

Capitolo 5

La trave curva

1. Generalità

La trave curva è un elemento strutturale definito come il continuo monodimensionale polare con un'unica differenza: nella trave curva l'asse non è rettilineo ma dotato di curvatura. In generale ogni punto sarà dotato di una sua curvatura indipendente da quella degli altri punti. Per descrivere un elemento così definito si utilizzerà l'ascissa curvilinea, cioè una coordinata che corre lungo l'asse della trave. Nella fig. 1 è riportata una generica trave curva con l'ascissa curvilinea scelta.

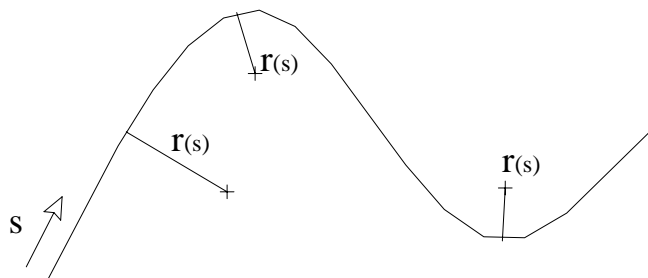


Fig.1: Schematizzazione di una trave curva ed ascissa curvilinea.

Passiamo ora allo studio della trave curva attraverso i nostri soliti mezzi, cioè la cinematica (per scrivere le equazioni implicite di congruenza), la statica (per scrivere le equazioni indefinite dell'equilibrio) ed il legame costitutivo che le relaziona.

2. La cinematica

Gli spostamenti che una trave curva può subire sono tre:

- u : spostamento lungo la tangente nel punto in esame;
- v : spostamento lungo la normale al punto in esame;
- φ : rotazione della sezione passante nel punto in esame.

Prendiamo in considerazione una trave curva ed isoliamo un concio infinitesimo. Approssimeremo questo concio in un arco con ampiezza $d\vartheta$ e

raggio di curvatura costante. A seguito di azioni (quali ad esempio carichi, variazioni termiche ecc..) l'arco in esame si deformerà; in particolare il punto P si posizionerà nel punto P', mentre il punto Q si sposterà in Q'.

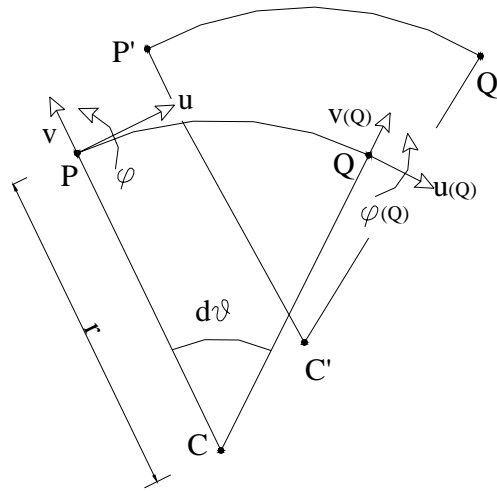


Fig.2: Spostamento subito da un concio infinitesimo di trave curva.

Ma come abbiamo visto negli studi precedenti, abbiamo bisogno di trovare le deformazioni generalizzate che poi risulteranno essere le grandezze cinematiche duali di quelle statiche sottraendo agli spostamenti totali di Q quelli rigidi ed ottenendo quindi le deformazioni pure.

Gli spostamenti totali di Q sono presto scritti:

$$\begin{Bmatrix} u_{(Q)} \\ v_{(Q)} \\ \varphi_{(Q)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{du}{ds} ds \\ \frac{dv}{ds} ds \\ \frac{d\varphi}{ds} ds \end{Bmatrix} \quad (1)$$

e sono pari agli spostamenti subiti dal punto P sommati all'incremento di spostamento infinitesimo nel tratto PQ.

Passiamo ora al calcolo dello spostamento rigido del punto Q. Per fare questo applichiamo separatamente i tre tipi di spostamento rigidi che una trave curva può subire. Iniziamo imprimendo uno spostamento rigido u tangente all'asse nel punto P.

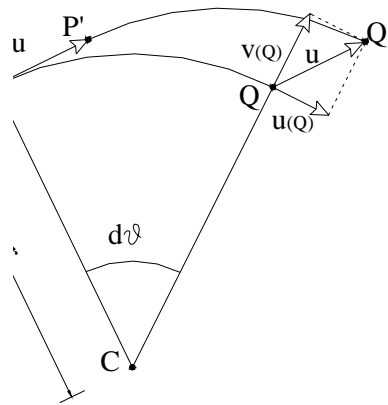


Fig.3: Spostamento rigido u subito da un concio infinitesimo di trave curva.

In Q si avranno due contributi di spostamento rigido, uno in direzione $u_{(Q)}$ ed uno in direzione $v_{(Q)}$ pari a:

$$u_{(Q)} = u \cdot \cos d\vartheta$$

$$v_{(Q)} = u \cdot \sin d\vartheta$$

Passiamo ora a quantizzare gli effetti di uno spostamento rigido v in direzione normale all'asse nel punto P.

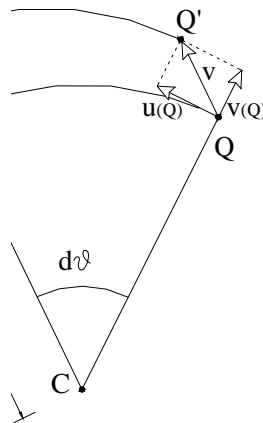


Fig.4: Spostamento rigido v subito da un concio infinitesimo di trave curva.

In Q si avranno due contributi di spostamento rigido, uno in direzione $u_{(Q)}$ ed uno in direzione $v_{(Q)}$ pari a:

$$v_{(Q)} = v \cdot \cos d\vartheta$$

$$u_{(Q)} = -v \cdot \sin d\vartheta$$

Infine applichiamo una rotazione rigida, sempre in P, pari a φ .

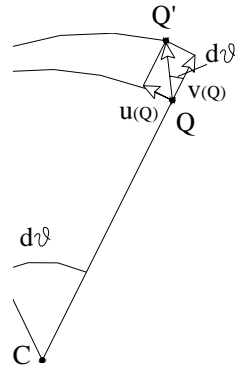


Fig.5: Rotazione rigida φ in P subita da un concio infinitesimo di trave curva.

In Q si avranno due contributi di spostamento rigido, uno in direzione $u_{(Q)}$ ed uno in direzione $v_{(Q)}$ pari a:

$$v_{(Q)} = \varphi \cdot ds \cdot \cos d\vartheta$$

$$u_{(Q)} = -\varphi \cdot ds \cdot \sin d\vartheta$$

in cui abbiamo approssimato $QQ' \cong \varphi \cdot ds$.

A questo punto è possibile conoscere la posizione del punto Q a seguito di uno spostamento rigido generico applicato nel punto P; basta sommare tutti i contributi appena scritti nelle giuste direzioni:

$$\begin{Bmatrix} u_{(Q)R} \\ v_{(Q)R} \\ \varphi_{(Q)R} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \cdot \cos d\vartheta - v \cdot \sin d\vartheta - \varphi \cdot ds \cdot \sin d\vartheta \\ v \cdot \sin d\vartheta + u \cdot \cos d\vartheta + \varphi \cdot ds \cdot \cos d\vartheta \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

Semplificando queste equazioni, ponendo:

$$\cos d\vartheta \cong 1$$

$$\sin d\vartheta \cong d\vartheta$$

ed eliminando gli infinitesimi di ordine superiore si ottengono gli spostamenti rigidi totali del punto Q:

$$\begin{Bmatrix} u_{(Q)R} \\ v_{(Q)R} \\ \varphi_{(Q)R} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -v \cdot d\vartheta \\ u \cdot d\vartheta + \varphi \cdot ds \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

In conclusione otteniamo le deformazioni pure come differenza degli spostamenti totali del generico punto Q e gli spostamenti rigidi:

$$\begin{Bmatrix} du_{(\varrho)} \\ dv_{(\varrho)} \\ d\varphi_{(\varrho)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{ds} ds - (-v \cdot d\vartheta) \\ \frac{dv}{ds} ds - (u \cdot d\vartheta + \varphi \cdot ds) \\ \frac{d\varphi}{ds} ds \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Esprimendo

$$d\vartheta = \frac{ds}{r}$$

si ottengono le deformazioni generalizzate:

$$\begin{Bmatrix} du_{(\varrho)} \\ dv_{(\varrho)} \\ d\varphi_{(\varrho)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{ds} + \frac{v}{r} \\ \frac{dv}{ds} - \frac{u}{r} - \varphi \\ \frac{d\varphi}{ds} \end{Bmatrix} ds \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u' + \frac{v}{r} \\ v' - \frac{u}{r} - \varphi \\ \varphi' \end{Bmatrix} \quad (4)$$

A questo punto cerchiamo di capire fisicamente il significato dei termini aggiuntivi rispetto a quelli della trave rettilinea. Il termine v/r in ε rappresenta la deformazione estensionale dell'arco. Infatti se applichiamo uno spostamento in P e Q lungo la normale all'asse, come in Fig.6, si nota bene che la lunghezza dell'arco è aumentata. Se la vogliamo quantizzare sarà proprio pari alla differenza fra la lunghezza dell'arco deformato e quella dell'arco non deformato diviso la lunghezza iniziale (non deformato):

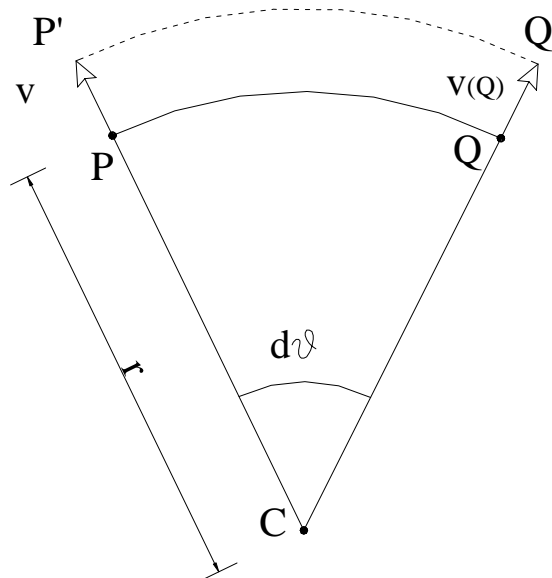


Fig.6: Deformazione ε

$$\varepsilon = \frac{(r+v) \cdot d\vartheta - r \cdot d\vartheta}{r \cdot d\vartheta} = \frac{v}{r}$$

Si nota quindi che se non è presente spostamento tangente all'asse la deformazione ε è dipendente solo da v e rappresenta proprio l'allungamento dell'arco.

Il termine u/r in γ rappresenta la deformazione tagliante dell'arco. Infatti se applichiamo uno spostamento in P e Q lungo l'asse, come in Fig.7, si nota bene che la lunghezza dell'arco è costante, il tutto è ruotato di $\varphi = u/r$. L'arco ha cioè subito una deformazione tagliante.

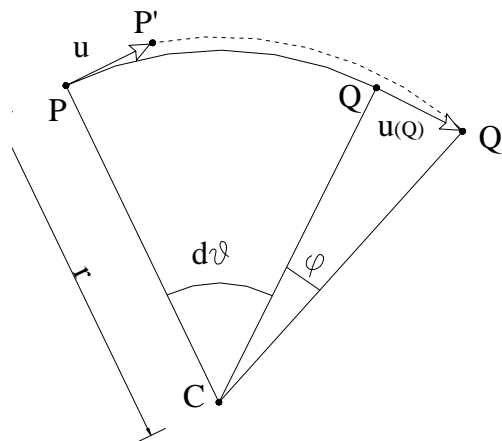


Fig.7: Deformazione γ

3. La statica

A questo punto passiamo allo studio della statica. Per far questo dobbiamo dapprima individuare quali sono le grandezze statiche generalizzate, cioè quali sforzi rendono il problema statico il duale di quello, appena descritto, cinematico. Le grandezze statiche generalizzate sono mostrate nella Fig. 9.

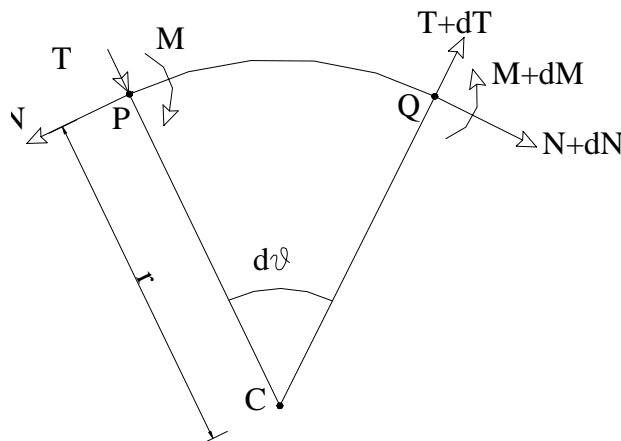


Fig.9: Grandezze statiche

Passiamo adesso all'equilibrio del nostro concio infinitesimo rispetto ai tre gradi di libertà. Per far questo è necessario fissare un sistema di riferimento. Prendiamo ad esempio quello avente origine per il baricentro del concio in esame e con direzione x tangente all'asse della trave e direzione y radiale. Immaginiamo ancora che sulla trave gravino dei generici carichi ripartiti p_x, p_y ($m=0$). Procediamo scrivendo l'equilibrio lungo la direzione x (vedi Fig.10), lungo la direzione y (vedi Fig.11) ed alla rotazione rispetto al baricentro (vedi Fig.12).

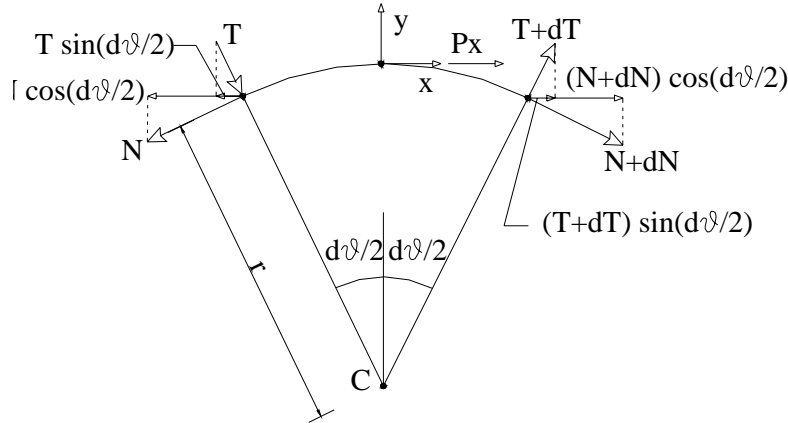


Fig.10: Forze agenti in direzione x .

A questo punto, sapendo che il seno di un angolo infinitamente piccolo tende all'angolo stesso e che il coseno dello stesso angolo tende ad uno, operando alcune semplici operazioni matematiche e trascurando i termini infinitesimi di ordine superiore, si ha:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -N + N + dN + T \frac{d\theta}{2} + (T + dT) \frac{d\theta}{2} + P_x ds = 0 \\ N' + \frac{T}{r} + P_x = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

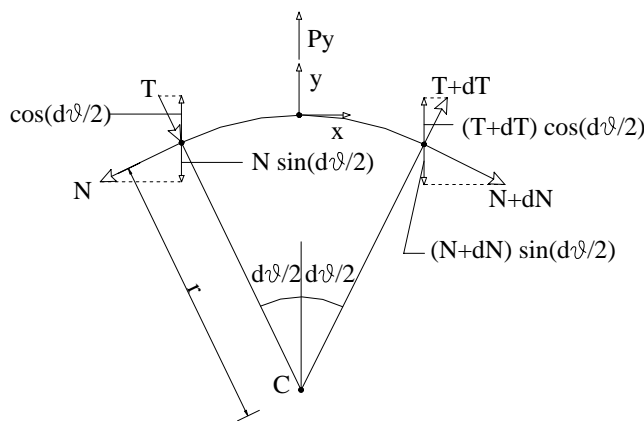


Fig.11: Forze agenti in direzione y .

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -T + T + dT - N \frac{d\theta}{2} - (N + dN) \frac{d\theta}{2} + P_y ds = 0$$

$$T' - \frac{N}{r} + P_y = 0 \quad (6)$$

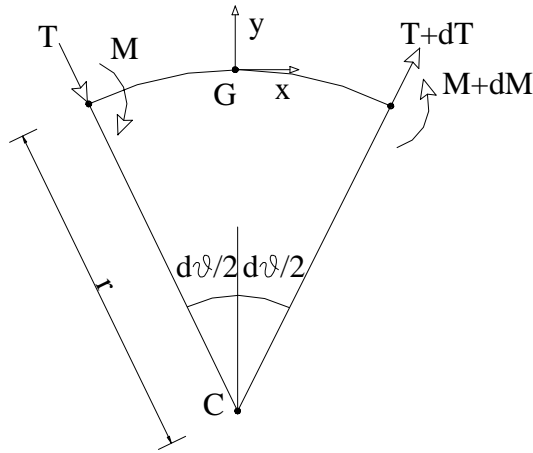


Fig.12: Momenti e forze che generano momento in G.

$$\begin{aligned} \sum M_G = 0 \quad \Rightarrow \quad & -M + M + dM + T \frac{ds}{2} + (T + dT) \frac{ds}{2} = 0 \\ & M' + T = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Abbiamo così ottenuto le equazioni indefinite dell'equilibrio. Per verificare ora che il problema cinematica e statico sono duali dobbiamo scrivere le equazioni implicite di congruenza e le equazioni indefinite dell'equilibrio in forma matriciale e verificare che l'operatore statico sia l'aggiunto di quello cinematico cioè che la matrice statica sia la trasposta di quella cinematica in cui sono stati cambiati i segni ai termini che compaiono con ordine di derivata dispari.

$$\varepsilon = D \cdot u \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{r} & 0 \\ -\frac{1}{r} & \frac{d}{ds} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$D^* \cdot \sigma = b \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{d}{ds} & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & -\frac{d}{ds} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_y \\ P_x \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

A questo punto abbiamo verificato la dualità fra i due problemi.

4. Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno da imporre sono del tutto uguali a quelle già scritte per il continuo monodimensionale polare; in breve vi sono condizioni sulla frontiera vincolata (cinematiche) e condizioni sulla frontiera libera (meccaniche).

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} & \mp N &= f_x \\ v &= \bar{v} & \mp T &= f_y \\ \varphi &= \bar{\varphi} & \mp M &= \mu \end{aligned} \quad (10)$$

4. Legame costitutivo

Il legame costitutivo, che viene espresso mediante la legge di Hooke, è il seguente:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} N \\ T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA_T & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ k \end{Bmatrix} \quad (11)$$

5. Indeformabilità a taglio

Il metodo degli spostamenti porta ad un sistema di equazioni differenziali che non sono risolvibili analiticamente. Si procede quindi con delle semplificazioni che non comportano variazioni sensibili nella soluzione. La prima condizione che si impone è quella di indeformabilità a taglio. Vediamo come si modificano le equazioni cinematiche e statiche.

5.1 Cinematica

Imporre la condizione di indeformabilità a taglio vuol dire:

$$\gamma = 0$$

la seconda delle Eq.(8) diventa quindi:

$$\gamma = v' - \frac{u}{R} - \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = v' - \frac{u}{R} \quad (12)$$

Per questioni di semplicità di calcolo immaginiamo di avere una trave curva a raggio costante. Questa semplificazione non comporta nessuna perdita di importanza del modello visto che in ingegneria civile non esistono travi con raggio di curvatura variabile, ed anche se dovessero esistere possono essere scomposte sempre in più travi con raggio costante e studiate separatamente.

Si nota quindi che il problema cinematico diventa funzione delle sole variabili traslazionali. È possibile quindi ridurlo in un sistema di due equazioni:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= u' + \frac{v}{R} \\ k &= \varphi' = v'' - \frac{u'}{R}\end{aligned}\quad (13)$$

dove la seconda e la terza delle Eq.(8) sono state condensate in una semplicemente derivando l'Eq.(12). Se le scriviamo in forma operatoriale si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} \frac{d}{ds} & \frac{d^2}{ds^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (14)$$

5.2 Statica

Il fatto che la trave sia indeformabile a taglio non vuol dire che lo sforzo di taglio sia nullo; per convincerci di questo basti pensare che perché la trave risulti indeformabile deve esistere uno sforzo tale da annullare le eventuali deformazioni. Inoltre anche analiticamente si ha dal legame costitutivo

$$T = GA_T \cdot \gamma \quad (15)$$

dove la deformazione $\gamma = 0$ ma la rigidezza $GA_T = \infty$. A questo punto possiamo condensare rispetto alla variabile T le equazioni indefinite dell'equilibrio. Dalla terza delle Eq.(9) si ha:

$$T = -M' \Rightarrow T' = -M'' \quad (16)$$

che sostituite nelle prime due delle Eq.(9):

$$\begin{aligned} -N' - \frac{T}{R} &= P_x & -N' + \frac{M'}{R} &= P_x \\ \frac{N}{R} - T' &= P_y & \frac{N}{R} + M'' &= P_y \end{aligned} \Rightarrow \quad (17)$$

che in forma operatoriale:

$$\begin{bmatrix} -\frac{d}{ds} & \frac{1}{R} \frac{d}{ds} \\ \frac{1}{R} & \frac{d^2}{ds^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} \quad (18)$$

5.3 Legame costitutivo

Nel legame costitutivo viene eliminata semplicemente l'equazione che lega il taglio alla sua deformata per i motivi discussi in precedenza.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (19)$$

6. Inestensibilità

Un'altra semplificazione che è necessaria imporre per poter giungere a soluzioni analitiche, è quella di inestensibilità.

6.1 Cinematica

La inestensibilità si traduce formalmente con

$$\varepsilon = 0$$

il che comporta:

$$\varepsilon = u' + \frac{v}{R} = 0 \Rightarrow v = -u' \cdot R \quad (20)$$

che derivata e sostituita nella seconda delle Eq.(13):

$$\kappa = \varphi' = -Ru''' - \frac{u'}{R} \quad (21)$$

In forma operatoriale:

$$\{\kappa\} = \begin{bmatrix} -R \frac{d^3}{ds^3} & -\frac{1}{R} \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \{u\} \quad (22)$$

6.2 Statica

Anche per quanto riguarda le equazioni indefinite dell'equilibrio la condizione di inestensibilità comporta alcune semplificazioni; per ottenerle basta condensare rispetto alla N le Eq.(17):

$$N' = \frac{M'}{R} - P_x \quad (23)$$

derivando la seconda delle Eq.(17) e sostituendoci l'Eq.(23):

$$R \cdot M''' + \frac{M'}{R} - p_x - R \cdot P_y' = 0 \quad (24)$$

che in forma operatoriale:

$$\begin{bmatrix} R \frac{d^3}{ds^3} & \frac{1}{R} \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \{M\} = \{P_x + R \cdot P_y'\} \quad (25)$$

6.3 Legame costitutivo

Prima di passare alla risoluzione con il metodo degli spostamenti, vediamo come si modifica il legame costitutivo dopo quest'ultima condizione semplificativa:

$$\{M\} = [EI]\{\kappa\} \quad (26)$$

7. Metodo degli spostamenti

Come al solito procediamo con la risoluzione del problema attraverso il metodo degli spostamenti. Procediamo quindi sostituendo nell'Eq.(26) l'Eq.(22):

$$M = -EI \left(R \cdot u''' + \frac{u''}{R} \right) \quad (27)$$

Sostituendola ora nell'Eq.(24) ed operando alcune semplificazioni matematiche:

$$-EI \left(R^2 \cdot u^{VI} + 2 \cdot u^{IV} + \frac{u''}{R^2} \right) = P_x + R \cdot P_y' \quad (28)$$

Sono necessarie sei condizioni al contorno visto che l'incognita u compare con derivazione fino al sesto ordine. Riprendiamo quindi le Eq.(10) e sostituendoci le relazioni che sono scaturite dall'imposizione della indeformabilità a taglio e della inestensibilità, otteniamo

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \\ v &= \bar{v} = -R \cdot u' \\ \varphi &= \bar{\varphi} = -R \cdot u'' - \frac{u}{R} \end{aligned} \quad (29)$$

per quanto riguarda le condizioni sulla frontiera vincolata; mentre otteniamo

$$\begin{aligned} N &= EI \cdot R \left(R \cdot u^V - \frac{u'''}{R} \right) + R \cdot P_y = \pm f_x \\ T &= EI \left(R \cdot u^{IV} - \frac{u''}{R} \right) = \pm f_y \\ M &= -EI \left(R \cdot u''' - \frac{u'}{R} \right) = \pm \mu \end{aligned} \quad (30)$$

sulla frontiera libera.

Il problema a questo punto è concluso.

È interessante notare come nell'equazione di equilibrio alla traslazione lungo y con la condizione di indeformabilità a taglio, si è ottenuta la seguente:

$$M'' + \frac{N}{R} - P_y = 0 \quad (31)$$

dove sono presenti tre termini. Il termine P_y è il carico agente normale all'asse della trave; il termine N/R rappresenta la portanza funicolare, cioè la “resistenza” offerta da un elemento flessibile (funi) sollecitato da un carico normale in ogni suo punto ad esso; il termine M'' che è chiamato portanza flessionale, cioè la capacità di un arco di opporsi a deformazioni flessionali.