



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELL' AQUILA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA
DELLE STRUTTURE, DELLE ACQUE E DEL TERRENO



Master

Le volte a botte

Relatore: Dott.Ing. Andrea Matteo de Leo

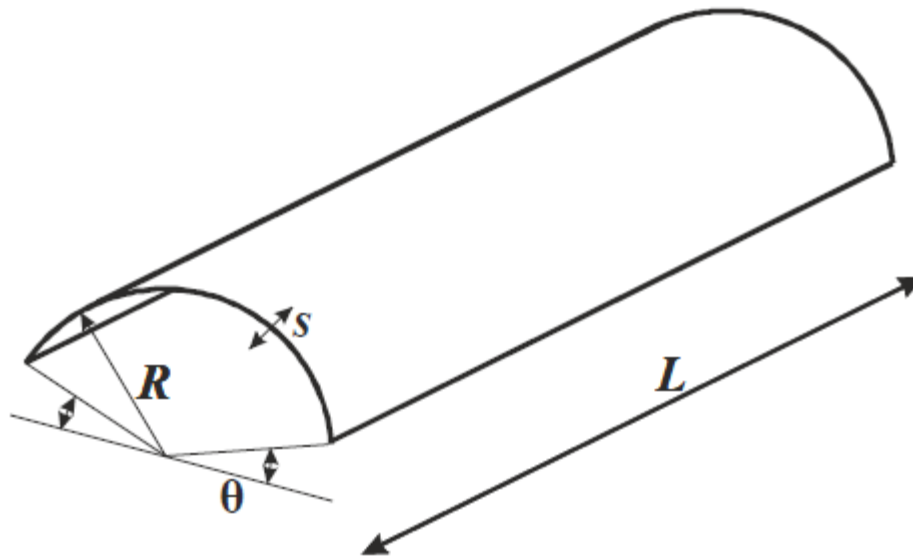


Master

Le volte a botte

Volta a botte

Il modello





Master

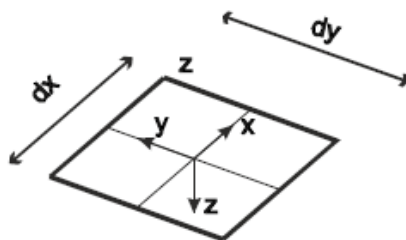
Le volte a botte

Volta a botte

Equazioni implicite di congruenza

Lastra

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right.$$

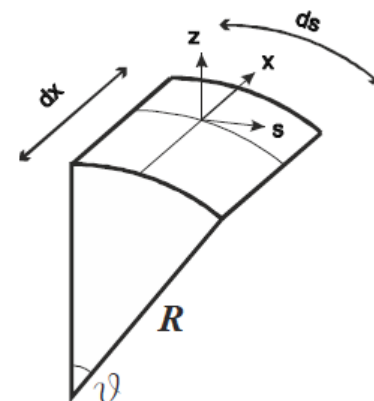


Piastra

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \\ \gamma_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \\ k_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ k_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ k_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{array} \right.$$

Volta a botte

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_s = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R} \\ \gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_x \\ \gamma_s = -\frac{v}{R} + \frac{\partial w}{\partial s} - \varphi_s \\ k_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ k_s = \frac{\partial \varphi_s}{\partial s} \\ k_{xs} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial s} - \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} \end{array} \right.$$





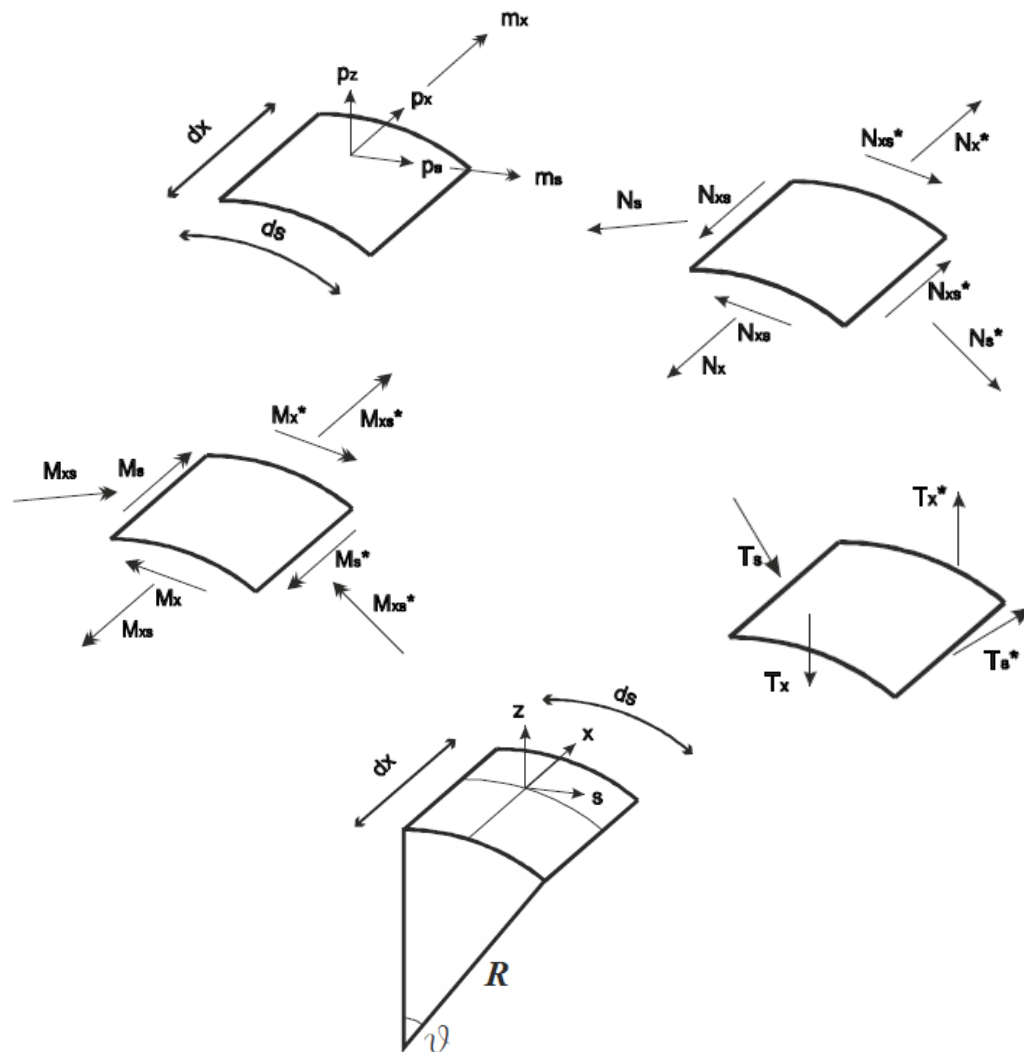
Master

Le volte a botte

Volta a botte

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} = p_x \\ -\frac{\partial N_s}{\partial s} - \frac{\partial N_{xs}}{\partial x} - \frac{T_s}{R} = p_s \\ \frac{N_s}{R} - \frac{\partial T_x}{\partial x} - \frac{\partial T_s}{\partial s} = p_z \\ -\frac{\partial M_x}{\partial x} - T_x + \frac{\partial M_{xs}}{\partial s} = m_x \\ -\frac{\partial M_s}{\partial s} - T_s + \frac{\partial M_{xs}}{\partial x} = m_s \end{array} \right.$$





Volta a botte

Legame costitutivo

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_s \\ T_{xs} \\ T_x \\ T_s \\ M_x \\ M_s \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Eh}{1-\nu^2} & \frac{Eh\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Eh\nu}{1-\nu^2} & \frac{Eh}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh}{(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6}Gh & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6}Gh & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{D(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_s \\ \gamma_{xs} \\ \gamma_x \\ \gamma_s \\ k_x \\ k_s \\ k_{xs} \end{Bmatrix}$$

Dove:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$$



Master

Le volte a botte



Volta a botte

Vincoli interni

- Indeformabilità a taglio lungo x
- Indeformabilità a taglio lungo s
- Inestensibilità degli archi
- Inestensibilità in direzione delle generatrici

$$\gamma_x = 0$$

$$\gamma_s = 0$$

$$\epsilon_x = 0$$

$$\epsilon_s = 0$$

Campo di spostamenti

$$\left\{ \begin{array}{c} u(x, s) \\ v(x, s) \\ w(x, s) \\ \varphi_x(x, s) \\ \varphi_s(x, s) \end{array} \right\} \Rightarrow \{v(x, s)\}$$



Master

Le volte a botte

Volta a botte

Strategia risolutiva

Separazione delle variabili

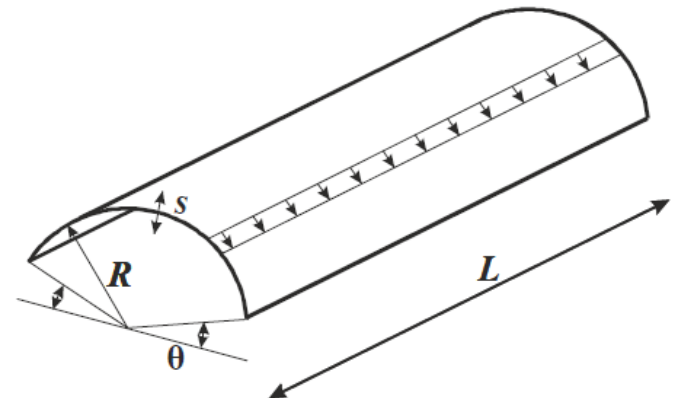
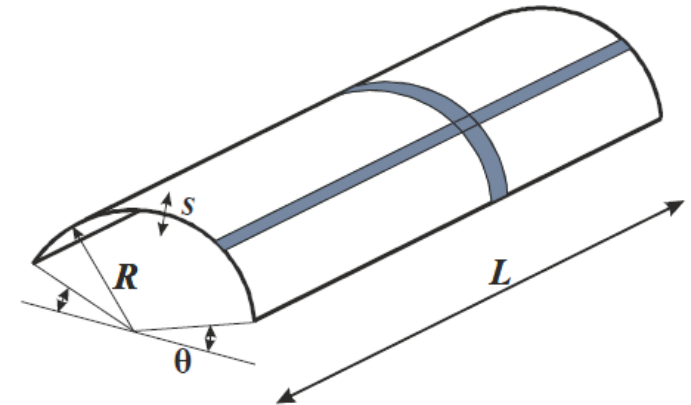
$$v(x, s) = f(s)g(x)$$

Ipotesi base:

Lungo le direttrici il comportamento è quello di arco piano

Equazione che governa il comportamento delle generatrici:

$$a \frac{d^4 g(x)}{dx^4} + b \frac{d^2 g(x)}{dx^2} + c g(x) = p(x)$$



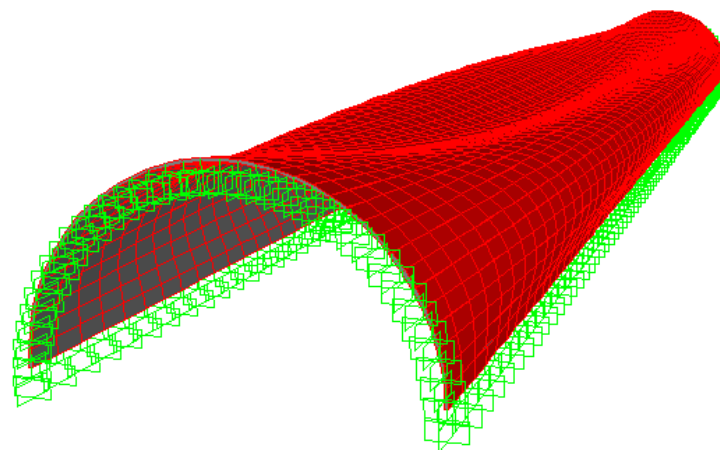
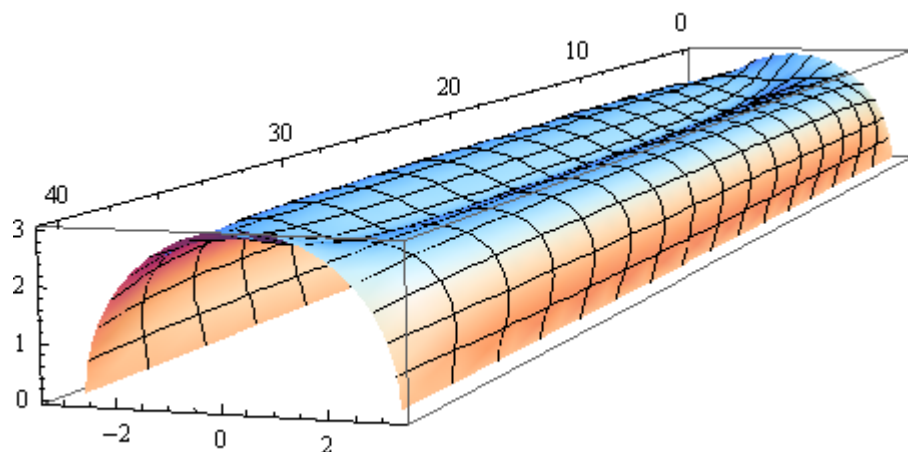


Master

Le volte a botte

Volta a botte

Soluzioni analitiche vs soluzioni computazionali



Modello	Lunghezza	Raggio	Spessore	Angolo imposta	Vincoli estremità
[]	[m]	[m]	[m]	[°]	[]
VV-1-00	40	3	0,05	0	Incastro
VV-2-00	40	3	0,15	0	Incastro
VV-3-00	40	3	0,30	0	Incastro
VV-1-30	40	3	0,05	30	Incastro
VV-2-30	40	3	0,15	30	Incastro
VV-3-30	40	3	0,30	30	Incastro
VV-1-45	40	3	0,05	45	Incastro
VV-2-45	40	3	0,15	45	Incastro
VV-3-45	40	3	0,30	45	Incastro

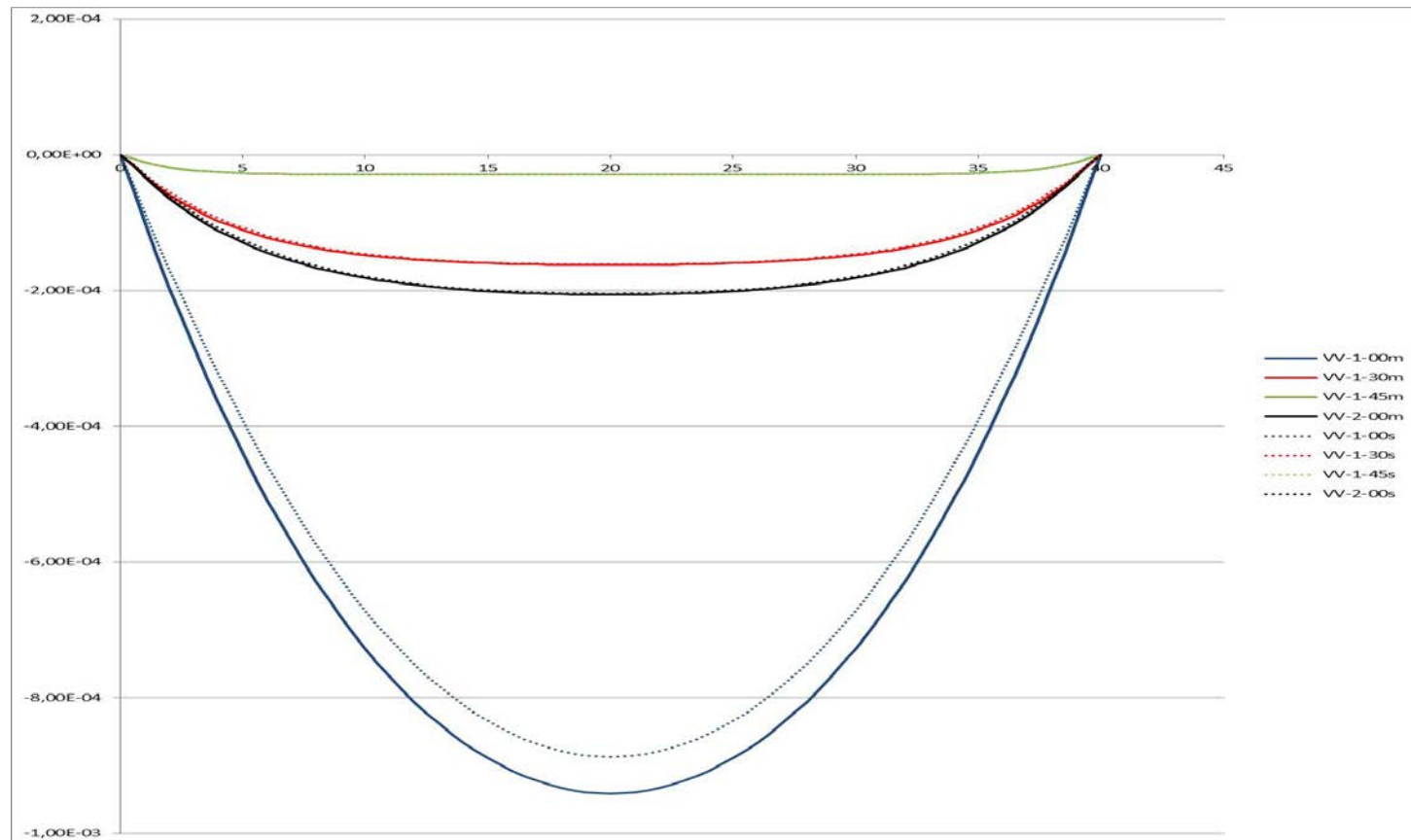


Master

Le volte a botte

Volta a botte

Soluzioni analitiche vs soluzioni computazionali



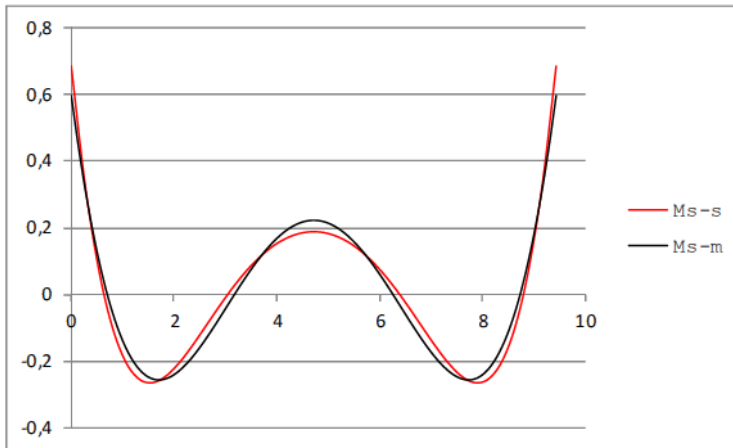


Master

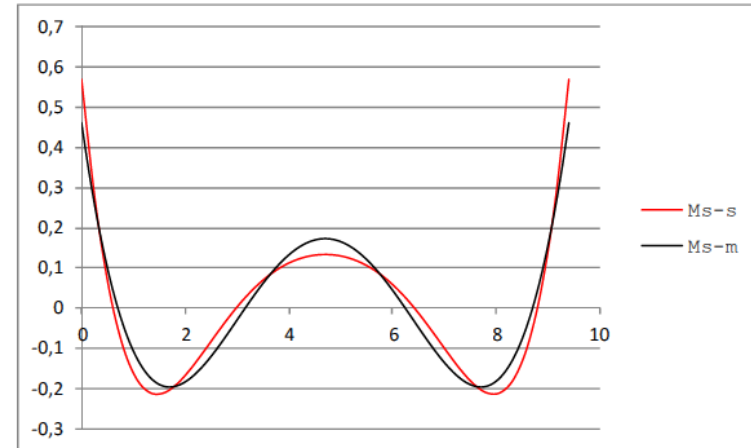
Le volte a botte

Volta a botte

Soluzioni analitiche vs soluzioni computazionali



VV-1-00 Momenti flettenti valutati in $l/2$



VV-1-00 Momenti flettenti valutati in $l/4$

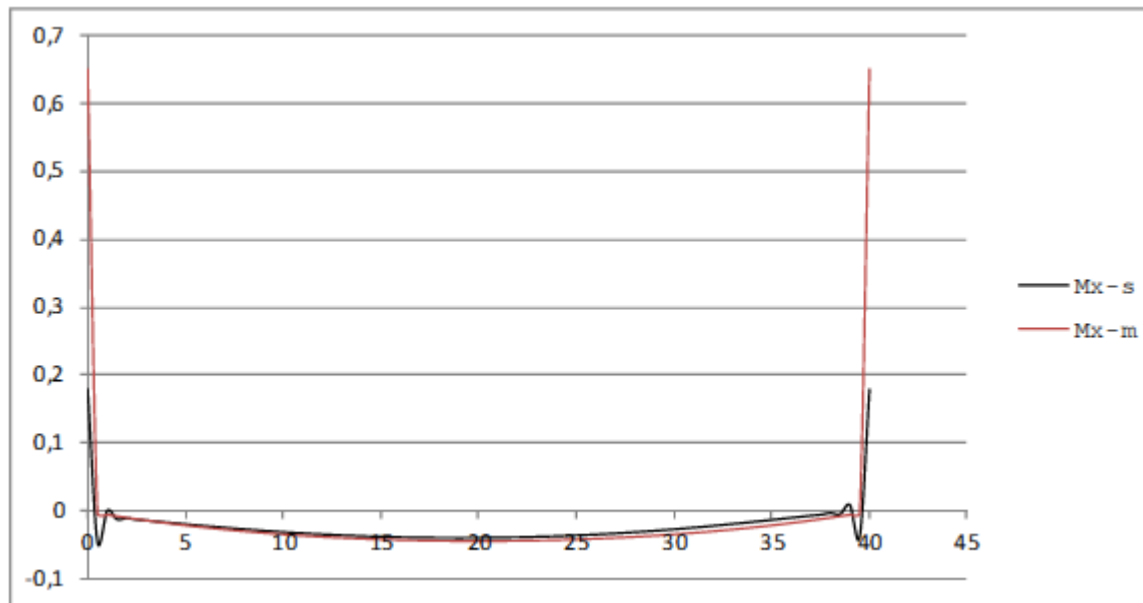


Master

Le volte a botte

Volta a botte

Soluzioni analitiche vs soluzioni computazionali



VV-1-00 Momenti flettenti lungo la direttrice di chiave

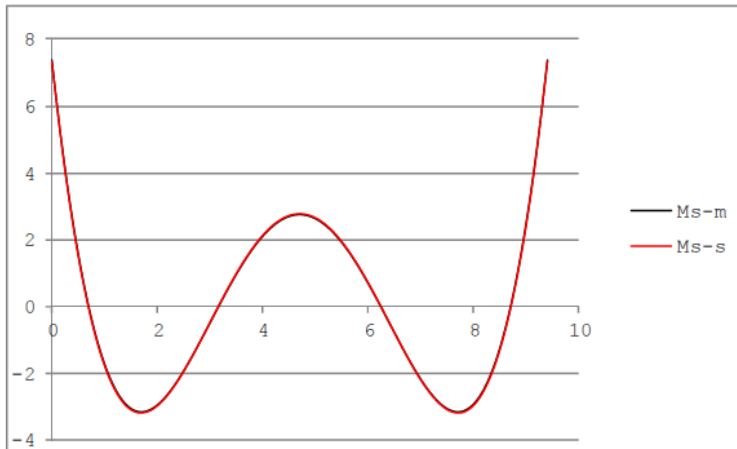


Master

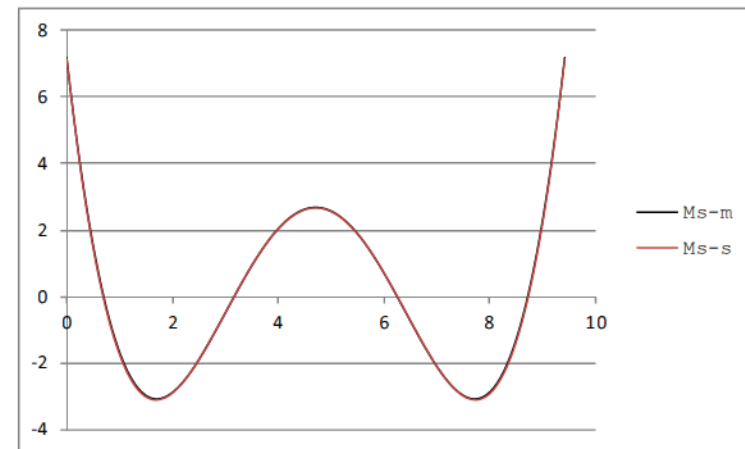
Le volte a botte

Volta a botte

Soluzioni analitiche vs soluzioni computazionali



VV-3-00 Momenti flettenti valutati in 1/2



VV-3-00 Momenti flettenti valutati in 1/4

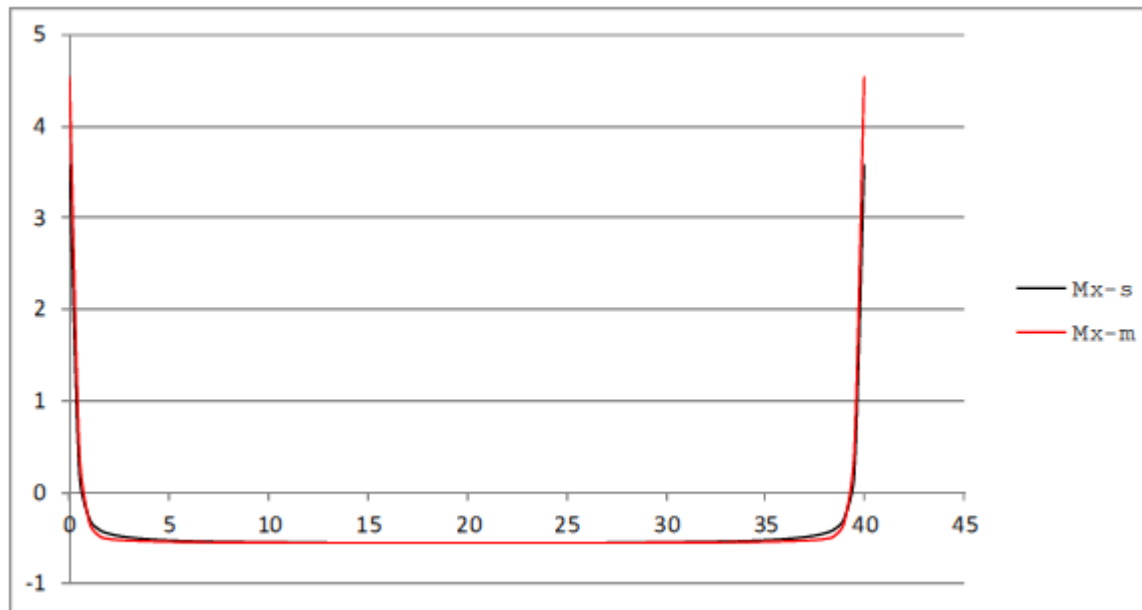


Master

Le volte a botte

Volta a botte

Soluzioni analitiche vs soluzioni computazionali



VV-3-00 Momenti flettenti lungo la direttrice di chiave



Master

Le volte a botte



Volta a botte volte lunghe vs volte corte

- Il comportamento strutturale delle volte a botte all' aumentare dello spessore cambia, passando da quello tipico di oggetti *corti* a quello di oggetti *lunghi*.
- Il comportamento strutturale delle volte a botte non dipende dal materiale
- Questo comportamento peculiare è legato al fatto che le variazioni di spessore influenzano diversamente le rigidezze degli ordini di elementi monodimensionali in cui l'oggetto può essere pensato composto
- Questo è esattamente il contrario di quanto accade nei tubi cilindrici
- Nei tubi cilindrici e nelle travi su suolo elastico è possibile definire la *lunghezza caratteristica* dell' elemento strutturale λ che confrontata con la lunghezza L dell' oggetto strutturale ci permette di individuarne il tipo di comportamento:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$$

Oggetto lungo	$\lambda \ll L$
Oggetto corto	$\lambda \gg L$

- Nelle volte a botte la maggiore complessità delle soluzioni non ci permette di individuare un parametro analogo, pertanto l'obiettivo della ricerca è la costruzione di domini di comportamento
- All' aumentare dell' angolo di imposta alla base il comportamento tende a quello di tipico dei tubi cilindrici

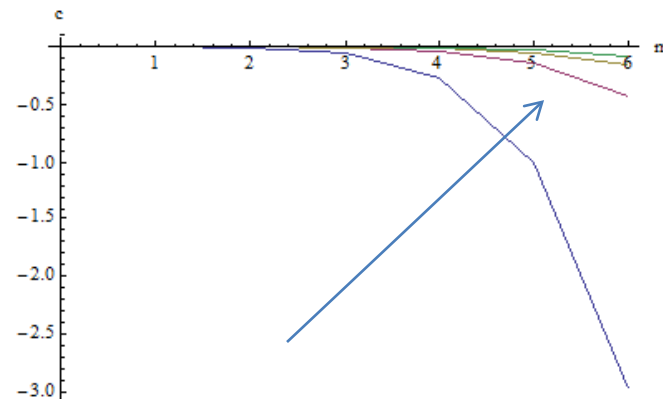
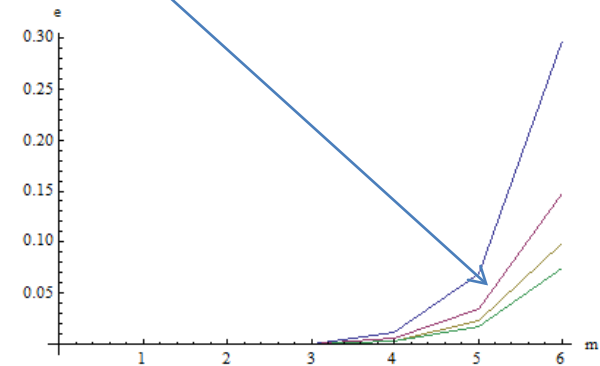
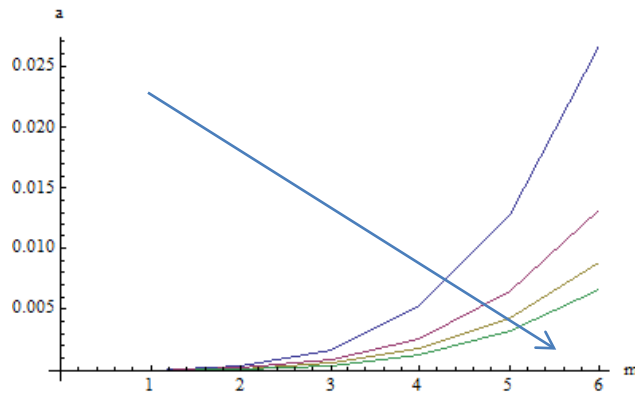


Master

Le volte a botte

Volta a botte volte lunghe vs volte corte

- Il parametro scelto per individuare il comportamento delle volte a botte è quello della “velocità” della soluzione, ovvero si è scelto di definire come lunghe le volte la cui soluzione raggiunge la soluzione particolare entro un terzo della loro lunghezza.





Master

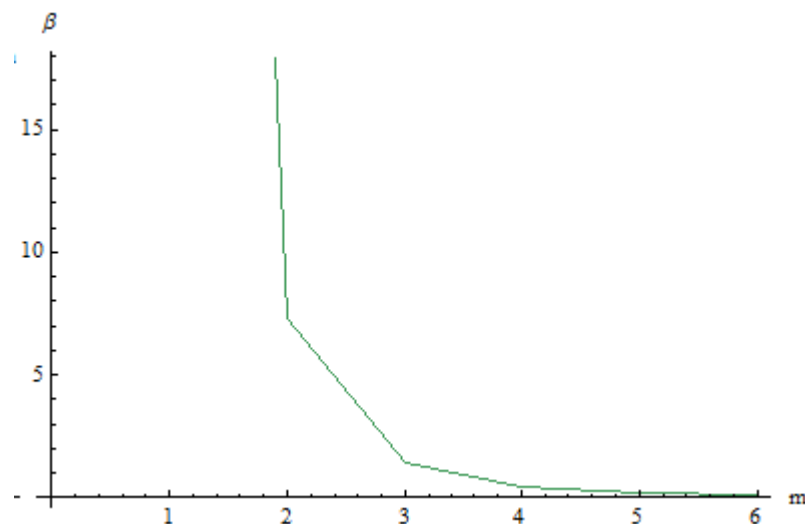
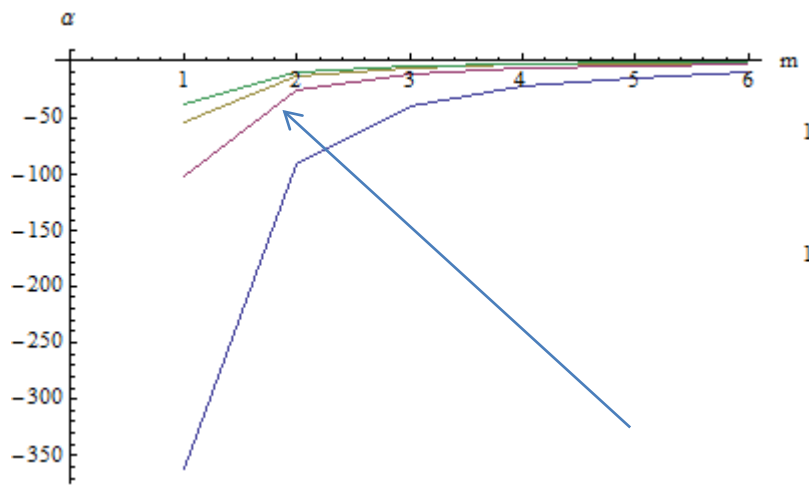
Le volte a botte

Volta a botte volte lunghe vs volte corte

- Si definiscono due ulteriori coefficienti

$$\alpha = \frac{c}{e}$$

$$\beta = \frac{a}{e}$$



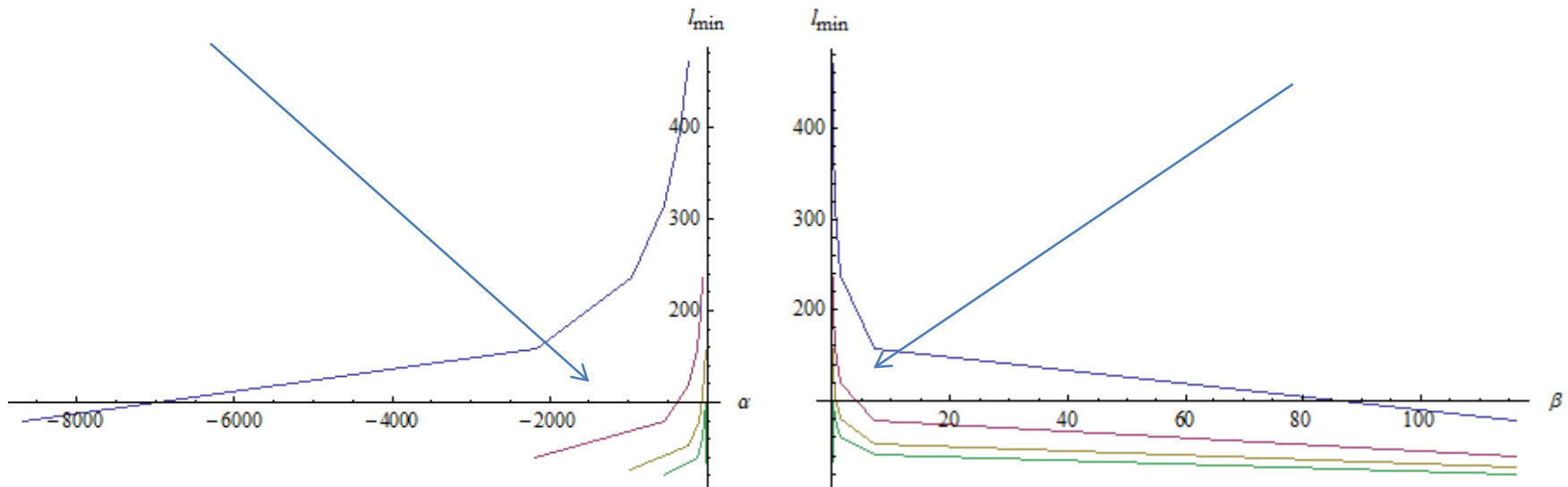


Master

Le volte a botte

Volte a botte lunghe vs volte a botte corte

- Si ottengono in fine le curve che forniscono funzione del coefficiente α la lunghezza minima che la volta deve possedere per essere considerata lunga



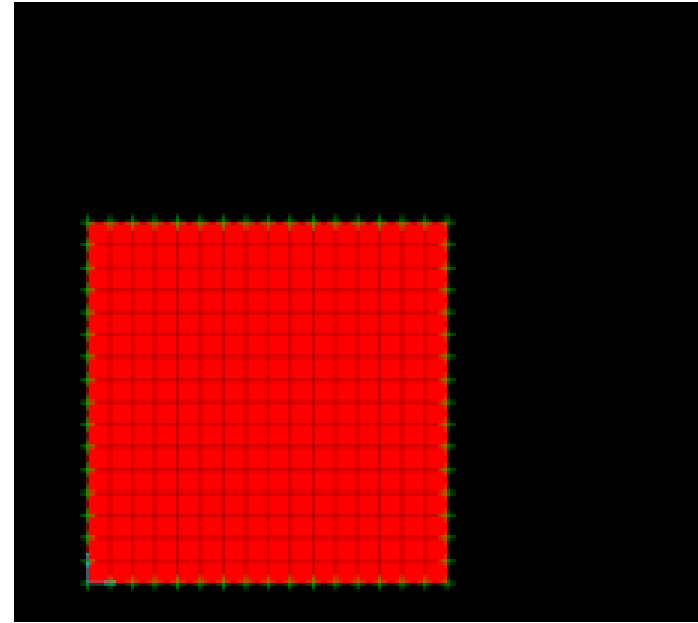
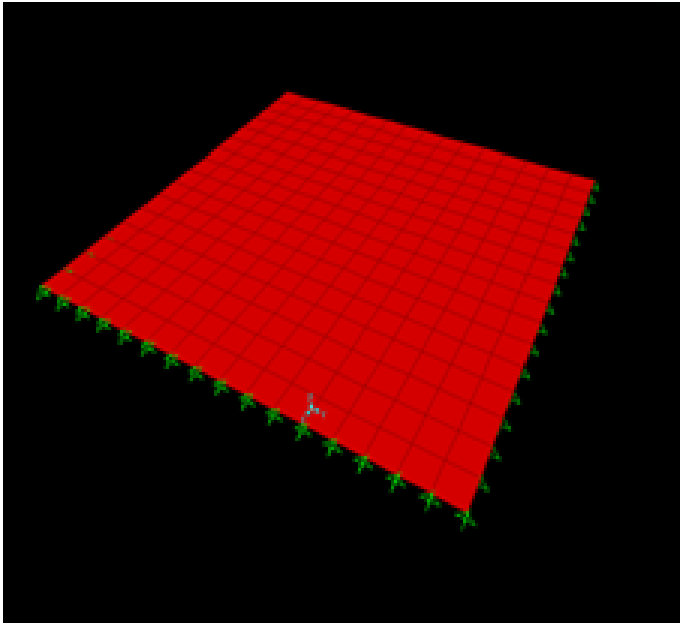


Master

Le volte a botte

Dinamica libera delle piastre

Esempio 1- Piastra su 4 appoggi



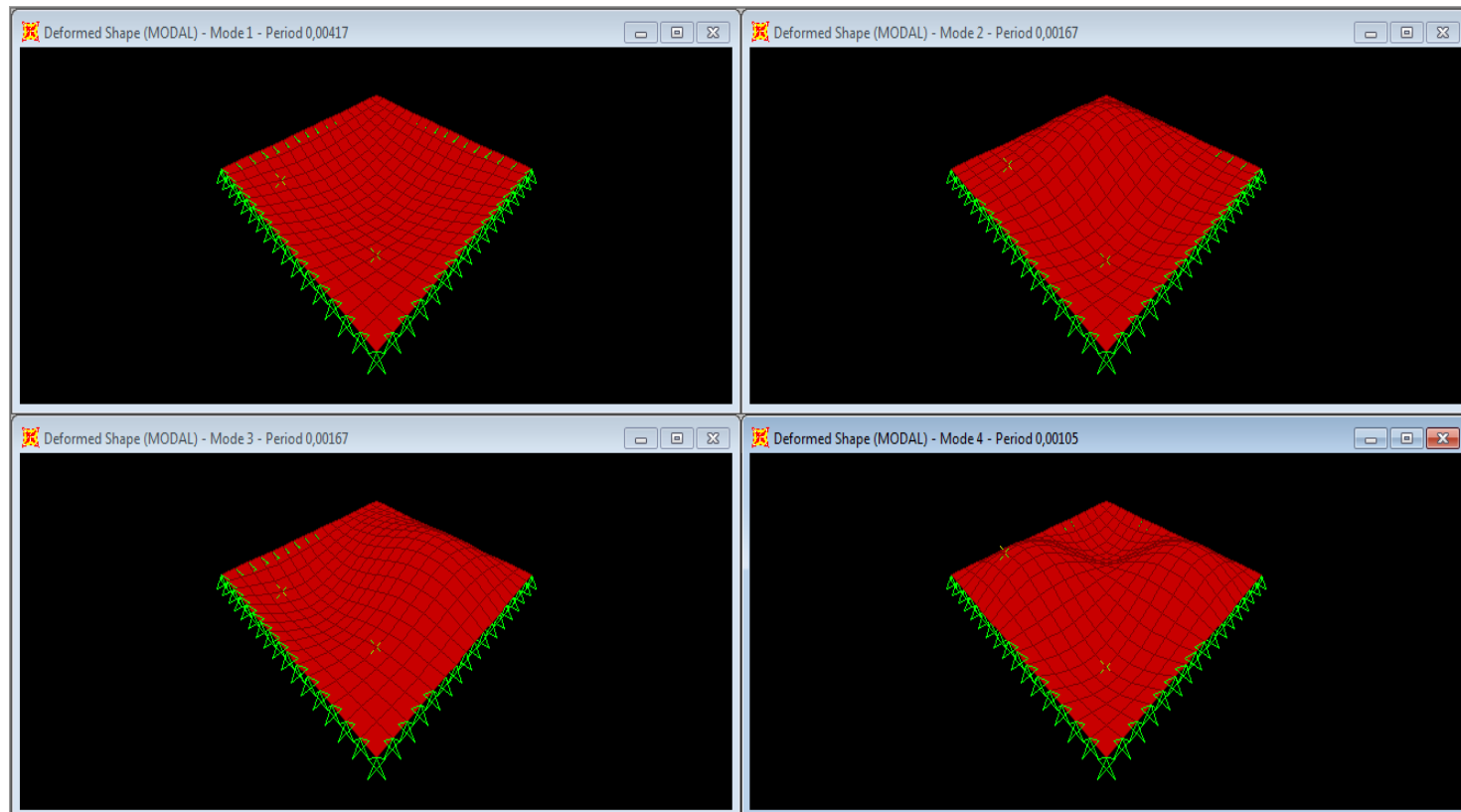


Master

Le volte a botte

Dinamica libera delle piastre

Esempio 1- Piastra su 4 appoggi



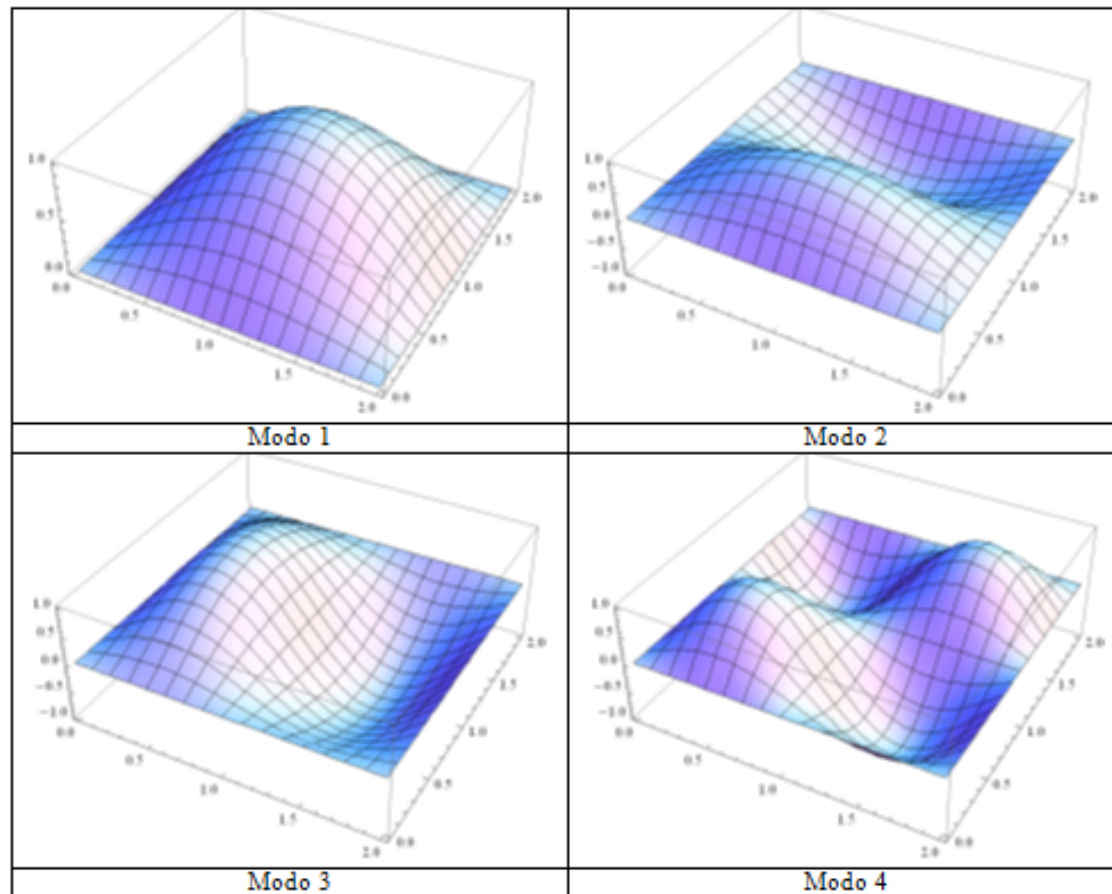


Master M.I.A.

Le volte a botte

Dinamica libera delle piastre

Esempio 1- Piastra su 4 appoggi





Master M.I.A.

Le volte a botte



Dinamica libera delle piastre

Esempio 1- Piastra su 4 appoggi

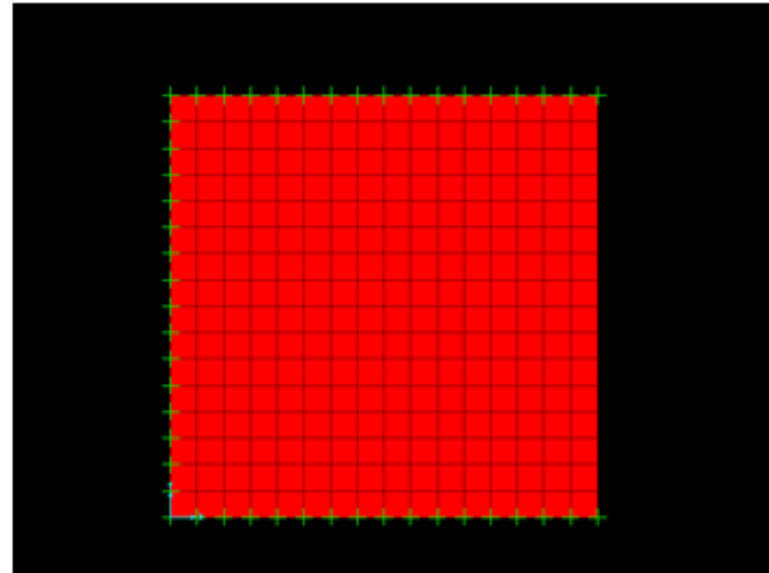
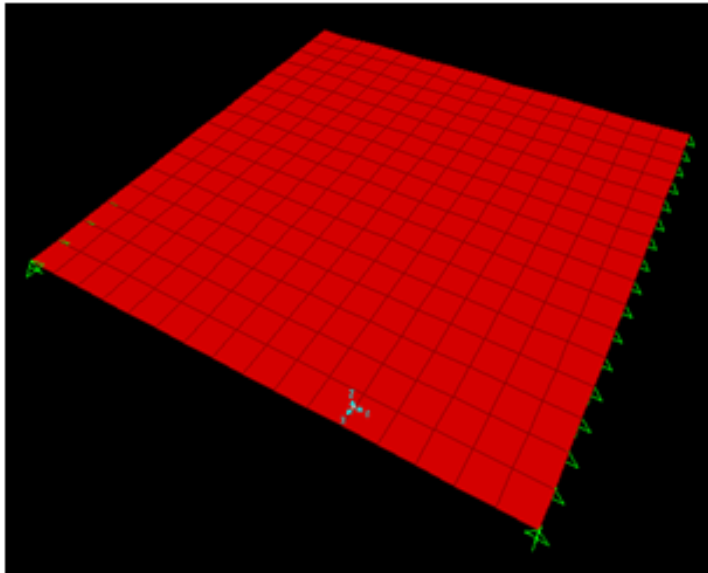
Modo	Periodo[s]	
	Computazionale	Analitico
1	0,00417	0,00416
2	0,00167	0,00166
3	0,00167	0,00166
4	0,00105	0.00100



Master M.I.A. Le volte a botte

Dinamica libera delle piastre

Esempio 2- Piastra con 2 lati appoggiati ed uno incastrato



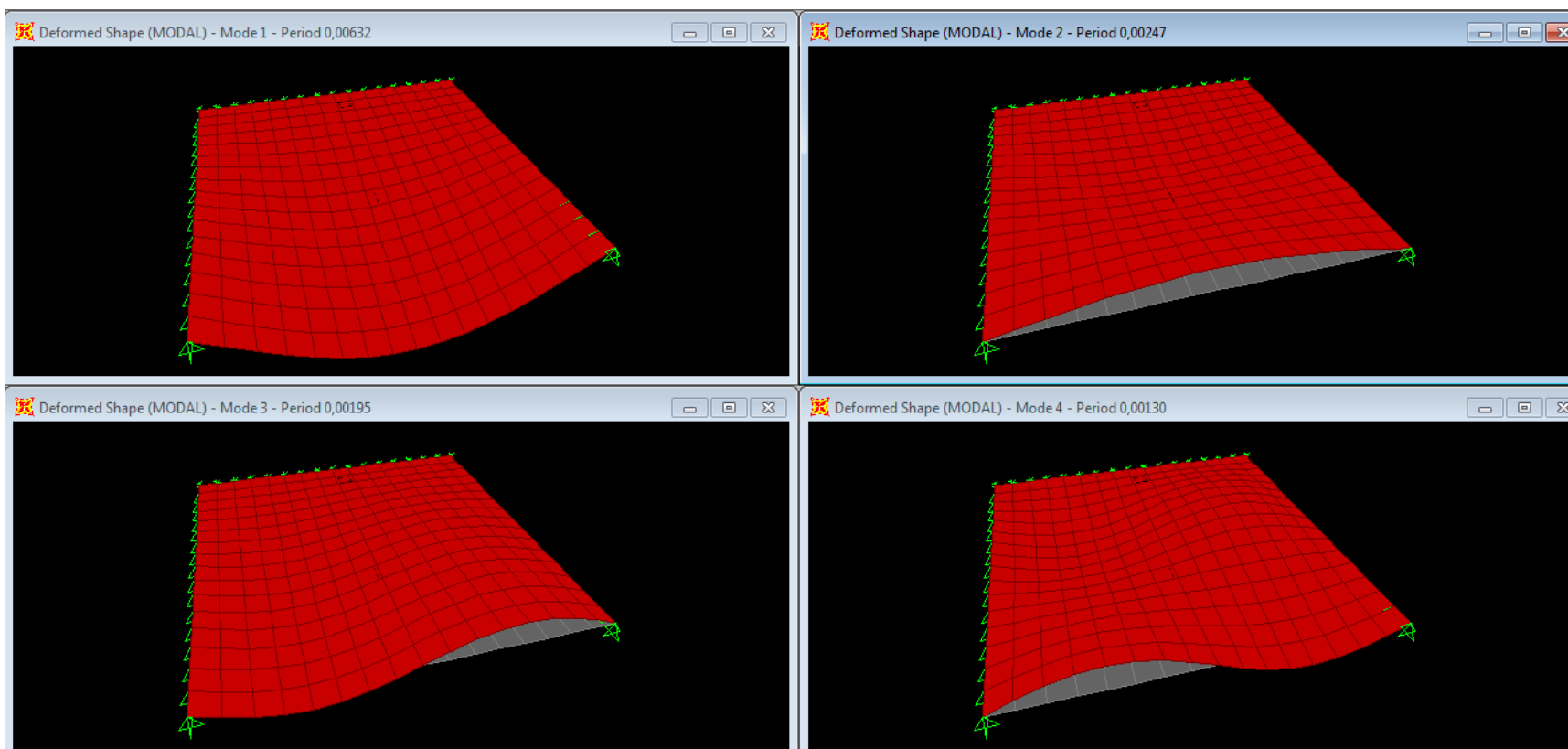


Master M.I.A.

Le volte a botte

Dinamica libera delle piastre

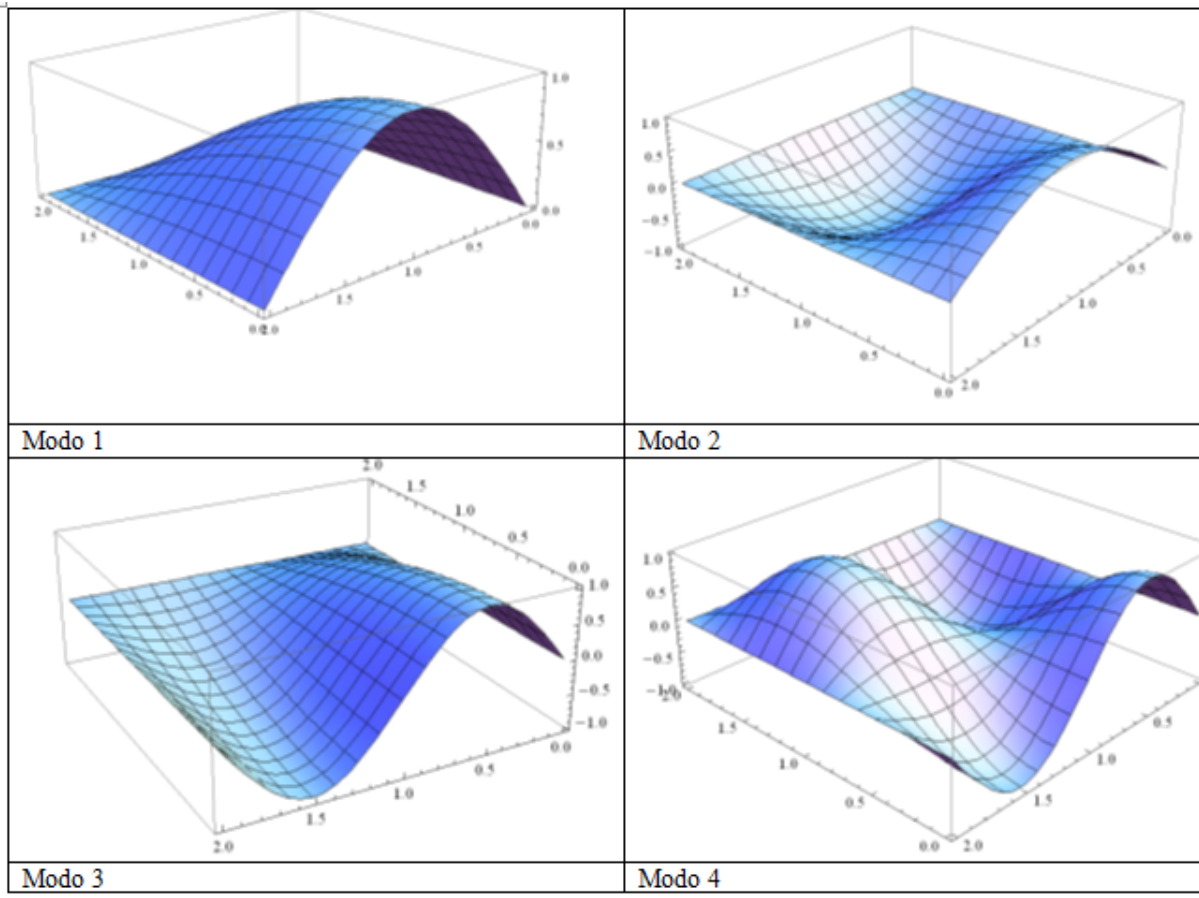
Esempio 2- Piastra con 2 lati appoggiati ed uno incastrato





Dinamica libera delle piastre

Esempio 2- Piastra con 2 lati appoggiati ed uno incastrato





Master M.I.A.

Le volte a botte



Dinamica libera delle piastre

Esempio 2- Piastra con 2 lati appoggiati ed uno incastrato

Modo	Periodo[s]	
	Computazionale	Analitico
1	0,00632	0,00613
2	0,00247	0,00257
3	0,00198	0,00195
4	0,00139	0.00130



Master M.I.A.
Le volte a botte



Grazie per l'attenzione