

Capitolo 8

Lastra assialsimmetrica

1. Lastra assialsimmetrica

1.1. Generalità

La lastra assial simmetrica è un tipo di lastra dotata di simmetria polare, ossia avente una forma circolare e un raggio R costante:

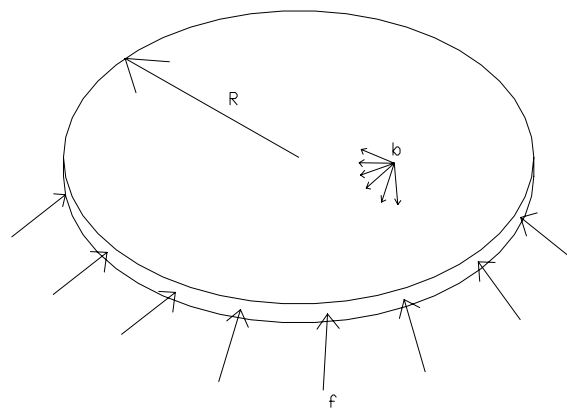
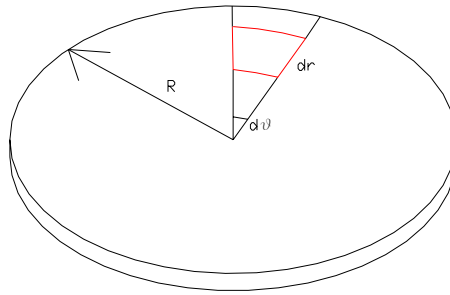


Fig. 1: Lastra assial simmetrica

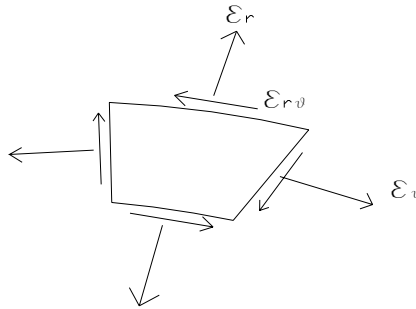
Per ipotesi si suppone che anche i carichi siano dotati di simmetria polare, cioè abbiano lo stesso valore lungo la circonferenza dell'elemento.

Si isola sulla piastra di raggio R un infinitesimo di lastra circolare:

**Fig. 2:** Elemento infinitesimo di lastra

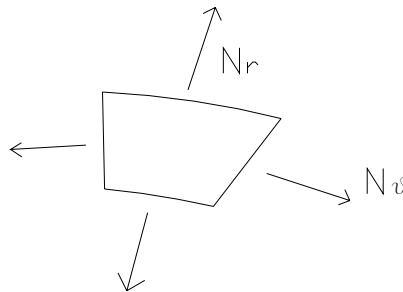
Tutti i diametri che si possono tracciare dividono in due parti la struttura e costituiscono assi di simmetria. L'unica variabile da considerare e che descrive quindi il dominio è l'ascissa r che si muove dal centro verso l'esterno fino ad assumere valore massimo R .

Lo stato di deformazione è rappresentato in figura:

**Fig. 3:** Stato deformativo di un generico concio di lastra

in cui ϵ_r ϵ_{θ} sono rispettivamente la deformazione radiale e la deformazione circonferenziale: la prima si sviluppa parallelamente al raggio mentre la seconda lungo la circonferenza ortogonalmente alle prime. Inoltre la deformazione $\epsilon_{r\theta}$, deve essere zero in quanto non soddisfa le condizioni di simmetria.

Le tensioni generalizzate che compiono lavoro sulle deformazioni:

**Fig. 4:** Stato tensionale di un generico concio di lastra

1.2. Cinematica

L'unico parametro di spostamento è w , spostamento radiale funzione di r :

$$u = [w] \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

Si passa ora alla formulazione delle equazioni di congruenza.

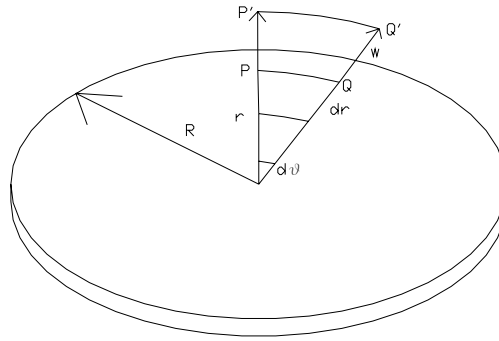


Fig. 5: Spostamento radiale w di un segmento PQ

Si applichi a P e Q un campo di spostamenti che deve avere uguale allungamento del raggio sia in P che in Q per l'ipotesi di simmetria polare. La deformazione radiale si può valutare come:

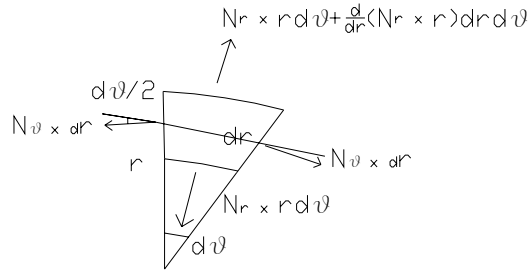
$$\varepsilon_r = w' = \frac{dw}{dr} \quad (2)$$

mentre la deformazione circonferenziale:

$$\varepsilon_\theta = \frac{\overline{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}} = \frac{(r + w)d\theta - r \cdot d\theta}{rd\theta} = \frac{w}{r} \quad (3)$$

1.3. Statica

Si passi ora al calcolo delle equazioni di equilibrio delle tensioni per il problema statico. Lo stato tensionale su un generico concio di lastra è il seguente:

**Fig. 6:** Stato di equilibrio tensionale

Si può notare che per quanto riguarda la tensione circonferenziale non c'è incremento per l'ipotesi di simmetria polare. L'unica equazione di equilibrio da considerare è quella in direzione radiale:

$$-N_r \cdot r d\theta + N_r \cdot r d\theta + \frac{d}{dr}(N_r \cdot r) dr d\theta - 2 \cdot N_\theta dr \frac{d\theta}{2} + b \cdot r d\theta dr = 0 \quad (4)$$

semplificando:

$$(N_r \cdot r)' - N_\theta + b \cdot r = 0 \quad (5)$$

In forma operatoriale:

$$\begin{bmatrix} -\frac{d}{dr} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_r \cdot r \\ N_\theta \end{bmatrix} = b \cdot r \quad (6)$$

L'operatore differenziale della (6) è l'aggiunto di quello differenziale delle equazioni di congruenza, che si scrivono:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \cdot r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dr} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot w \quad (7)$$

1.4. Legame costitutivo

Il legame costitutivo che risulta è:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{Eh} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_r \\ N_\theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

che lega gli spostamenti alle tensioni. Per ottenere le tensioni in funzione degli spostamenti si inverte la (8):

$$\begin{bmatrix} N_r \\ N_\theta \end{bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

in cui la grandezza $Eh/(1-\nu^2) = D$ è la rigidezza estensionale di una striscia di lastra di sezione $h \times 1$.

1.5. Metodo degli spostamenti

Il metodo di risoluzione che si considera per la lastra assialsimmetrica è il metodo degli spostamenti. Introducendo le equazioni di congruenza all'interno del legame costitutivo si ottengono:

$$N_r = D \cdot \left(w' + \nu \cdot \frac{w}{r} \right) \quad (10)$$

$$N_\theta = D \cdot \left(\frac{w}{r} + \nu \cdot w' \right) \quad (11)$$

che introdotte a loro volta nell'equazione di equilibrio, forniscono:

$$D \cdot \left(w' + \nu \cdot \frac{w}{r} \right)' \cdot r + D \cdot \left(w' + \nu \cdot \frac{w}{r} \right) - D \cdot \left(\nu \cdot w' + \frac{w}{r} \right) + b \cdot r = 0 \quad (12)$$

Noto che:

$$(N_r \cdot r)' = N_r' \cdot r + N_r \quad (13)$$

dividendo ora per D si ottiene:

$$\left(w' + \nu \cdot \frac{w}{r} \right)' \cdot r + \left(w' + \nu \cdot \frac{w}{r} \right) - \left(\nu \cdot w' + \frac{w}{r} \right) = -\frac{b \cdot r}{D} \quad (14)$$

Sviluppando ulteriormente:

$$\boxed{w'' + \frac{w'}{r} - \frac{w}{r^2} = -\frac{b}{D}} \quad (15)$$

L'equazione viene risolta quindi con la tecnica delle equazioni di Eulero in cui viene imposta una soluzione del tipo: $w = e^{\alpha r}$. La soluzione per l'equazione omogenea risulta:

$$w = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} \quad (16)$$

Le costanti C_1 e C_2 si calcolano imponendo le condizioni al contorno di tipo cinematico:

$$w = \bar{w} \quad (17)$$

e di tipo meccanico:

$$N_r = f_r \quad (18)$$

Si può notare come la condizione al contorno di tipo meccanico $N_\theta = f_\theta$ non è imponibile perché non soddisfa le condizioni di simmetria polare.