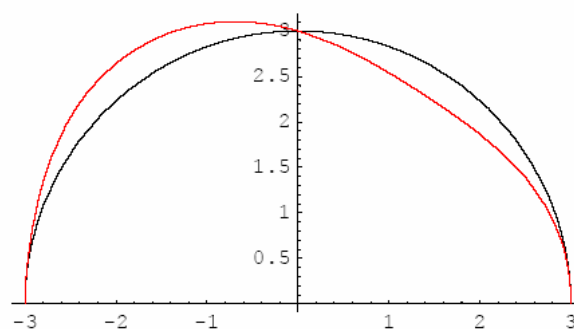
$u[s_] = u[s] /. N[Sol][[1]]$

$$-0.0182442 + 0.00387153 s + 0.0182442 \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.00180956 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] -$$

$$0.000192 s^2 \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.0170433 \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 0.00361669 s \sin\left[\frac{s}{3}\right]$$

### ■ Grafici

```
U = ParametricPlot[{R Cos[ $\frac{s}{R}$ ], R Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {-(R + 20000 u[s]) Cos[ $\frac{s}{R}$ ], (R + 20000 u[s]) Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {s, 0, Pi R}, AspectRatio → Automatic,
  PlotStyle → {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}
```

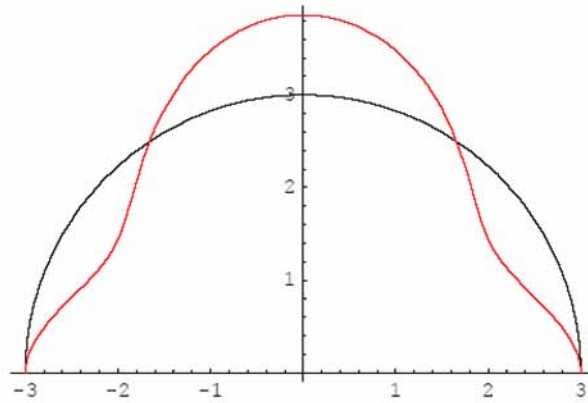


Graphics -

```
v = -R u' [s]
```

$$-3 \left( 0.00387153 - 0.00387153 \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.000821565 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.00246469 \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 0.000603186 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 0.000064 s^2 \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right)$$

```
V = ParametricPlot[{{R Cos[s/R], R Sin[s/R]},  
  {-(R + 20000 v) Cos[s/R], (R + 20000 v) Sin[s/R]}},  
  {s, 0, Pi R}, AspectRatio -> Automatic,  
  PlotStyle -> {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}]
```

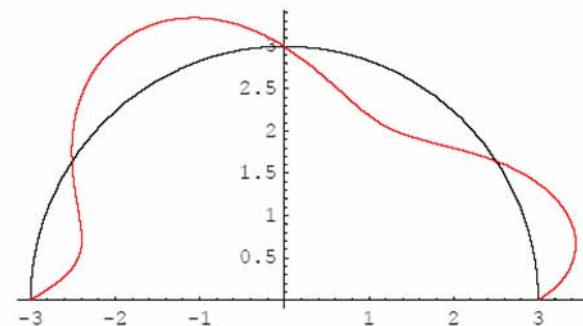


```
- Graphics -
```

```
fi = -R u'' [s] - u[s]/R
```

$$\frac{1}{3} \left( 0.0182442 - 0.00387153 s - 0.0182442 \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.00180956 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.000192 s^2 \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.0170433 \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 0.00361669 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right) - 3 \left( -3.25261 \times 10^{-19} \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.000201062 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.0000213333 s^2 \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.000687325 \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 0.000145855 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right)$$

```
FI = ParametricPlot[{{R Cos[s/R], R Sin[s/R]},  
  {-(R + 20000 fi) Cos[s/R], (R + 20000 fi) Sin[s/R]}},  
  {s, 0, Pi R}, AspectRatio -> Automatic,  
  PlotStyle -> {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}]
```



```
- Graphics -
```

```

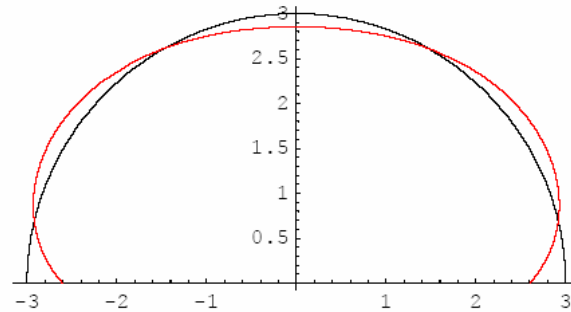
m = e1 in  $\left(-R u'''[s] - \frac{u'[s]}{R}\right)$ 
156250.  $\left(\frac{1}{3} \left(-0.00387153 + 0.00387153 \cos\left[\frac{s}{3}\right] - \right.\right.$ 
 $0.000821565 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.00246469 \sin\left[\frac{s}{3}\right] +$ 
 $0.000603186 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 0.000064 s^2 \sin\left[\frac{s}{3}\right]) -$ 
 $3 \left(0.0000280462 \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 5.95158 \times 10^{-6} s \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.000145855\right.$ 
 $\left.\sin\left[\frac{s}{3}\right] + 0.0000670207 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 7.11112 \times 10^{-6} s^2 \sin\left[\frac{s}{3}\right]\right)$ 

```

```

MOMENTO = ParametricPlot[{{R Cos[ $\frac{s}{R}$ ], R Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
{-(R + 0.03 m) Cos[ $\frac{s}{R}$ ], (R + 0.03 m) Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
{s, 0, Pi R}, AspectRatio -> Automatic,
PlotStyle -> {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}]

```



- Graphics -

```

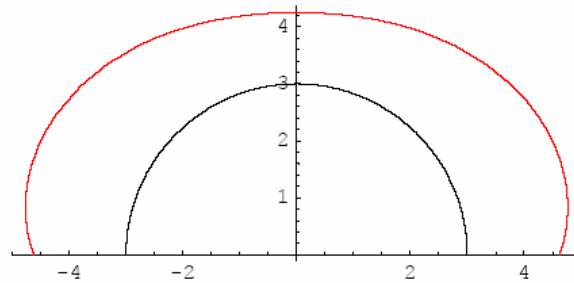
n = e1 in  $R \left(R u''''[s] - \frac{u''''[s]}{R}\right) + R p \sin\left[\frac{s}{R}\right]$ 
60 Sin[ $\frac{s}{3}$ ] + 468750.
 $\left(3 \left(0.0000415642 \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 8.8202 \times 10^{-6} s \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 5.95158 \times 10^{-6}\right.\right.$ 
 $\left.\sin\left[\frac{s}{3}\right] - 7.44674 \times 10^{-6} s \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 7.90124 \times 10^{-7} s^2 \sin\left[\frac{s}{3}\right]\right) +$ 
 $\frac{1}{3} \left(-0.0000280462 \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 5.95158 \times 10^{-6} s \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.000145855\right.$ 
 $\left.\sin\left[\frac{s}{3}\right] - 0.0000670207 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 7.11112 \times 10^{-6} s^2 \sin\left[\frac{s}{3}\right]\right)$ 

```

```

NORMALE = ParametricPlot[{{R Cos[ $\frac{s}{R}$ ], R Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {-(R + 0.03 n) Cos[ $\frac{s}{R}$ ], (R + 0.03 n) Sin[ $\frac{s}{R}$ ]}}],
{s, 0, Pi R}, AspectRatio -> Automatic,
PlotStyle -> {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}]

```



- Graphics -

```

t = e1 in R  $\left( R u''''[s] - \frac{u''[s]}{R} \right)$ 

```

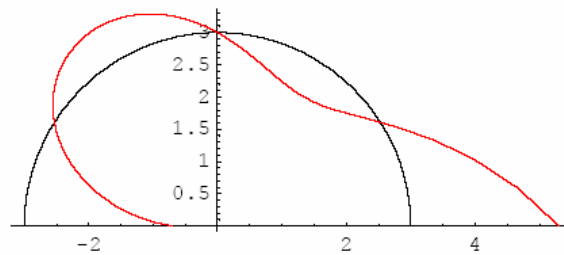
468750.

$$\begin{aligned}
 & \left( 3 \left( -0.0000545699 \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.0000223402 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 2.37037 \times 10^{-6} s^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.000057672 \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 0.0000122384 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right) + \\
 & \quad \frac{1}{3} \left( 3.25261 \times 10^{-19} \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.000201062 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.0000213333 \right. \\
 & \quad \left. s^2 \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.000687325 \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 0.000145855 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right) \Big)
 \end{aligned}$$

```

TAGLIO = ParametricPlot[{{R Cos[ $\frac{s}{R}$ ], R Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {-(R + 0.03 t) Cos[ $\frac{s}{R}$ ], (R + 0.03 t) Sin[ $\frac{s}{R}$ ]}}],
{s, 0, Pi R}, AspectRatio -> Automatic,
PlotStyle -> {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}]

```



- Graphics -

## Arco a sesto ribassato

### ■ Condizioni al contorno

$$\begin{aligned}cc1 &= u\left[R \frac{\pi}{6}\right] == 0; \\cc2 &= -R u' \left[R \frac{\pi}{6}\right] == 0; \\cc3 &= -R u'' \left[R \frac{\pi}{6}\right] - \frac{u\left[R \frac{\pi}{6}\right]}{3} == 0; \\cc4 &= u\left[R \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right] == 0; \\cc5 &= -R u' \left[R \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right] == 0; \\cc6 &= -R u'' \left[R \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right] - \frac{u\left[R \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right]}{3} == 0;\end{aligned}$$

### ■ Risoluzione

```
Sol = Solve[{cc1, cc2, cc3, cc4, cc5, cc6},
  {C[1], C[2], C[3], C[4], C[5], C[6]}]

{{C[1] → 0.000239687, C[2] → -0.000201062, C[3] → 0.000809308,
  C[4] → -0.0000437404, C[5] → -0.020087, C[6] → 0.0042626}}
```

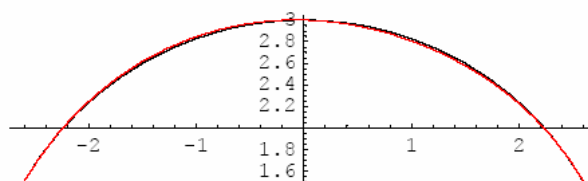
$$u[s_] = u[s] /. N[Sol][[1]]$$

$$-0.020087 + 0.0042626 s + 0.0200768 \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.00180956 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] -$$

$$0.000192 s^2 \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.0181411 \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 0.00384967 s \sin\left[\frac{s}{3}\right]$$

### ■ Grafici

```
U = ParametricPlot[{{R Cos[ $\frac{s}{R}$ ], R Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {- (R + 20000 u[s]) Cos[ $\frac{s}{R}$ ], (R + 20000 u[s]) Sin[ $\frac{s}{R}$ ]}}],
  {s, R  $\frac{\pi}{6}$ , R ( $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ )}, AspectRatio → Automatic,
  PlotStyle → {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}
```

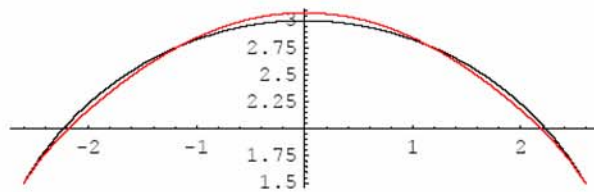


- Graphics -

```
v = -R u' [s]
```

```
-3 (0.0042626 - 0.00423748 Cos[ $\frac{s}{3}$ ] + 0.000899222 s Cos[ $\frac{s}{3}$ ] -  
0.00284261 Sin[ $\frac{s}{3}$ ] - 0.000603186 s Sin[ $\frac{s}{3}$ ] + 0.000064 s^2 Sin[ $\frac{s}{3}$ ])
```

```
V = ParametricPlot[{{R Cos[ $\frac{s}{R}$ ], R Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},  
{-(R + 20000 v) Cos[ $\frac{s}{R}$ ], (R + 20000 v) Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},  
{s, R  $\frac{\text{Pi}}$  / 6, R ( $\frac{\text{Pi}}$  / 2 +  $\frac{\text{Pi}}$  / 3)}, AspectRatio -> Automatic,  
PlotStyle -> {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}
```

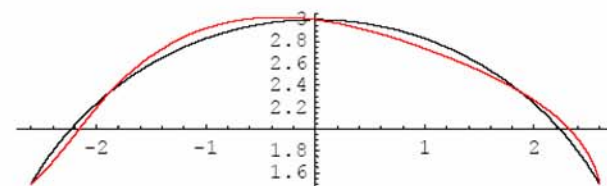


```
- Graphics -
```

```
fi = -R u'' [s] -  $\frac{u[s]}{R}$ 
```

```
 $\frac{1}{3}$  (0.020087 - 0.0042626 s - 0.0200768 Cos[ $\frac{s}{3}$ ] - 0.00180956 s Cos[ $\frac{s}{3}$ ] +  
0.000192 s^2 Cos[ $\frac{s}{3}$ ] + 0.0181411 Sin[ $\frac{s}{3}$ ] - 0.00384967 s Sin[ $\frac{s}{3}$ ]) -  
3 (-0.0000483132 Cos[ $\frac{s}{3}$ ] - 0.000201062 s Cos[ $\frac{s}{3}$ ] + 0.0000213333  
s^2 Cos[ $\frac{s}{3}$ ] + 0.000809308 Sin[ $\frac{s}{3}$ ] - 0.000171741 s Sin[ $\frac{s}{3}$ ])
```

```
FI = ParametricPlot[{{R Cos[ $\frac{s}{R}$ ], R Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},  
{-(R + 20000 fi) Cos[ $\frac{s}{R}$ ], (R + 20000 fi) Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},  
{s, R  $\frac{\text{Pi}}$  / 6, R ( $\frac{\text{Pi}}$  / 2 +  $\frac{\text{Pi}}$  / 3)}, AspectRatio -> Automatic,  
PlotStyle -> {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}
```

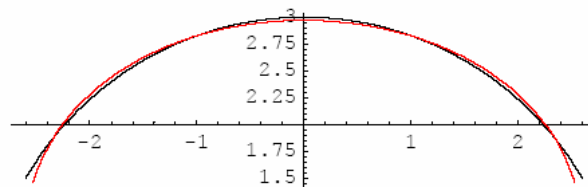


```
- Graphics -
```

$$m = e l \ln \left( -R u'''[s] - \frac{u'[s]}{R} \right)$$

$$156250. \left( \frac{1}{3} \left( -0.0042626 + 0.00423748 \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.000899222 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.00284261 \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 0.000603186 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 0.000064 s^2 \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right) - 3 \left( 0.0000687073 \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.0000145801 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.000155636 \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 0.0000670207 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 7.11112 \times 10^{-6} s^2 \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right) \right)$$

```
MOMENTO = ParametricPlot[{ {R Cos[ $\frac{s}{R}$ ], R Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {-(R + 0.03 m) Cos[ $\frac{s}{R}$ ], (R + 0.03 m) Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {s, R  $\frac{\text{Pi}}$  / 6, R ( $\frac{\text{Pi}}$  / 2 +  $\frac{\text{Pi}}$  / 3)}}, AspectRatio -> Automatic,
  PlotStyle -> {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}
```

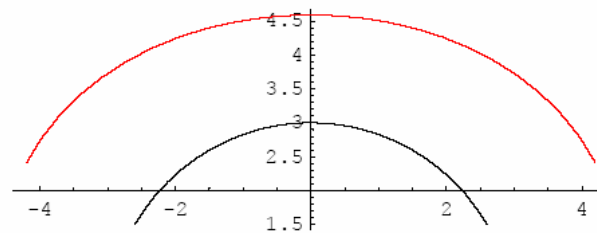


- Graphics -

$$n = e l \ln R \left( R u''''[s] - \frac{u''[s]}{R} \right) + R p \sin\left[\frac{s}{R}\right]$$

$$60 \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 468750. \left( 3 \left( 0.0000370463 \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 7.86147 \times 10^{-6} s \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.0000127908 \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 7.44674 \times 10^{-6} s \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 7.90124 \times 10^{-7} s^2 \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right) + \frac{1}{3} \left( -0.0000687073 \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.0000145801 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.000155636 \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 0.0000670207 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 7.11112 \times 10^{-6} s^2 \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right) \right)$$

```
NORMALE = ParametricPlot[{ {R Cos[ $\frac{s}{R}$ ], R Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {-(R + 0.03 n) Cos[ $\frac{s}{R}$ ], (R + 0.03 n) Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {s, R  $\frac{\text{Pi}}$  / 6, R ( $\frac{\text{Pi}}$  / 2 +  $\frac{\text{Pi}}$  / 3)}}, AspectRatio -> Automatic,
  PlotStyle -> {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}
```



- Graphics -

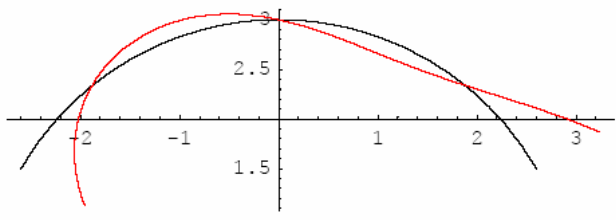


```

t = e1 in R (R u''''[s] -  $\frac{u''[s]}{R}$ )
468750.
(3 (-0.0000664589 Cos[ $\frac{s}{3}$ ] + 0.0000223402 s Cos[ $\frac{s}{3}$ ] - 2.37037 x 10-6 s2
Cos[ $\frac{s}{3}$ ] + 0.0000441182 Sin[ $\frac{s}{3}$ ] - 9.36218 x 10-6 s Sin[ $\frac{s}{3}$ ]) +
 $\frac{1}{3}$  (0.0000483132 Cos[ $\frac{s}{3}$ ] + 0.000201062 s Cos[ $\frac{s}{3}$ ] - 0.0000213333
s2 Cos[ $\frac{s}{3}$ ] - 0.000809308 Sin[ $\frac{s}{3}$ ] + 0.000171741 s Sin[ $\frac{s}{3}$ ]))

TAGLIO = ParametricPlot[{{R Cos[ $\frac{s}{R}$ ], R Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
{-(R + 0.03 t) Cos[ $\frac{s}{R}$ ], (R + 0.03 t) Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
{s, R  $\frac{\text{Pi}}{6}$ , R ( $\frac{\text{Pi}}{2} + \frac{\text{Pi}}{3}$ )}, AspectRatio -> Automatic,
PlotStyle -> {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}]

```



- Graphics -

## Arco a sesto acuto

### ■ Condizioni al contorno

```

cc1 = u[0] == 0;
cc2 = -R u'[0] == 0;
cc3 = -R u''[0] -  $\frac{u[0]}{R}$  == 0;
cc4 = u[R  $\frac{\text{Pi}}{3}$ ] Cos[ $\frac{\text{Pi}}{6}$ ] - (R u'[R  $\frac{\text{Pi}}{3}$ ]) Sin[ $\frac{\text{Pi}}{6}$ ] == 0;
cc5 = -R u''[R  $\frac{\text{Pi}}{3}$ ] -  $\frac{u[R \frac{\text{Pi}}{3}]}{R}$  == 0;
cc6 = -e1 in (R u''''[R  $\frac{\text{Pi}}{3}$ ] -  $\frac{u'''[R \frac{\text{Pi}}{3}]}{R}$ ) Cos[ $\frac{\text{Pi}}{6}$ ] +
(e1 in R (R u''''[R  $\frac{\text{Pi}}{3}$ ] -  $\frac{u'''[R \frac{\text{Pi}}{3}]}{R}$ ) + R p Sin[ $\frac{\text{Pi}}{3}$ ])
Sin[ $\frac{\text{Pi}}{6}$ ] == 0;

```

## ■ Risoluzione

```
Sol = Solve[{cc1, cc2, cc3, cc4, cc5, cc6},
  {C[1], C[2], C[3], C[4], C[5], C[6]}]

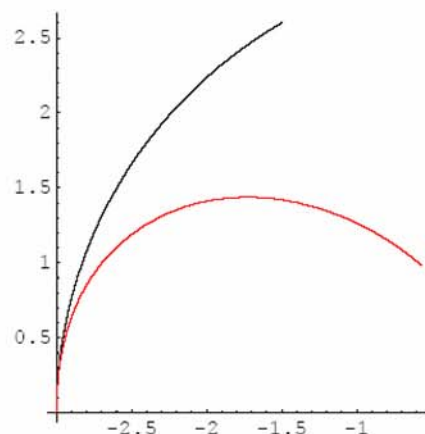
{{C[1] → 0.000288, C[2] → -0.000142367, C[3] → 0.000326025,
  C[4] → 0.0000715304, C[5] → -0.0134174, C[6] → 0.00225938}}

u[s_] = u[s] /. N[Sol][[1]]

-0.0134174 + 0.00225938 s + 0.0134174 Cos[ $\frac{s}{3}$ ] + 0.00128131 s Cos[ $\frac{s}{3}$ ] -
  0.000192 s^2 Cos[ $\frac{s}{3}$ ] - 0.0106221 Sin[ $\frac{s}{3}$ ] + 0.00281223 s Sin[ $\frac{s}{3}$ ]
```

## ■ Grafici

```
U = ParametricPlot[{{-R Cos[ $\frac{s}{R}$ ], R Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {-(R + 20000 u[s]) Cos[ $\frac{s}{R}$ ], (R + 20000 u[s]) Sin[ $\frac{s}{R}$ ]}}],
  {s, 0, R  $\frac{\text{Pi}}$  3}, AspectRatio → Automatic,
  PlotStyle → {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}
```



- Graphics -

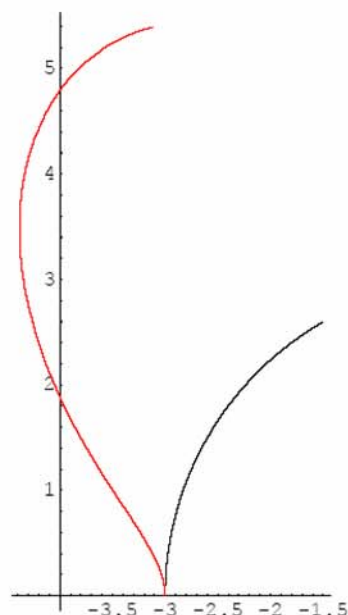
**v = -R u' [s]**

```
-3 (0.00225938 - 0.00225938 Cos[ $\frac{s}{3}$ ] + 0.000553409 s Cos[ $\frac{s}{3}$ ] -
  0.00166023 Sin[ $\frac{s}{3}$ ] - 0.000427102 s Sin[ $\frac{s}{3}$ ] + 0.000064 s^2 Sin[ $\frac{s}{3}$ ])
```

```

V = ParametricPlot[{{-R Cos[ $\frac{s}{R}$ ], R Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {-(R + 20000 v) Cos[ $\frac{s}{R}$ ], (R + 20000 v) Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {s, 0, R  $\frac{\text{Pi}}$ }, AspectRatio -> Automatic,
  PlotStyle -> {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}]

```

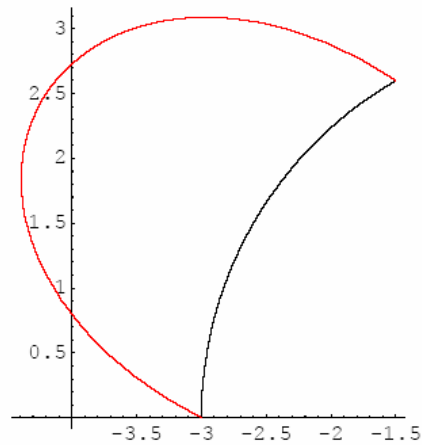


- Graphics -

$$fi = -R u''[s] - \frac{u[s]}{R}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} \left( 0.0134174 - 0.00225938 s - 0.0134174 \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.00128131 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] + \right. \\
& \quad \left. 0.000192 s^2 \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.0106221 \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 0.00281223 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right) - \\
& 3 \left( -2.1684 \times 10^{-19} \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.000142367 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.0000213333 \right. \\
& \quad \left. s^2 \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.000326025 \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 0.0000564696 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right)
\end{aligned}$$

```
FI = ParametricPlot[{{-R Cos[ $\frac{s}{R}$ ], R Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {-(R + 20000 fi) Cos[ $\frac{s}{R}$ ], (R + 20000 fi) Sin[ $\frac{s}{R}$ ]}}],
{s, 0, R  $\frac{\text{Pi}}$ }, AspectRatio → Automatic,
PlotStyle → {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}
```

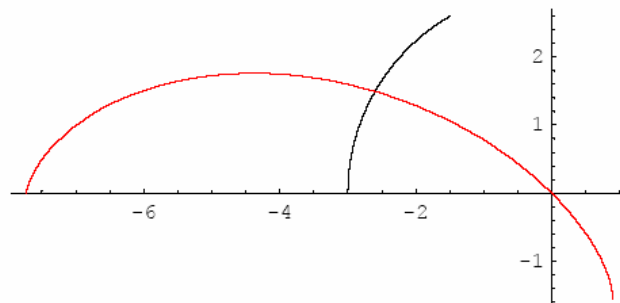


- Graphics -

$$m = \text{el in} \left( -R u'''[s] - \frac{u'[s]}{R} \right)$$

$$156250. \left( \frac{1}{3} \left( -0.00225938 + 0.00225938 \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.000553409 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.00166023 \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 0.000427102 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 0.000064 s^2 \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right) - 3 \left( -0.0000336925 \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.0000238435 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.0000564696 \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 0.0000474558 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 7.11112 \times 10^{-6} s^2 \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right) \right)$$

```
MOMENTO = ParametricPlot[{{-R Cos[ $\frac{s}{R}$ ], R Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {-(R + 0.3 m) Cos[ $\frac{s}{R}$ ], (R + 0.3 m) Sin[ $\frac{s}{R}$ ]}}],
{s, 0, R  $\frac{\text{Pi}}$ }, AspectRatio → Automatic,
PlotStyle → {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}
```



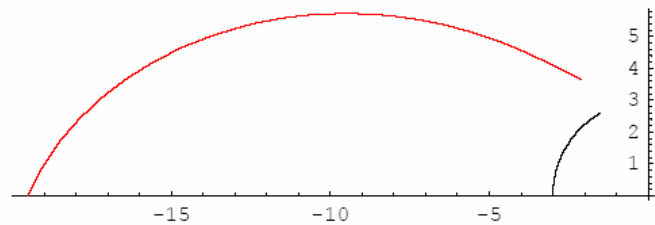
- Graphics -

$$n = e \ln R \left( R u''''[s] - \frac{u''[s]}{R} \right) + R p \sin\left[\frac{s}{R}\right]$$

$$60 \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 468750.$$

$$\begin{aligned} & \left( 3 \left( 0.0000353808 \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.0000121308 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.0000238435 \right. \right. \\ & \quad \left. \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 5.27287 \times 10^{-6} s \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 7.90124 \times 10^{-7} s^2 \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right) + \\ & \quad \frac{1}{3} \left( 0.0000336925 \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.0000238435 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.0000564696 \right. \\ & \quad \left. \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 0.0000474558 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 7.11112 \times 10^{-6} s^2 \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right) \end{aligned}$$

```
NORMALE = ParametricPlot[{{-R Cos[s/R], R Sin[s/R]},
  {(R + 0.3 n) Cos[s/R], (R + 0.3 n) Sin[s/R]}},
{s, 0, R Pi/3}, AspectRatio -> Automatic,
PlotStyle -> {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}
```



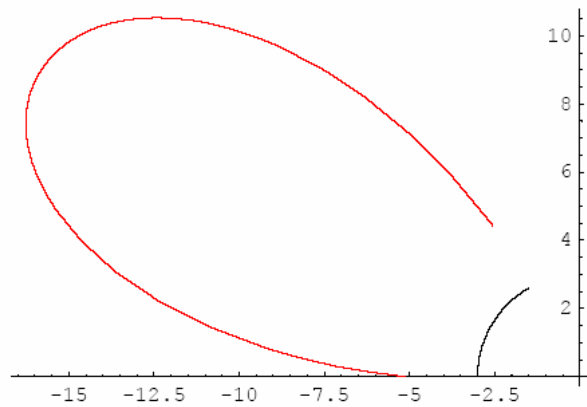
- Graphics -

$$t = e \ln R \left( R u''''[s] - \frac{u''[s]}{R} \right)$$

$$468750.$$

$$\begin{aligned} & \left( 3 \left( 5.02027 \times 10^{-6} \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.0000158186 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 2.37037 \times 10^{-6} s^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.0000586866 \sin\left[\frac{s}{3}\right] - 0.0000221701 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right) + \\ & \quad \frac{1}{3} \left( 2.1684 \times 10^{-19} \cos\left[\frac{s}{3}\right] + 0.000142367 s \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.0000213333 \right. \\ & \quad \left. s^2 \cos\left[\frac{s}{3}\right] - 0.000326025 \sin\left[\frac{s}{3}\right] + 0.0000564696 s \sin\left[\frac{s}{3}\right] \right) \end{aligned}$$

```
TAGLIO = ParametricPlot[{{-R Cos[ $\frac{s}{R}$ ], R Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {-(R + 0.3 t) Cos[ $\frac{s}{R}$ ], (R + 0.3 t) Sin[ $\frac{s}{R}$ ]},
  {s, 0, R  $\frac{\text{Pi}}$ }, AspectRatio → Automatic,
  PlotStyle → {{GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}}
```



▪ Graphics ▪