

La modellazione strutturale di elementi tipici

Prof. A. Di Egidio

Elementi strutturali monodimensionali

1. La trave rettilinea piana

- Equazioni di congruenza implicite:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}; \quad \gamma = \frac{dv}{dx} - \varphi; \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx}$$
$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}$$

- Equazioni di equilibrio indefinito:

$$\frac{dN}{dx} + P_x = 0; \quad \frac{dT}{dx} + P_y = 0; \quad \frac{dM}{dx} + T + m = 0$$
$$\begin{bmatrix} -\frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & -\frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N \\ T \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ m \end{pmatrix}$$

- Legame costitutivo:

$$N = EA\varepsilon; \quad T = GA_t\gamma; \quad M = EI\kappa$$
$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA_t & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{bmatrix}$$

- Indeformabilità a taglio:

$$\gamma = 0 \Rightarrow \varphi = v' \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = u' \\ \kappa = v'' \end{cases} \Rightarrow T' = -P_y \Rightarrow \begin{cases} N' + P_x = 0 \\ M'' - P_y = 0 \end{cases} \quad (m = 0)$$

- Equazioni della linea elastica:

$$EAu'' = -P_x \quad \text{Asta}$$
$$EIv^{IV} = P_y \quad \text{Trave}$$

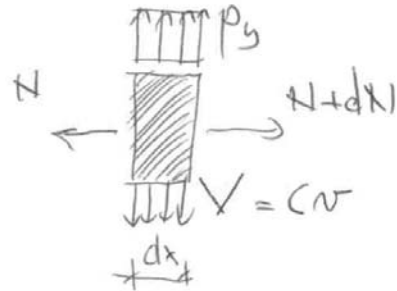
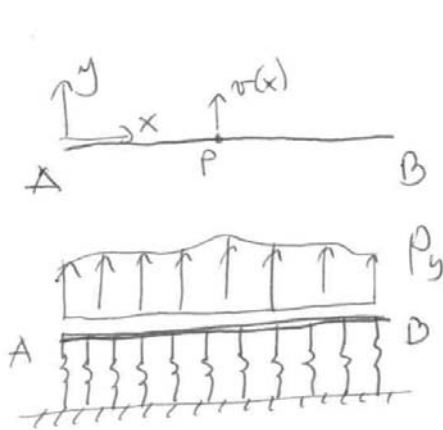
- Commenti

1. Comportamento di asta e trave (assiale ed ortogonale all'asse) disaccoppiati;
2. Incapacità dell'asta di portare carichi ortogonali all'asse;
3. $M'' = EIv^{IV}$ portanza flessionale della trave per carichi ortogonali all'asse.

2. Altri tipi di portanza per carichi verticali

Verranno analizzate altre capacità portanti di carichi ortogonali all'asse associate ad elementi strutturali che hanno unica rigidezza non nulla lungo l'asse della trave. Tali portanze rendono capace un elemento di asta di portare anche carichi verticali.

1) Portanza del terreno o del sottofondo (modellato alla Winkler):

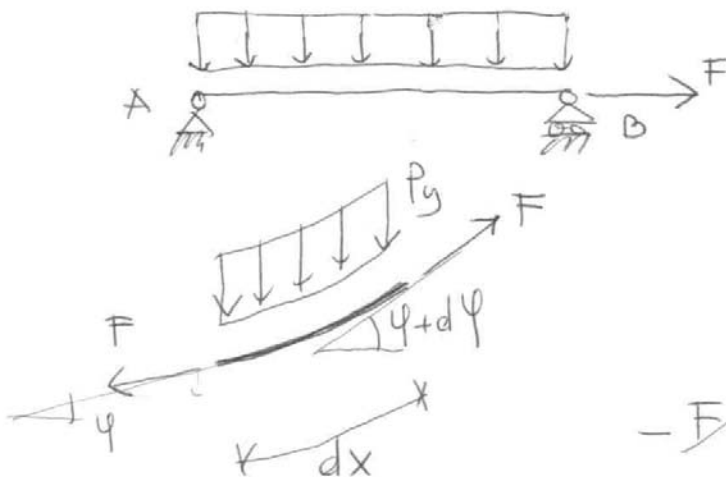


Eq. di equilibrio infinitesimale

$$Cv dx - p_y dx = 0$$

$$\boxed{Cv = p_y}$$

2) Portanza geometrica (la fune tesa):



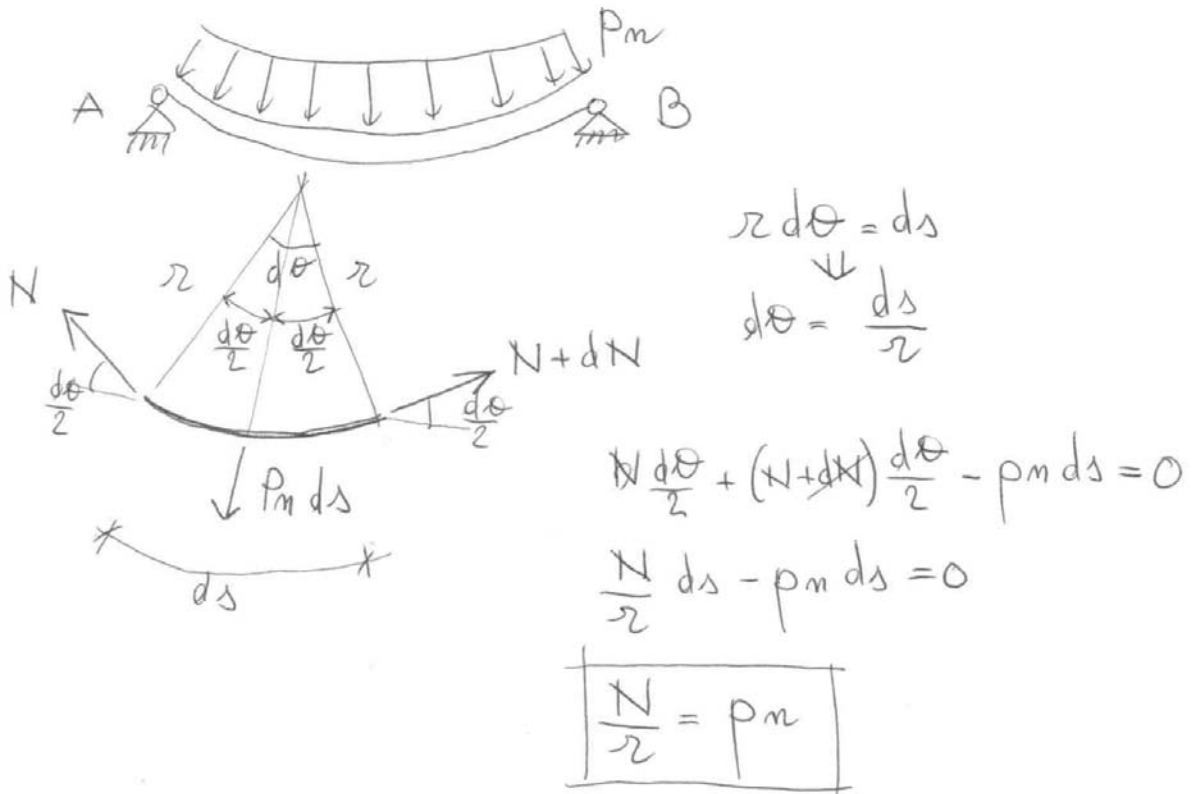
$$\psi = \frac{dv}{dx}$$

$$-F\psi + F(\psi + d\psi) - p_y dx = 0$$

$$F \frac{d\psi}{dx} - p_y = 0$$

$$\boxed{Fv'' = p_y}$$

3) Portanza funicolare (dovuta alla geometria dell'elemento):



Le prime due portanze ortogonali non richiedono una particolare geometria dell'elemento strutturale, sono state infatti ottenute per elementi rettilinei. Esse possono esistere anche contestualmente alla portanza flessionale della trave e sottrarre a quest'ultima parte del carico ortogonale da sostenere.

3. La trave su suolo elastico alla Winkler

Eq. indefinita di equilibrio: $M'' + V - p_y = 0$

Eq. della linea elastica: $EI v^{IV} + c v = P_y$

$$v^{IV} + 4\beta^4 v = \frac{P_y}{EI} \quad \text{con} \quad \beta^4 = \frac{c}{4EI}$$

Soluzione: $v(x) = v_0(x) + v_p(x)$

$$v_0(x) = e^{-\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x); \quad v_p(x) = \frac{P_y}{c}$$

valida per carichi esprimibile con la seguente legge: $P_y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

- Trave su suolo elastico lunga e corta:

Lunghezza caratteristica della trave: $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$

Lunghezza reale della trave: L

1. $L \gg \lambda \Rightarrow$ trave lunga
2. $L \ll \lambda \Rightarrow$ trave corta.

4. La trave presollecitata

Eq. indefinita di equilibrio: $M'' - F\varphi' + p_y = 0$

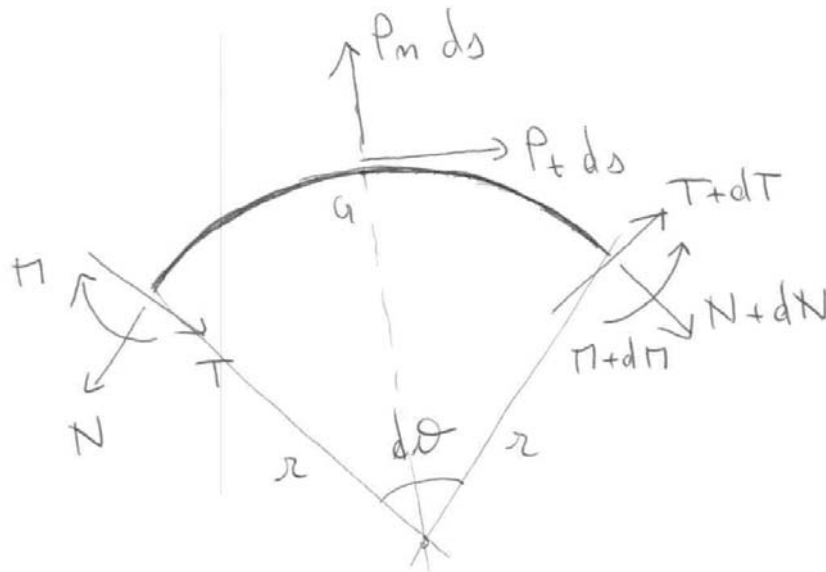
Eq. della linea elastica: $EIV'''' - Fv'' + P_y = 0$

- Commenti

1. Una presollecitazione di trazione è stabilizzante ed aiuta a portare il carico ortogonale;
2. Una presollecitazione di compressione è destabilizzante e riduce la capacità portante della trave per carichi ortogonali (biforcazione).

5. La trave curva piana

Per mettere in gioco la portanza funicolare in una trave è necessario dotarla di una curvatura finita. Il momento però che la curvatura diventa diversa da ∞ il comportamento di asta e quello di trave si accoppiano.



Per travi curve con raggio costante (archi) ed indeformabili a taglio ($T = -M'$) le equazioni indefinite di equilibrio diventano:

$$-N' + \frac{M'}{R} = P_t; \quad \frac{N}{R} + M'' = P_n$$

- Commenti

1. Il comportamento lungo l'asse della trave e quello ortogonale si accoppiano. Contribuisce alla portanza assiale anche il momento flettente (componente assiale del taglio), mentre alla portanza ortogonale anche lo sforzo normale;
2. Limitatamente alla portanza ortogonale, un arco funziona bene quando massimizza il contributo funicolare e minimizza quello flessionale.

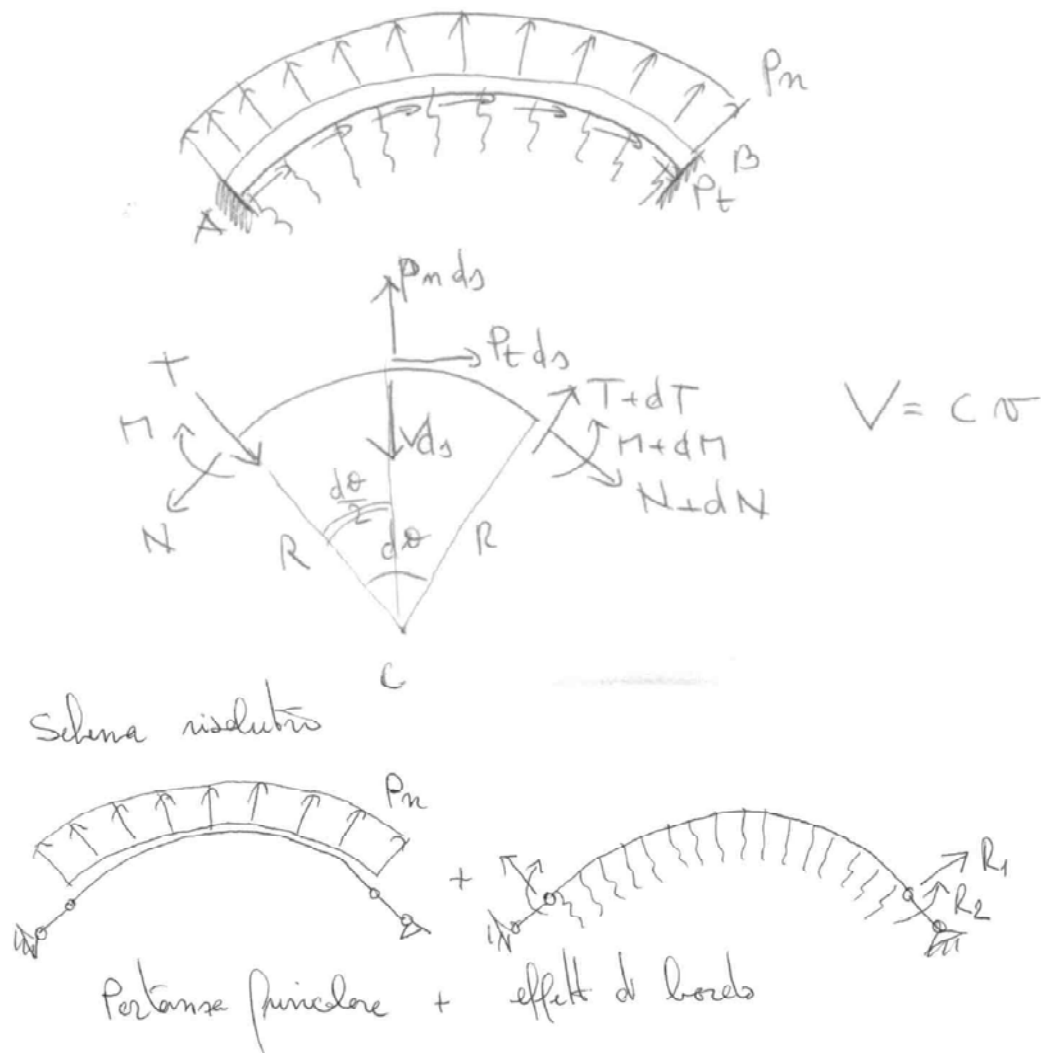
Allegato 1

(in PDF su file a parte)

6. La trave curva piana su suolo elastico

Per travi curve con raggio costante (archi), indeformabili a taglio ($T = -M'$) e su un suolo elastico funzionante ortogonalmente all'asse, le equazioni indefinite di equilibrio diventano:

$$-N' + \frac{M'}{R} = P_t; \quad \frac{N}{R} + M'' + V = P_n$$

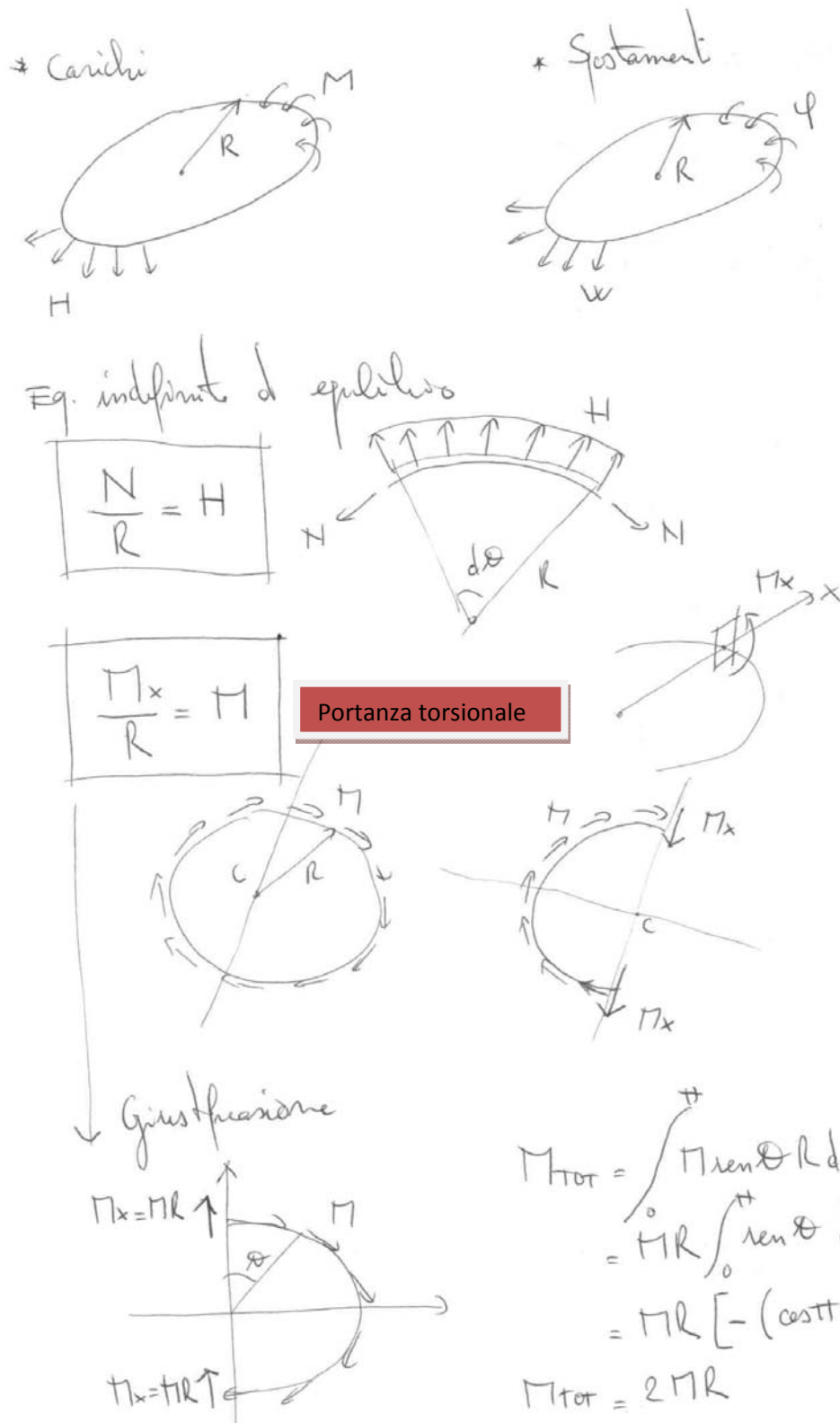


- Commenti

1. Fermo restando quanto detto per la trave su suolo elastico e quella curva, in questo caso accade che l'andamento tipico delle travi su suolo elastico coinvolge principalmente le grandezze di trave (quelle ortogonali all'asse). Se la stessa è lunga, l'effetto del suolo si risente soprattutto vicino alle frontiere della trave e finisce per smorzarsi velocemente ad una piccola distanza da esse. Ne consegue che in quasi tutto il dominio esiste un regime tipico di fune, mentre vicino ai vincoli appaiono degli andamenti oscillanti di T ed N ed M che si smorzano velocemente.

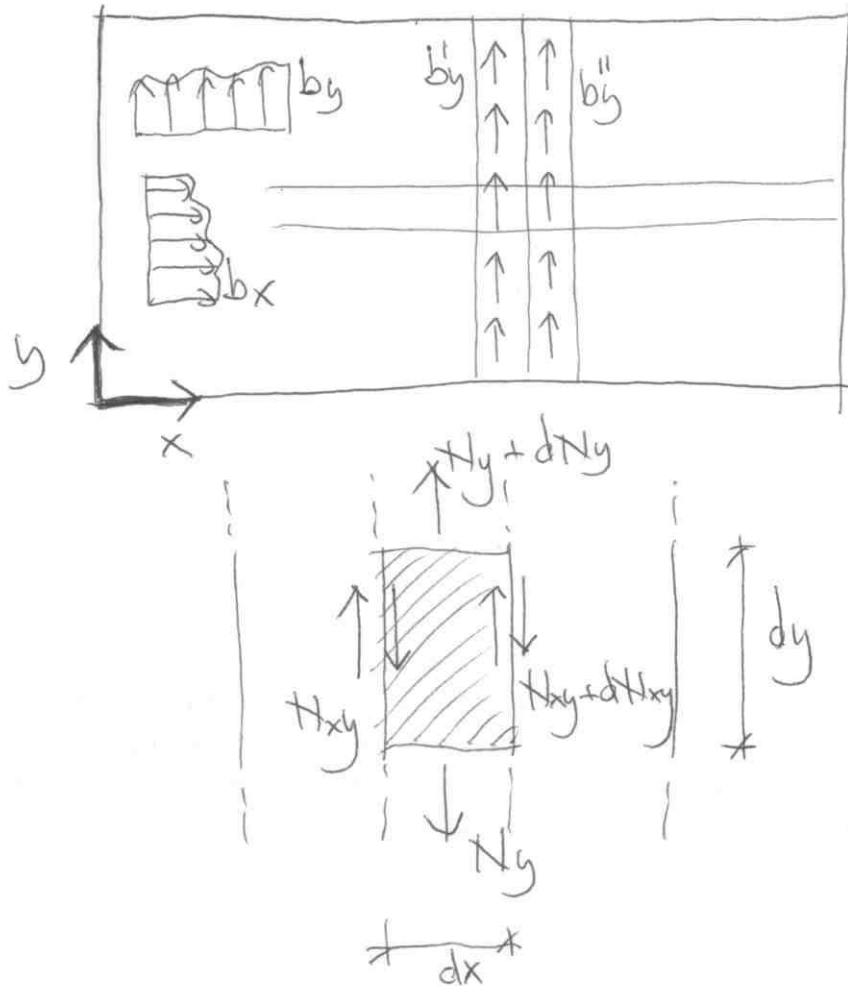
6. La trave curva ad anello

Un'altra tipologia di elementi strutturali è la trave ad anello. Essa è molto utilizzata in strutture composte da più elementi strutturali come elemento irrigidente o di interconnessione. Si riconosce una tipologia di portanza detta torsionale.



Elementi strutturali bidimensionali piani

1. La lastra di forma qualsiasi



- Equazioni indefinite di equilibrio:

$$\frac{dN_x}{dx} + \frac{dN_{xy}}{dy} + b_x = 0, \quad \frac{dN_y}{dy} + \frac{dN_{xy}}{dx} + b_y = 0$$

- Equazioni della superficie elastica:

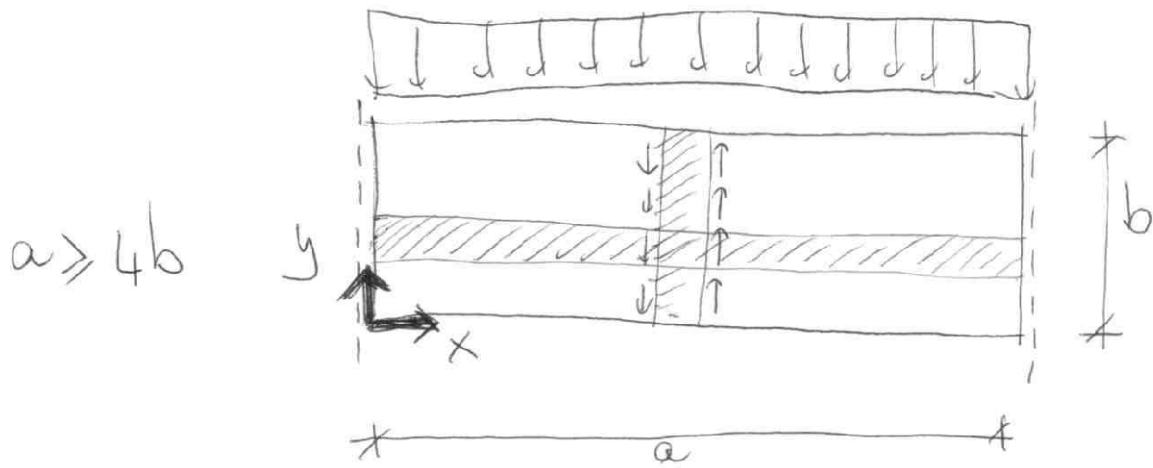
$$-\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[u_{xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{,yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{,xx} \right] = b_x$$

$$-\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[v_{yy} + \frac{1+\nu}{2} u_{,xx} + \frac{1-\nu}{2} v_{,xx} \right] = b_y$$

- Commenti

1. Alla portanza assiale di un ordine di aste in una direzione contribuisce la distribuzione di azioni taglianti presenti nell'ordine di aste nell'altra direzione.
2. I due ordini aste interagiscono anche grazie all'effetto Poisson (contrazione laterale impedita).

- Esempio: trave parete

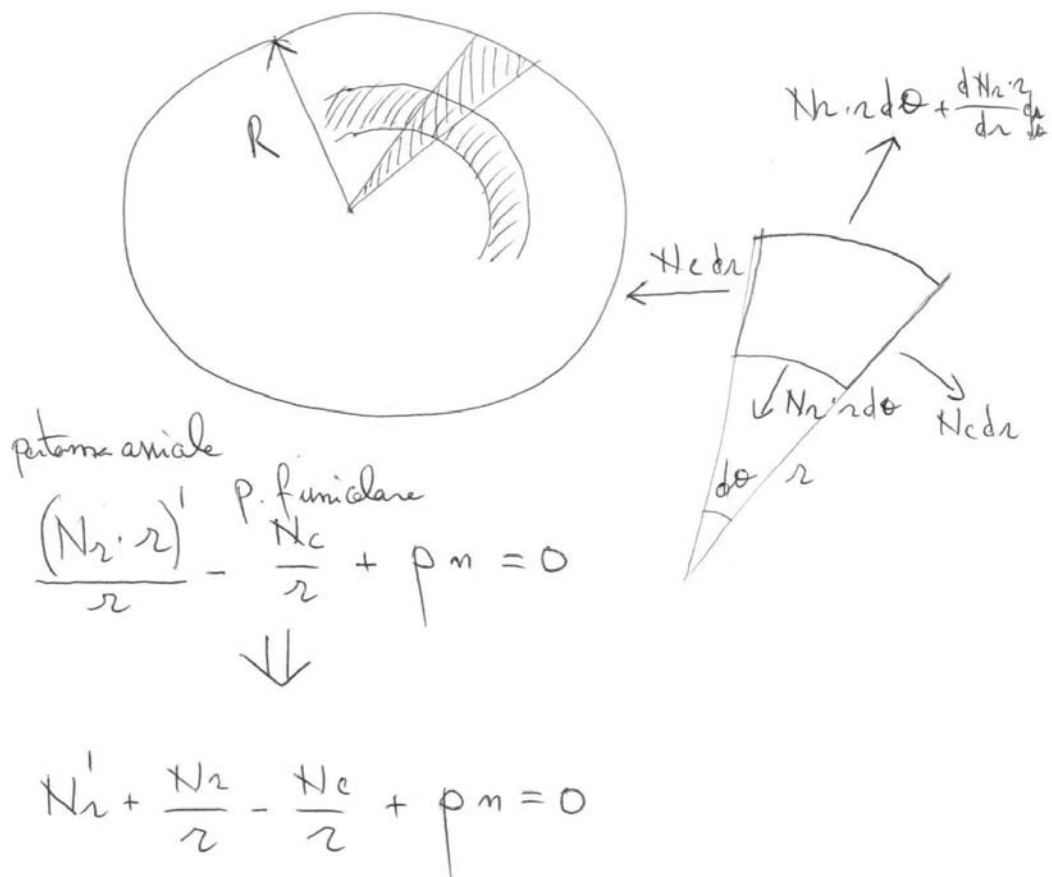


- * In tale esempio, poiché i due ordini di travi hanno lunghezze molto diverse (e quindi anche rigidezze assiali EA/l molto diverse, il carico verticale viene portato quasi esclusivamente dalle tensioni taglianti agenti sulle facce verticali delle strisce in direzione y e dall'azione flessionale d'insieme che vede allungarsi in maniera differente le strisce orizzontali.

2. La lastra circolare

- Commenti

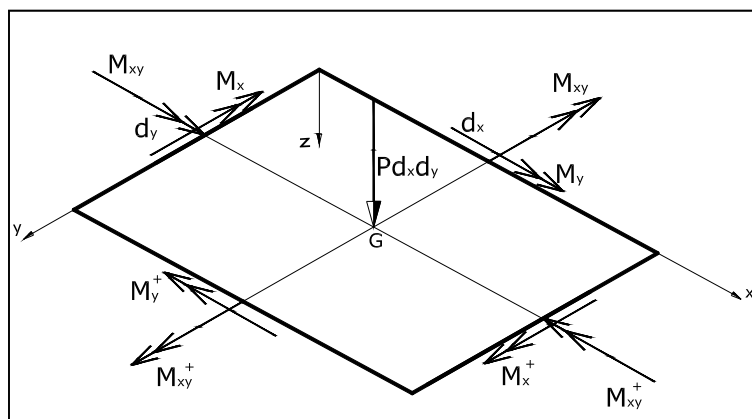
1. La portanza dei carichi assiali è assicurata da quella degli spicchi radiali a larghezza variabile e da quella funicolare delle aste ad anello.
2. I due ordini aste interagiscono anche grazie all'effetto Poisson (contrazione laterale impedita).
3. Osservando l'equazione indefinita di equilibrio si può prevedere un andamento delle due portanze diverso con l'aumentare della distanza dal centro (r crescente): sicuramente via via mi allontano dal centro decresce la portanza funicolare degli anelli. La sorte della portanza assiale invece è influenzata anche dal fatto che lo sforzo normale assiale decresce all'aumentare di r perché si ripartisce su una lunghezza maggiore. Comunque la sua risultante deve complessivamente crescere.



3. La piastra di forma qualsiasi

- Equazioni indefinite di equilibrio (indeformabile a taglio):

$$M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy} + P = 0$$

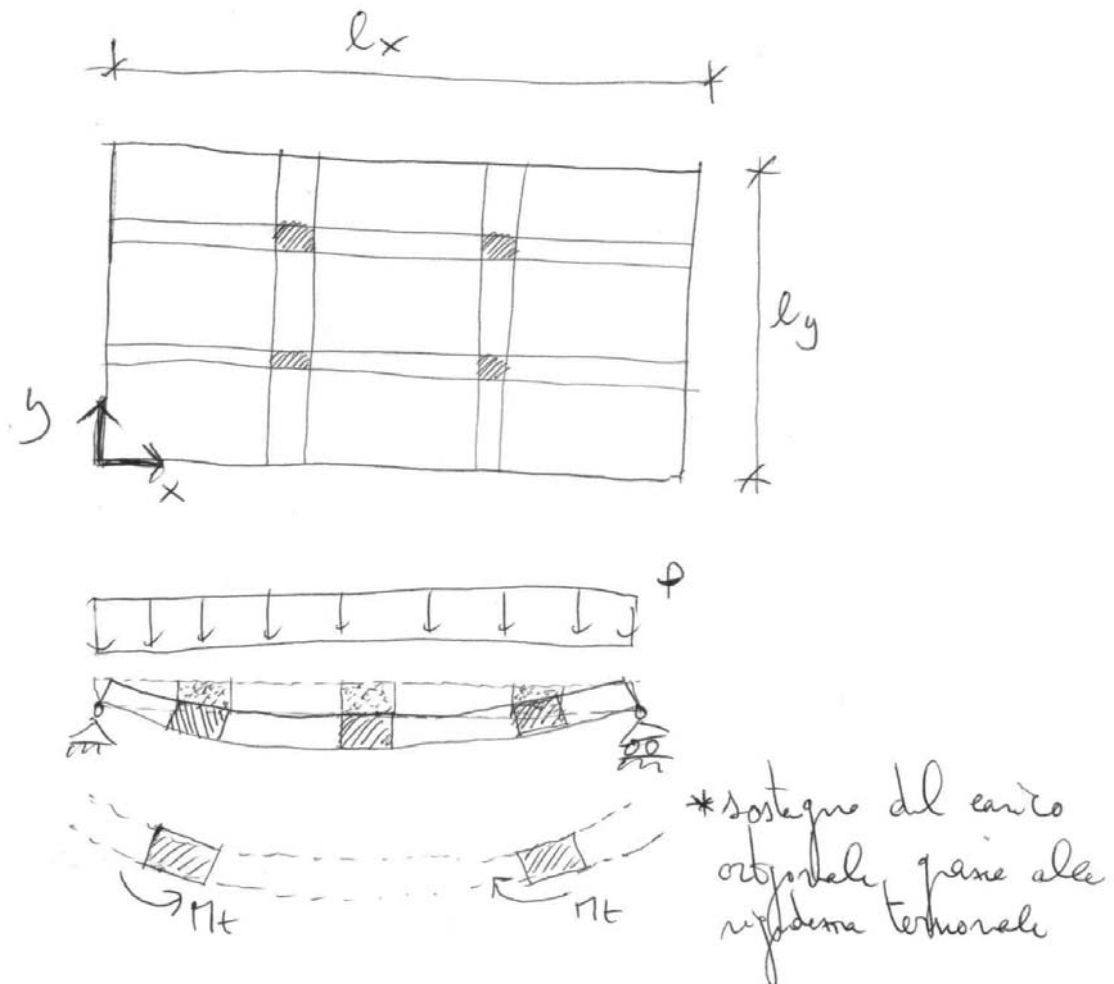


- Equazioni della superficie elastica:

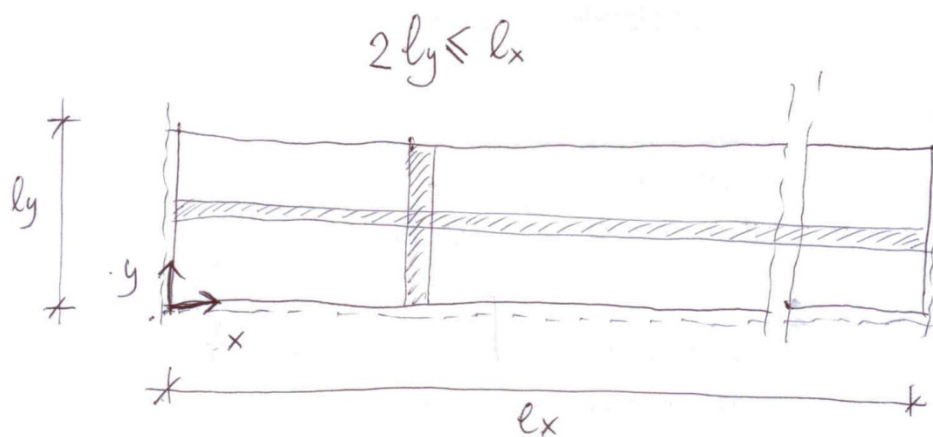
$$D(w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) = P \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

- Commenti

1. Alla portanza ortogonale contribuiscono i due ordini di travi ortogonali unitamente alla loro rigidezza torsionale.

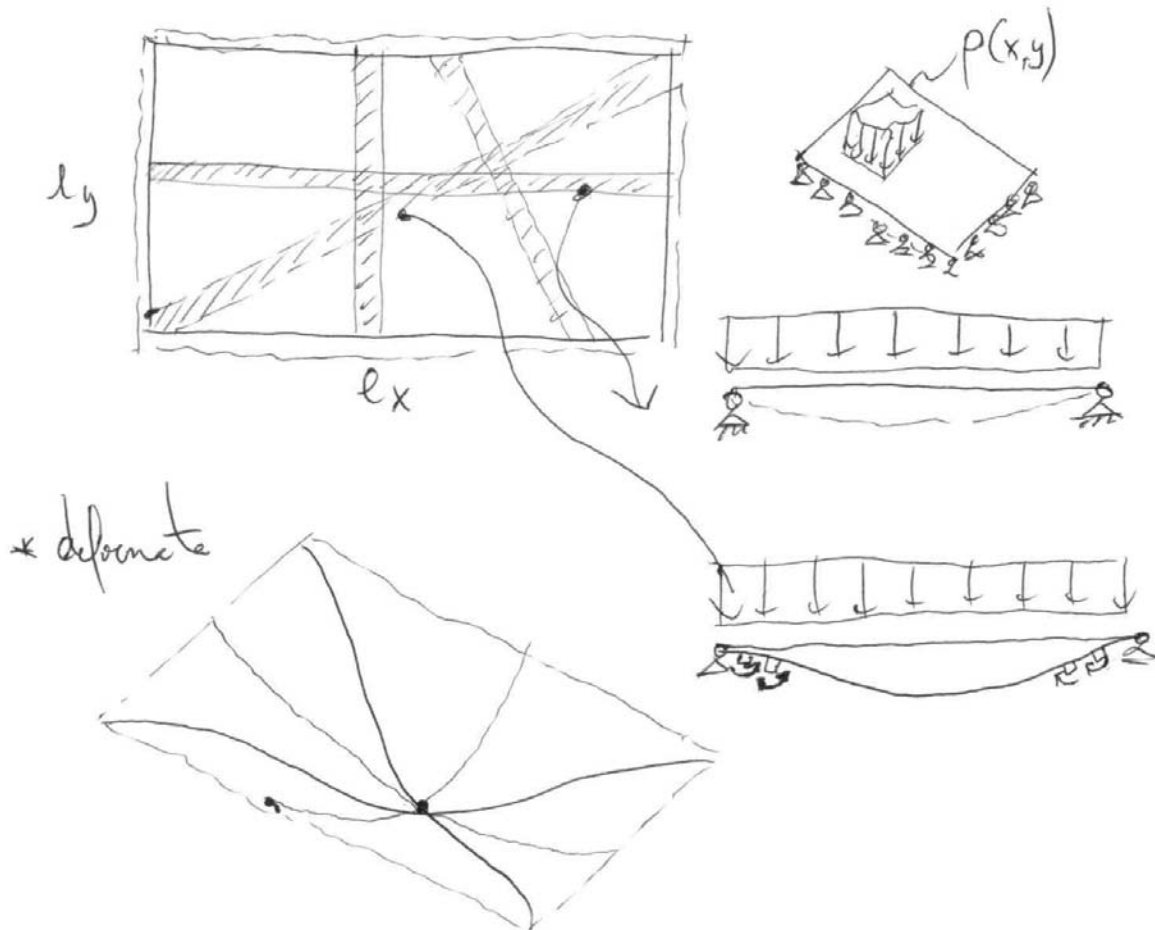


- Esempio: piastra indefinita



- * In tale esempio, la piastra si comporta come se ci fosse un solo ordine di travi nella direzione più corta poiché nell'altra direzione, essendo l'ordine di travi molto più lungo, risultano trascurabili sia le rigidezze flessionali che torsionali.

- Esempio: piastra appoggiata



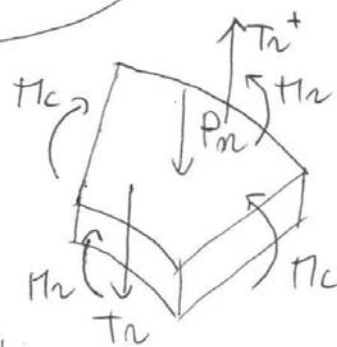
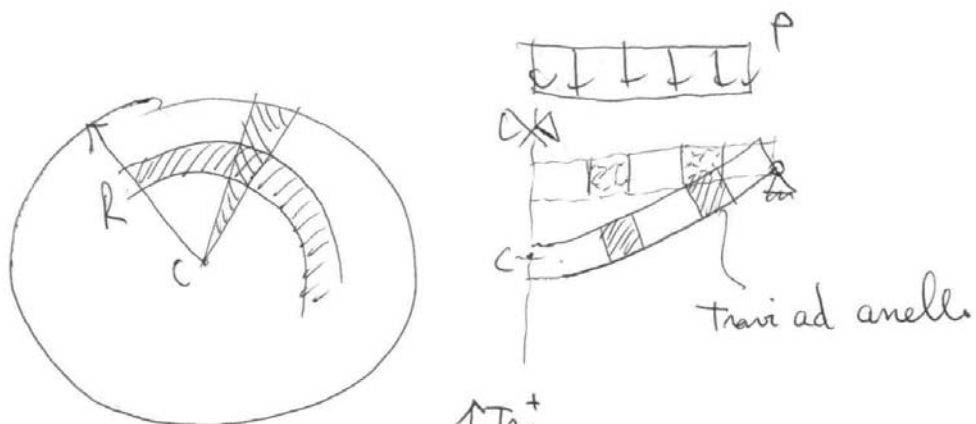
- * In tale esempio, il fatto che in prossimità degli spigoli siano tese le fibre di extradosso della piastra, nonostante gli ordini di travi rispondano tutti allo schema di trave appoggiata, è esclusivamente dovuto all'effetto della torsione negli ordini di travi ortogonali a quelli lungo la diagonale.

4. La piastra circolare

- Commenti

1. La portanza dei carichi ortogonali è assicurata dalla portanza flessionale quella degli spicchi radiali a larghezza variabile e da quella torsionale degli anelli.
2. I due ordini aste interagiscono anche grazie all'effetto Poisson (contrazione laterale impedita).
3. Osservando l'equazione indefinita di equilibrio si può prevedere un andamento delle

due portanze diverso con l'aumentare della distanza dal centro (r crescente): sicuramente via via mi allontano dal centro decresce la portanza torsionale degli anelli. La sorte della portanza flessionale degli spicchi è influenzata anche dal fatto che il momento flettente decresce all'aumentare di r perché si ripartisce su una lunghezza maggiore. Comunque la sua risultante deve complessivamente crescere.



$$(T \cdot r)' + p_m \cdot r = 0$$

$$(M_n \cdot r)' - M_c + T \cdot r = 0$$

* Indefinite a type

$$\boxed{\frac{(M_n \cdot r)''}{r} - \frac{M_c'}{r} + p_m = 0}$$

$$M_n'' + 2 \frac{M_n'}{r} - \frac{M_c'}{r} + p_m = 0$$