

Capitolo 14

Gusci di rivoluzione

1. Generalità

I gusci di rivoluzione sono oggetti geometricamente molto simili alle membrane curve di rivoluzione analizzate nel capitolo 10.

In generale sono corpi che occupano un volume tridimensionale, e sono generati dalla rotazione completa di 360° di una curva contenuta in un piano attorno ad un asse di rivoluzione. Tali elementi strutturali di conseguenza, sono dotati di assialsimmetria.

A livello geometrico, i gusci di rivoluzione sono definiti dalla forma del meridiano medio (che genera la superficie media del guscio) e dalla legge con la quale varia lo spessore s lungo il meridiano.

Quest'ultimo può essere una linea curva (lastre a doppia curvatura, chiamate anche cupole), oppure una retta (lastre coniche e cilindriche).

Riguardo allo spessore dell'elemento strutturale in esame, si ipotizza che esso non è tanto piccolo da permettere di trascurare le tensioni di flessione, come si fa per le membrane; ma lo è abbastanza perché si possa ritenere valida la variazione lineare delle tensioni nello spessore (come nelle travi inflesse).

Tuttavia, la distinzione fra membrane e gusci non è netta, poiché anche nelle prime si possono avere delle notevoli tensioni locali di flessione dovute alle forze al contorno o alle discontinuità (che di conseguenza distruggono il regime membranale delle tensioni); mentre per contro anche nelle seconde si trascurano spesso le tensioni di flessione dovute alle forze distribuite sul guscio, tenendo conto soltanto degli sforzi generalizzati N_m ed N_p , per i quali si possono usare le stesse espressioni trovate per le membrane (vedi Cap. 10).

Come per le membrane di rivoluzione poi, il caso più semplice da analizzare è quello in cui le forze applicate sono simmetriche rispetto all'asse di rivoluzione, cioè variano in generale da un parallelo all'altro; così che esse sono funzioni soltanto della coordinata che definisce i vari paralleli (angolo θ nelle cupole, ascissa x nei gusci cilindrici o conici).

In tal caso, anche le deformazioni e le sollecitazioni sono funzioni di quella sola coordinata, per cui lo studio dipende da equazioni differenziali ordinarie, anziché

alle derivate parziali. Inoltre il loro numero si riduce, perché si annullano le azioni torcenti e taglienti fra i vari meridiani.

L'assialsimmetria concludendo, riduce il dominio bidimensionale (definito dalle ascisse curvilinee s_1 e s_2 ,) su cui può essere definito l'oggetto strutturale e il problema elastico associato ai gusci, in un dominio monodimensionale: il comportamento del guscio lungo ogni meridiano è analogo a quello di tutti i meridiani, ed è rappresentativo del comportamento dell'intero guscio.

Infine, prima di iniziare l'analisi dei 3 sottoproblemi del problema elastico associato al modello di guscio di rivoluzione, si osserva che – come già fatto per le membrane – anche nel caso dei gusci assialsimmetrici ci si può aspettare (e di conseguenza, si può *ipotizzare*) un comportamento globale caratterizzato dalla collaborazione di due diversi ordini di travi:

- travi curve (che corrono lungo i meridiani);
- travi ad anello (che corrono lungo i paralleli).

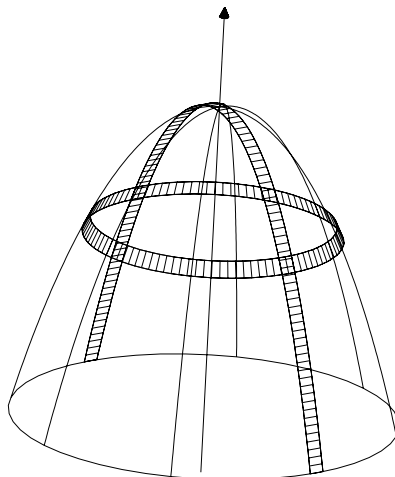


Fig.1: Ordini delle travi prese in esame

Il guscio di rivoluzione cioè, può essere pensato (a livello comportamentale) come costituito dalla sovrapposizione di questi due ordini di travi.

Si vedrà tra breve allora, che le azioni esterne sono *portate* dal *contributo flessionale* delle travi curve (effetto flessionale) e dal *contributo estensionale* (si ricorda che i carichi radiali distribuiti hanno un effetto estensionale sulle travi ad anello) delle travi ad anello.

OSS 1:

I gusci di rivoluzione studiati nel seguito, vengono considerati (per ipotesi) con uno spessore sufficientemente piccolo da consentire lo studio mediante teorie elementari¹, ma non tanto piccolo da poterle considerare come membrane.

Come già visto nei modelli di lastra, piastra e membrana allora, anche nel modello di guscio di rivoluzione il processo di scrittura del problema statico e cinematico consisterà nel **condensare la variabilità delle grandezze statiche e cinematiche lungo lo spessore, nella superficie media** (chiamata *superficie elastica*)².

L'ipotesi di piccolo spessore (come si vedrà tra breve) in sostanza, ci permetterà:

1. di semplificare enormemente il problema elastico in esame, dove si prenderà in considerazione solo la superficie media dell'oggetto: su tale piano si ipotizzeranno applicati gli sforzi generalizzati, intesi ancora una volta come integrale sullo spessore h delle tensioni puntuali.
2. di affermare, con una approssimazione accettabile, che segmenti materiali, inizialmente ortogonali al piano tangente alla superficie media dell'oggetto, si manterranno rettilinei durante la deformazione; in pratica, essi potranno solo ruotare rispetto a tale piano.

OSS 2:

Lo studio dei gusci di rivoluzione si può effettuare usando le soluzioni rigorose (nei pochi casi nei quali sono note), che però richiedono un lavoro lungo ed estenuante; oppure usando soluzioni approssimate, che spesso sono di impiego semplice e danno ottime approssimazioni (Teoria di Meissner o di Geckler).

OSS 3: *I modelli membrana e guscio* (come accadeva anche per i modelli lastra piana e piastra piana) *non sono disaccoppiati*; studiando cioè, il modello di guscio, deve essere considerato anche il comportamento membranale dell'oggetto strutturale guscio (e quindi il modello di membrana).

2. Risoluzione del problema elastico associato al modello di guscio di rivoluzione

Nei paragrafi successivi, sulla base del quadro fin qui delineato, si analizzano i tre sottoproblemi del problema elastico associato al modello di guscio di rivoluzione, e si formulano le equazioni risolventi relative alle teorie semplificate note in letteratura (Teoria di Meissner o di Geckler).

2.1 Caratterizzazione geometrica dei gusci di rivoluzione

Sulla superficie media dei gusci di rivoluzione, si possono definire due ordini di curve:

- Meridiani

¹ Il piccolo spessore rende attendibile l'ipotesi della variazione lineare delle σ nello spessore, consueta nella scienza delle costruzioni, che consente di studiare l'equilibrio e le deformazioni di elementi di volume aventi l'intero spessore s ; mentre se la piastra fosse grossa, si potrebbe studiare soltanto coi metodi della Teoria dell'Elasticità, cioè considerando elementi di volume infinitesimi nelle tre direzioni.

² Ciò è possibile per il fatto che lo spessore del guscio è stato ipotizzato *piccolo* rispetto alle altre dimensioni dell'elemento strutturale (misurate lungo le ascisse curvilinee).

- Paralleli

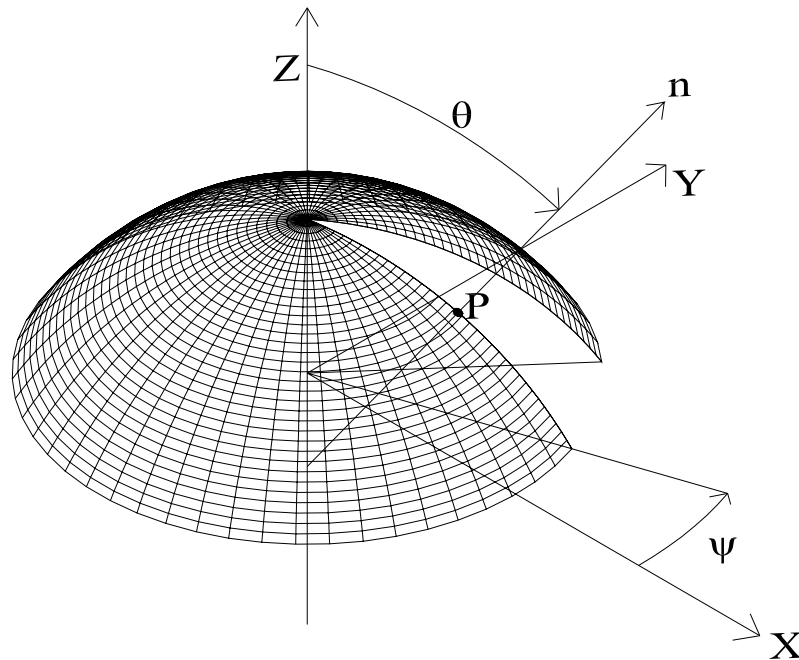


Fig 2

I meridiani si ottengono sezionando la superficie media con un piano contenente l'asse di rivoluzione, mentre i paralleli si ottengono sezionando la superficie media con piani perpendicolari all'asse di rivoluzione (vedi Fig. 2).

Si definiscono, ora, i parametri geometrici che caratterizzano una membrana di rivoluzione:

- θ = angolo formato dalla normale alla superficie passante per P e l'asse di rivoluzione
- ψ = angolo compreso tra il piano di riferimento "x-z" e il piano contenente il meridiano passante per P

L'angolo θ viene chiamato angolo di colatitudine, mentre l'angolo ψ viene chiamato angolo di latitudine.

Si possono definire poi, le due sezioni principali S_1 ed S_2 passanti per il punto P. Esse sono individuate mediante l'intersezione della superficie con due piani tra loro ortogonali tali che:

- S_1 è un piano che contiene sia la normale al punto P che l'asse di rivoluzione;
- S_2 è un piano che contiene la normale al punto P ed è ortogonale al piano S_1 .

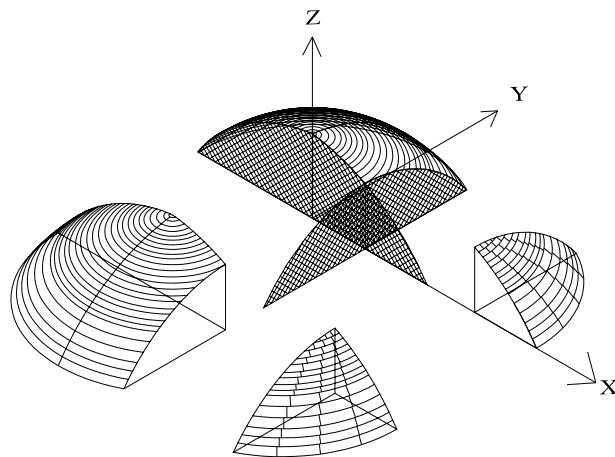


Fig 3

Lungo la sezione S_1 si osserva quanto riportato in Figura 4:

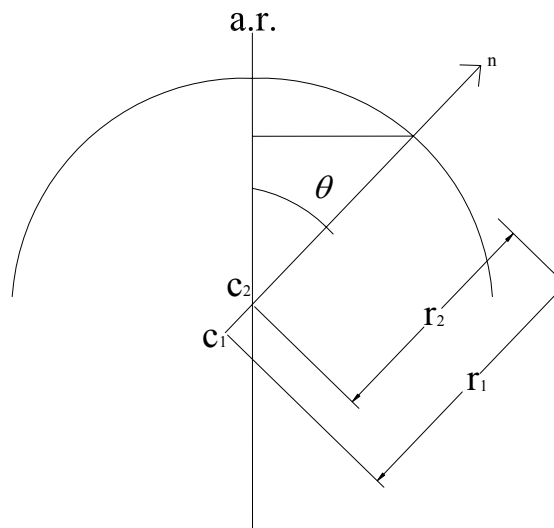


Fig 4

- r_1 = raggio di curvatura della sezione S_1 (ovvero, raggio di curvatura del meridiano)
- r_2 = raggio di curvatura della curva ottenuta dalla sezione S_2
- c_1 = centro di curvatura del meridiano
- c_2 = centro di rotazione della curva individuata dalla sezione S_2 ; c_2 ha la proprietà che giace sempre sull'asse di rotazione qualunque sia S_2 ;

2.2 Problema Cinematico

In questa sezione, si analizza il problema cinematico dei gusci di rivoluzione.

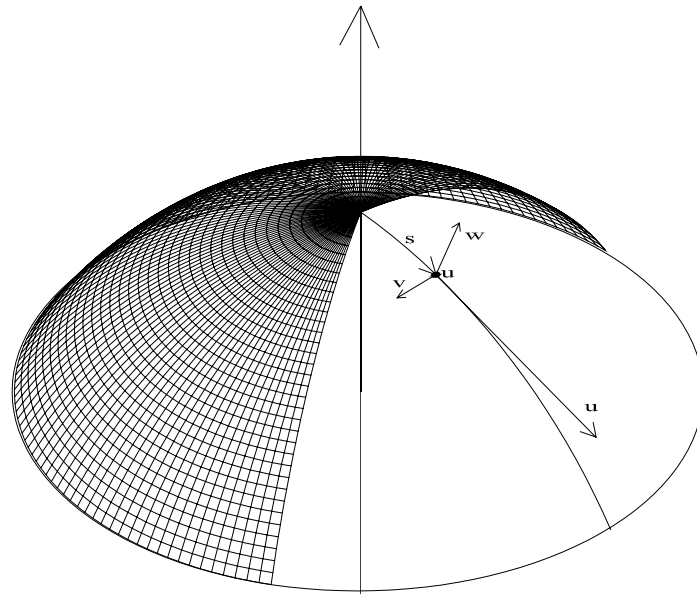


Fig 5

Analogamente a quanto visto per i modelli precedenti, tale problema è caratterizzato ed è volto alla determinazione dalle Equazioni Implicite di Congruenza, che costituiscono un legame tra le deformazioni (generalizzate o puntuali) e gli spostamenti (generalizzati o puntuali).

Il primo passo da effettuare nell'ambito di questo problema è la *definizione del campo di spostamenti* $\{u\}$; in generale, per quanto detto nel primo paragrafo del presente capitolo, esso è costituito dalle seguenti tre componenti:

$$\{u\} = \{u, v, w\}^T$$

- u = spostamento di P tangente al meridiano;
- v = spostamento di P tangente al parallelo;
- w = spostamento di P lungo una direzione ortogonale al piano formato da u e v .

Poiché i gusci di rivoluzione sono superfici assial-simmetriche, lo spostamento “ v ” non soddisfa le condizioni di simmetria tranne quando è identicamente nullo.

Si ricorda poi, come già detto al paragrafo 1 del presente capitolo, che il comportamento globale dei gusci di rivoluzione può essere pensato come caratterizzato dalla collaborazione di due diversi ordini di travi:

- travi curve (che corrono lungo i meridiani);
- travi ad anello (che corrono lungo i paralleli).

Di conseguenza, il dominio in cui è definito il problema cinematico diventa monodimensionale; il comportamento del guscio lungo un meridiano cioè, è rappresentativo del comportamento su tutti i meridiani, e quindi del guscio nella sua interezza.

Concludendo, per descrivere il comportamento strutturale dell'oggetto guscio di rivoluzione è sufficiente conoscere il comportamento lungo un suo meridiano; il dominio, cioè, può essere pensato come un insieme di *aste curve*.

Ciò implica che l'angolo di latitudine ψ non è più una variabile indipendente del modello guscio. Le grandezze statiche e cinematiche allora, dipendono soltanto dall'angolo di colatitudine θ .

Tuttavia, al posto di θ , si può scegliere anche una ascissa curvilinea s come variabile indipendente del modello.

Questo implica che, detta s l'ascissa curvilinea, la posizione del generico punto materiale $P(s)$ nella configurazione deformata è individuata dalle componenti di spostamento $v(s)^3$, $u(s)$ (che sono rispettivamente gli spostamenti lungo la normale in P al piano medio e lungo la tangente in P al meridiano) e dalla rotazione $\varphi(s)$ intorno all'asse tangente al parallelo in P (Fig.6).

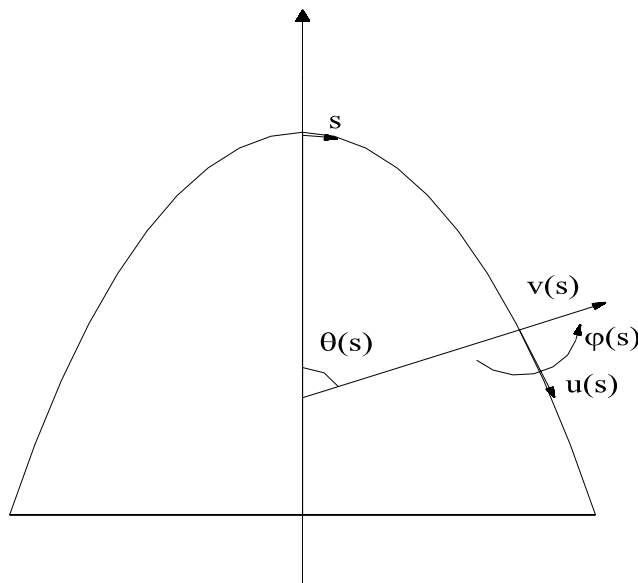


Fig.6: Componenti di spostamento del generico punto P

Tali componenti, dette spostamenti generalizzati, definiscono il campo degli spostamenti, identico a quello utilizzato nel caso delle travi curve.

Ciò è lecito poiché, in precedenza, è stato asserito che per descrivere il comportamento strutturale dell'oggetto guscio di rivoluzione è sufficiente conoscere il comportamento lungo un suo meridiano; il dominio, cioè, può essere pensato come un insieme di *aste curve*.

E' naturale allora, che gli spostamenti generalizzati del modello guscio, che descrivono compiutamente la cinematica del sistema, siano coincidenti con gli spostamenti generalizzati usati nel modello di trave curva:

$$u = \{u, v, \varphi\}^T$$

Per quanto riguarda invece, la terza componente di spostamento lungo la tangente al parallelo in P e le altre due rotazioni, esse sono assunte a priori tutte nulle poiché non rispettano l'assial-simmetria.

³ Per comodità, la variabile di spostamento w viene rinominata come v .

Il secondo passo invece, nell'ambito dello studio del problema cinematico associato al modello, è la determinazione del *campo delle deformazioni* associate al campo degli spostamenti.

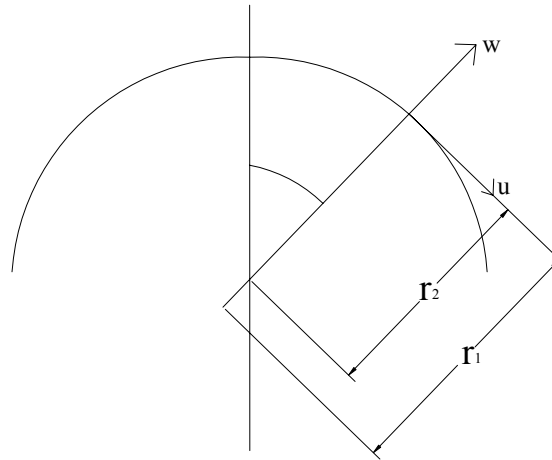


Fig. 6

Alla luce della schematizzazione del guscio come la sovrapposizione di due ordini di travi, si deduce che le deformazioni generalizzate da prendere in considerazione (ed analizzare) sono quelle relative alla trave curva ordita nel senso dei meridiani (che indicheremo con il pedice m) e quelle della trave ad anello ordita nel senso dei paralleli (che indicheremo con il pedice p).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_m \quad \gamma_m \quad k_m \quad \varepsilon_p \quad k_p\}^T \quad (1)$$

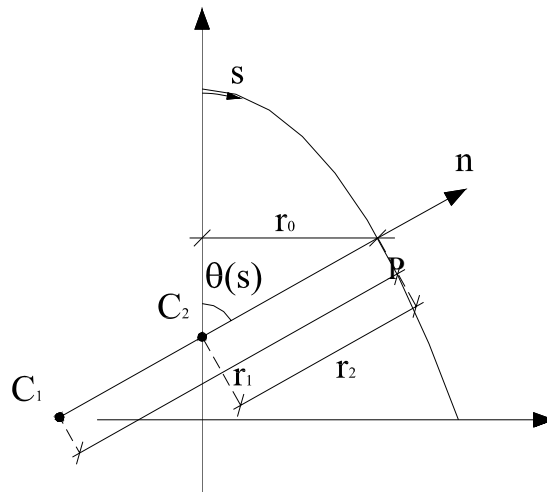


Fig. 7: Sezione passante per il meridiano e per l'asse di rivoluzione

Il terzo passo infine, nell'ambito del problema cinematica, è la determinazione delle *Equazioni Implicite di Congruenza*. Ciò equivale all'analisi degli *effetti*, in termini di deformazioni generalizzate, generati dagli spostamenti generalizzati u , w e φ .

Per quanto riguarda la trave curva corrispondente ad un meridiano, per evidenziare e caratterizzare meglio le deformazioni al caso in esame, possiamo prendere in considerazione la sezione principale s_1 (già definita nelle membrane di rivoluzione) passante per l'asse di rivoluzione e la normale al punto P (Fig.7).

In definitiva, chiamando con r_0 la curvatura locale del parallelo in P, il legame deformazioni – spostamenti relativo alle travi curve (disposte lungo i meridiani)⁴, è il seguente (sono le equazioni implicite di congruenza del modello di trave curva):

$$\begin{cases} \varepsilon_m = u' + \frac{v}{r_1} \\ \gamma_m = v' - \frac{u}{r_1} - \varphi \\ k_m = \varphi' \end{cases} \quad (2)$$

Per quanto riguarda invece, le travi ordite come i paralleli, il legame deformazioni – spostamenti è identico a quello valido per le travi ad anello trattate nel capitolo 5. Tuttavia, in questo caso la trave ad anello è ruotata in ogni sua sezione dell'angolo θ (come si vede chiaramente in Fig. 4).

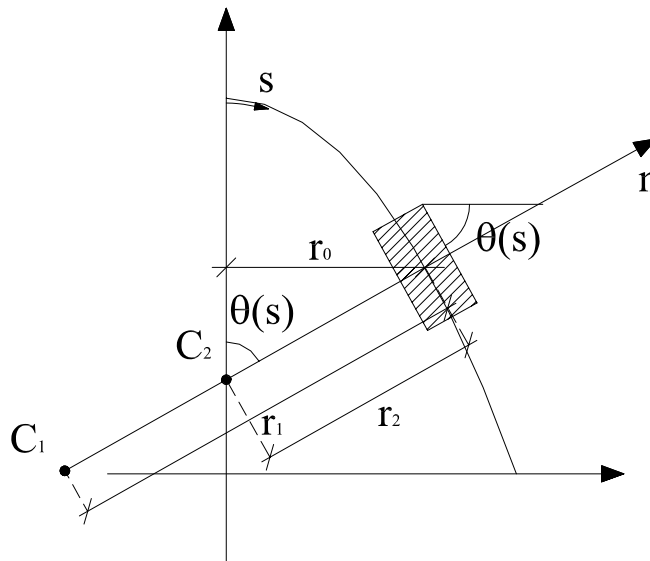


Fig. 8: Particolare della trave ad anello ordita nel senso dei paralleli

Per la deformazione ε_p^5 , vale lo stesso risultato ottenuto per le membrane di rivoluzione, mentre per la deformazione generalizzata k_p dobbiamo effettuare una proiezione della curvatura flessionale rispetto alla tangente al meridiano nel punto P (poiché la trave ad anello è ruotata di un angolo θ (Fig. 9)).

⁴ Dove il simbolo di derivazione sottintende che essa sia fatta rispetto alla variabile s .

⁵ Deformazione estensionale di parallelo.

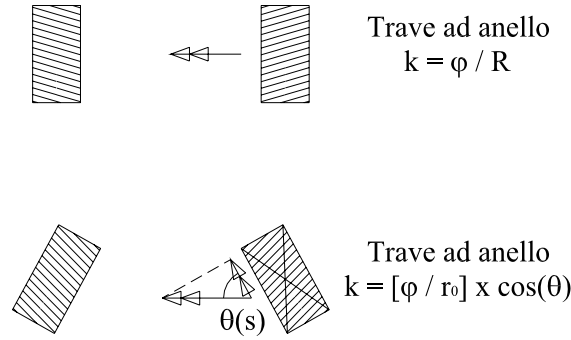


Fig. 9: Proiezione della curvatura flessionale della trave ad anello

In definitiva, il legame deformazione – spostamento per la trave ad anello del guscio di rivoluzione è il seguente (valido per una trave ad anello di larghezza unitaria):

$$\begin{cases} \varepsilon_p = \frac{v}{r_2} + \frac{u}{r_0} \cdot \cos \theta \\ k_p = \frac{\varphi}{r_0} \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (3)$$

Le equazioni implicite di congruenza del problema in questione quindi, poste nella forma operatoriale $\{\varepsilon\} = [D]\{u\}$ sono le seguenti:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_p r_0 \\ \gamma_m \\ k_m \\ k_p r_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{r_1(\theta)} & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\frac{1}{r_1(\theta)} & \frac{d}{ds} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \\ 0 & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Le Equazioni implicite di Congruenza mettono in evidenza che il problema cinematico è impossibile per vincoli interni.

L'operatore cinematico infatti, è rettangolare alto, dato che il numero delle equazioni è maggiore del numero delle incognite.

Ciò implica che se sono note a priori le deformazioni, le incognite del problema sono gli spostamenti, e il problema cinematico (inverso⁶) non ha, in genere, soluzione.

Affinché tuttavia, il problema cinematico ammetta soluzione, devono essere verificate le Equazioni di Compatibilità Cinematica (o Equazioni esplicite di congruenza):

$$\mathbf{S}^* \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad \text{su } V \quad (5)$$

⁶ Dato che il problema cinematico diretto ammette sempre soluzione (noti gli spostamenti, è possibile sempre trovare il campo delle deformazioni).

dove \mathbf{S}^* è l'operatore di compatibilità cinematica, duale rispetto all'operatore di autotensione \mathbf{S} .

Infine, si osserva che il problema cinematico è differenziale del 3° ordine, nelle tre variabili generalizzate u , v e φ .

Di conseguenza, per poter trovare la soluzione del problema cinematico, integrando le (4) e calcolando i valori delle costanti di integrazione, è necessario imporre 3 *condizioni al contorno cinematiche* sulla superficie vincolata S_u , una per u , una per v e una per φ :

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \\ v &= \bar{v} \\ \varphi &= \bar{\varphi} \end{aligned} \quad (6)$$

2.3 Problema Statico

In questa sezione, si analizza il problema statico dei gusci di rivoluzione.

Analogamente a quanto visto per i modelli precedenti, tale problema è caratterizzato ed è volto alla determinazione dalle Equazioni Indefinite⁷ di Equilibrio, che costituiscono un legame tra gli sforzi (generalizzati o puntuali) e i carichi agenti.

Per dedurre le condizioni di equilibrio, si utilizza il seguente postulato: condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo deformabile è che valgano le equazioni cardinali della statica per ogni porzione di volume del corpo.

Inoltre, come già visto al primo paragrafo, si isola un concio infinitesimo appartenente alla membrana, e si analizzano gli sforzi applicati ai bordi di quest'ultimo (che vengono scambiati con la restante parte di struttura), deducendoli mediante considerazioni geometrico – meccaniche; utilizzando un *approccio semplificato* (come già visto nel caso delle membrane), **si individuano a priori le grandezze statiche generalizzate, verificando poi a posteriori la dualità tra il problema statico e dinamico e tra i corrispondenti operatori.**

Le grandezze statiche generalizzate allora, individuate a priori sull'areola di guscio, sono le seguenti,

$$\sigma = \{N_m \quad N_p \quad T_m \quad M_m \quad M_p\}^T \quad (7)$$

intese come risultanti sullo spessore.

Isolando allora, un concio infinitesimo di guscio, e applicando ai bordi di quest'ultimo gli sforzi generalizzati (7) che vengono scambiati con la restante parte della struttura, si ottiene la situazione riportata in Fig.11.

Riguardo alle forze attive quindi, il guscio è sottoposto a carichi assial-simmetrici⁸, e in particolare ad un carico ripartito normale al piano medio \mathbf{P}_n ed uno ripartito tangente al meridiano \mathbf{P}_m .

Si osserva che la convenzione adottata per questi ultimi, considera i carichi esterni positivi se concordi con le sollecitazioni dei due ordini di travi (diretti secondo i meridiani e i paralleli (vedi Fig.11)); a livello dimensionale invece, mentre i

⁷ Poiché riferite ad un elemento di volume del corpo di dimensioni infinitesime.

⁸ Tali carichi si intendono come la risultante delle azioni distribuite sull'areola di guscio.

carichi P_n e P_m hanno le dimensioni di una forza per unità di superficie, le tensioni generalizzate N , T ed M hanno rispettivamente dimensioni fisiche $[F L^{-1}]$ e $[F]$, cioè rappresentano forze e coppie per unità di lunghezza, come risultato dell'integrazione sullo spessore.

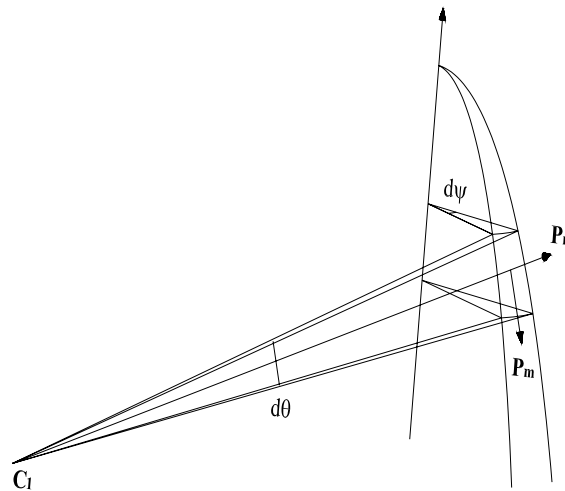


Fig.10: Concio infinitesimo di guscio

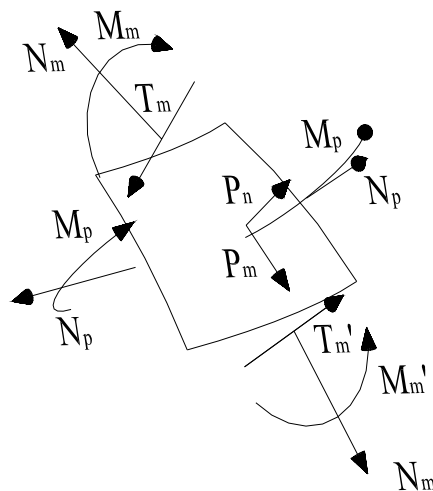


Fig.11: Tensioni generalizzate del concio infinitesimo

Tornando allo studio del problema statico allora, per determinare le Equazioni indefinite di equilibrio si impone la validità delle equazioni cardinali della statica per il concio in esame (lungo le direzioni suggerite dalle componenti generalizzate del campo di spostamenti).

In linea di principio, è necessario scrivere tutte le sei equazioni di equilibrio (tre alla traslazione e tre alla rotazione) poiché abbiamo a che fare con un oggetto tridimensionale.

Tuttavia, le uniche equazioni indipendenti e non identicamente soddisfatte sono tre.

1. Equazione di equilibrio alla traslazione, in direzione tangente al meridiano;
2. Equazione di equilibrio alla traslazione, in direzione normale alla superficie media del guscio in P;
3. Equilibrio alla rotazione intorno all'asse tangente al parallelo.

Per poter agevolmente scrivere la prima equazione di equilibrio in questione, si prendono in considerazione le due seguenti sezioni in Fig.12.

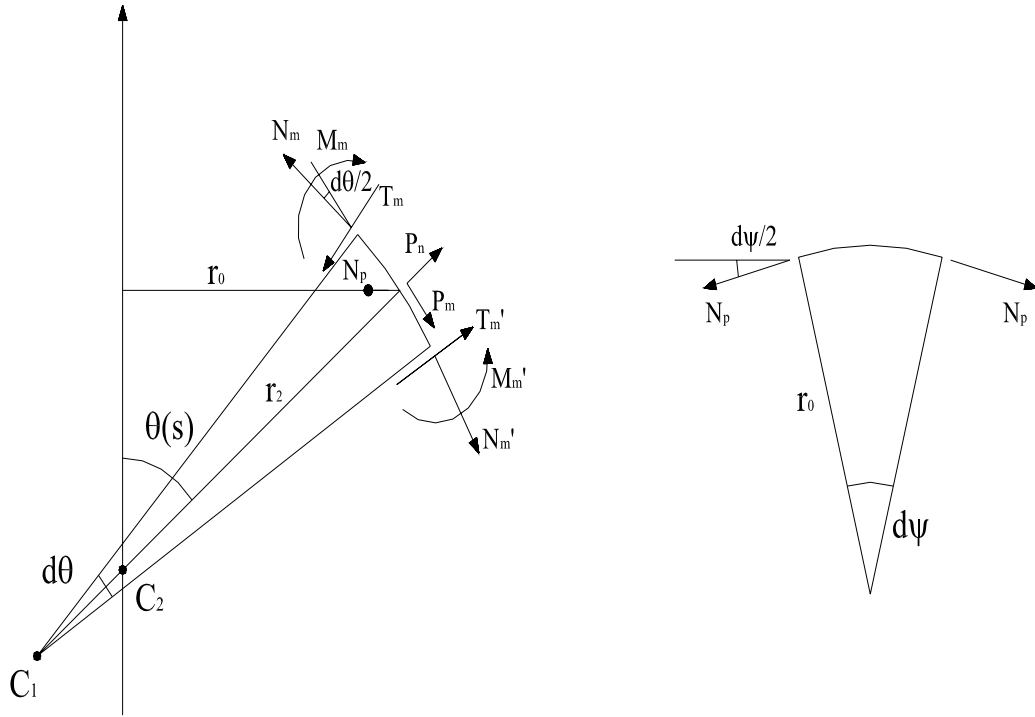


Fig.12: Sezioni del concio infinitesimo

- *Equilibrio in direzione tangente al meridiano*

Proiettando tutte le componenti lungo la direzione tangente al meridiano, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & -N_m \cdot r_0 \cdot d\psi + \left(N_m \cdot r_0 \cdot d\psi + \frac{d}{ds}(N_m \cdot r_0) \cdot ds \cdot d\psi \right) + \\
 & + T_m \cdot r_0 \cdot d\psi \cdot \frac{d\theta}{2} + \left(T_m \cdot r_0 \cdot d\psi \cdot \frac{d\theta}{2} + \frac{d}{ds}(T_m \cdot r_0) \cdot ds \cdot d\psi \cdot \frac{d\theta}{2} \right) + \\
 & - N_p \cdot d\psi \cdot r_1 \cdot d\theta \cdot \cos(\theta) + P_m \cdot r_0 \cdot r_1 \cdot d\psi \cdot d\theta = 0
 \end{aligned} \quad (8)$$

- *Equilibrio in direzione normale al meridiano*

Si proiettano ora, tutte le azioni agenti sul concio infinitesimo lungo la direzione normale al meridiano, e si impone l'equilibrio lungo tale direzione:

$$\begin{aligned}
& -N_m \cdot r_0 \cdot d\psi \cdot \frac{d\theta}{2} - \left(N_m \cdot r_0 \cdot d\psi \cdot \frac{d\theta}{2} + \frac{d}{ds}(N_m \cdot r_0) \cdot ds \cdot d\psi \cdot \frac{d\theta}{2} \right) + \\
& + T_m \cdot r_0 \cdot d\psi + \left(T_m \cdot r_0 \cdot d\psi + \frac{d}{ds}(T_m \cdot r_0) \cdot ds \cdot d\psi \right) + \\
& - N_p \cdot d\psi \cdot \sin(\theta) \cdot r_1 \cdot d\theta + P_n \cdot r_0 \cdot r_1 \cdot d\psi \cdot d\theta = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

- *Equilibrio alla rotazione intorno all'asse tangente al parallelo*

Per scrivere l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse tangente al parallelo, si prendono in considerazione le due sezioni riportate in Fig.13 e Fig.14.

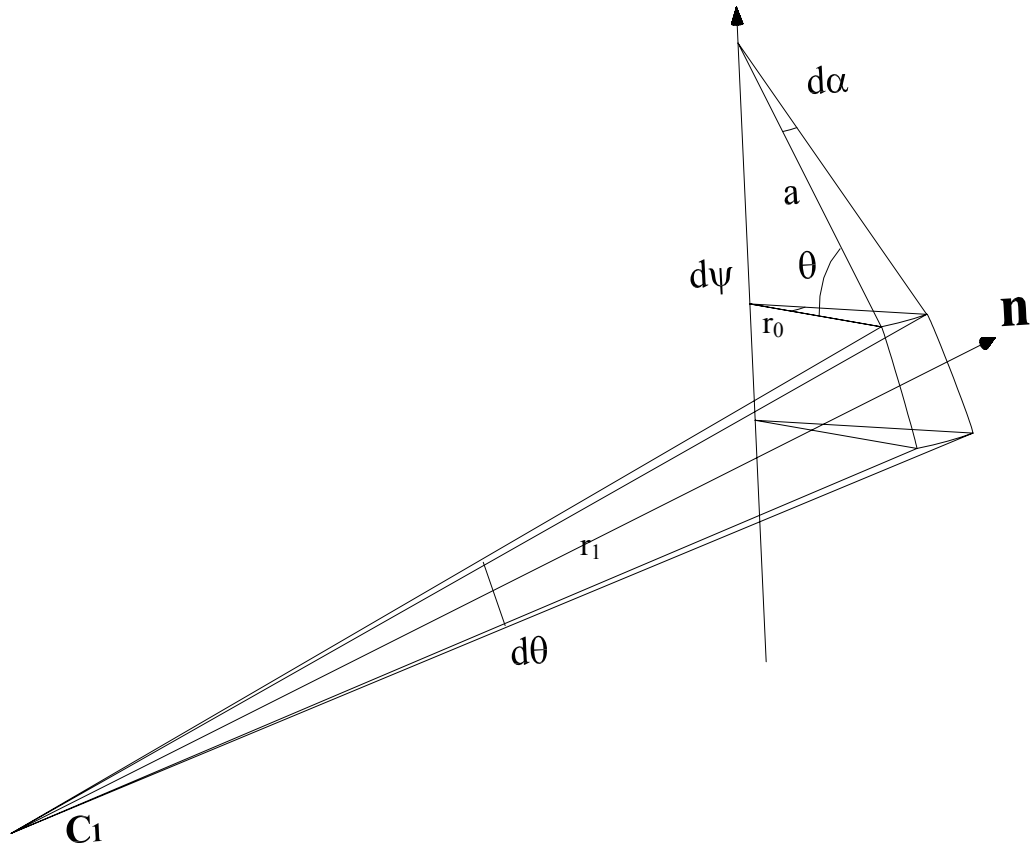
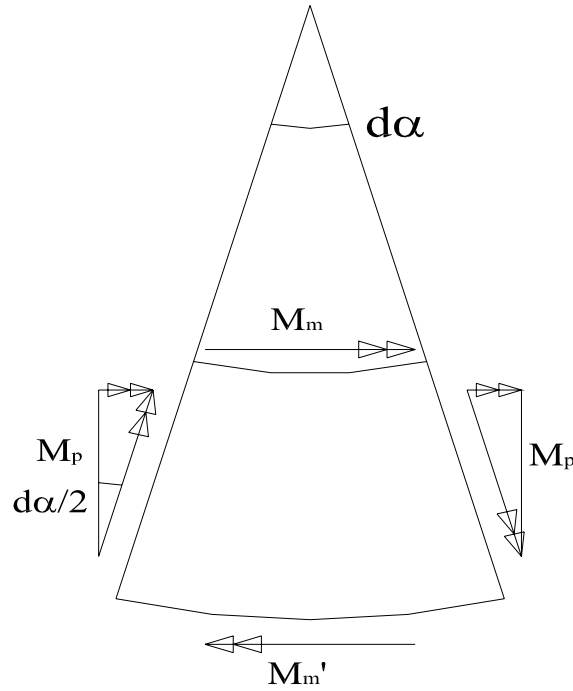


Fig.13 :Relazioni geometriche tra $d\psi$ e $d\alpha$

Fig. 14 : Proiezioni lungo la tangente al parallelo dei momenti M_p

Dalle figure sopra riportate, è facile ricavare le seguenti relazioni geometriche, che poi verranno utilizzate in seguito:

$$\begin{aligned} r_0 &= a \cdot \cos(\theta) \\ a \cdot d\alpha &= r_0 \cdot d\psi \\ d\alpha &= d\psi \cdot \cos(\theta) \end{aligned} \quad (10)$$

Utilizzando queste relazioni, si ottiene la terza equazione di equilibrio:

$$\begin{aligned} &M_m \cdot r_0 \cdot d\psi - \left(M_m \cdot r_0 \cdot d\psi + \frac{d}{ds} (M_m \cdot r_0) \cdot ds \cdot d\psi \right) + \\ &+ M_p \cdot r_1 \cdot d\psi \cdot d\theta \cdot \cos(\theta) - T_m \cdot r_0 \cdot d\psi \cdot r_1 \cdot \frac{d\theta}{2} + \\ &- \left(T_m \cdot r_0 \cdot d\psi \cdot r_1 \cdot \frac{d\theta}{2} + \frac{d}{ds} (T_m \cdot r_0) \cdot ds \cdot d\psi \cdot r_1 \cdot \frac{d\theta}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Riordinando e semplificando le equazioni, e portando al secondo membro i termini noti costituiti dai carichi, si ottengono le Equazioni indefinite di equilibrio in forma operatoriale $[D^*]\{\sigma\} = \{P\}$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{d}{ds} & \cos(\theta) - \frac{1}{r_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r_1} & \sin(\theta) - \frac{d}{ds} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \frac{d}{ds} & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_m \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{N}_p \\ \mathbf{T}_m \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{M}_m \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{M}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_m \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{P}_n \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

E' verificata, allora, la dualità del problema statico e cinematico, e la dualità delle grandezze statiche e cinematiche. Le grandezze statiche generalizzate (7) scelte precedentemente quindi, sono effettivamente le duali di quelle cinematiche generalizzate: ciò implica la validità, nell'ambito del modello di guscio di rivoluzione, del Teorema dei Lavori Virtuali.

Di conseguenza, dato che la matrice $[D^*]$ è effettivamente l'aggiunta della matrice $[D]$ ricavata nel problema cinematico (4), è lecito procedere con la risoluzione del problema elastico associato al modello in esame.

A causa della dualità tra problema statico e cinematico comunque, si osserva che il problema statico è indeterminato per vincoli interni⁹.

L'operatore statico infatti, è rettangolare basso, dato che il numero delle equazioni è minore del numero delle incognite.

Ciò implica che se è noto a priori il vettore $\{P\}$, le incognite del problema sono le tensioni generalizzate, e il problema statico (diretto¹⁰) ha ∞^2 soluzioni, poiché indeterminato di grado 2¹¹: Gli stati di tensione equilibrati con date forze esterne $\{P\}$ sono pertanto infiniti.

Questa proprietà è indipendente dalle condizioni al contorno sulla superficie vincolata S_u , che possono solo aumentare l'indeterminatezza del problema.

Una volta noto il vettore $\{P\}$ perciò, non si possono determinare univocamente le tensioni generalizzate riportate in (7), mediante integrazione delle Equazioni Indefinite di Equilibrio (12), poiché rimarrebbero indeterminate due delle cinque grandezze statiche generalizzate (7).

Infine, si osserva che il problema statico è differenziale del 3° ordine, nelle tre variabili generalizzate N_m , M_m e T_m (riferite alle travi curve dirette come i meridiani).

Di conseguenza, per poter trovare la soluzione del problema statico, integrando le (12) e calcolando i valori delle costanti di integrazione, è necessario imporre 3

⁹ Ciò è coerente con il fatto che il problema di piastra curva o di guscio (problema bidimensionale curvo), può essere considerato l'estensione del problema di piastra piana (problema bidimensionale piano), anch'essa indeterminata staticamente per vincoli interni.

¹⁰ Dato che il problema statico inverso ammette sempre soluzione (noto il campo di tensione generalizzato, è possibile sempre trovare le forze attive con esso equilibrate).

¹¹ Come appare dal bilancio delle 3 equazioni di equilibrio nelle 5 incognite.

condizioni al contorno meccaniche sulla superficie libera S_l , una per N_m , una per M_m e una per T_m :

$$\begin{aligned} N_m &= \pm n_m \\ M_m &= \pm \mu \\ T_m &= \pm t_m \end{aligned} \quad (13)$$

OSS:

Pur volendo assegnare le condizioni al contorno su N_p e T_p , si osserva subito che tali condizioni non possono essere assegnate sulla superficie libera dell'oggetto strutturale, poiché violerebbero l'assialsimmetria.

2.4 Legame costitutivo

Per ottenere il legame costitutivo diretto ed inverso tra sforzi generalizzati e deformazioni generalizzate, si può semplicemente partire dalla matrice di legame \mathbf{C} del continuo tridimensionale di Cauchy e ridurre le dimensioni del problema a quelle del nostro caso:

$$\begin{Bmatrix} N_m \\ N_p \\ T_m \\ M_m \\ M_p \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Eh}{1-\nu^2} & \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} & \frac{Eh}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 Gh & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_p \\ \gamma_m \\ k_m \\ k_p \end{Bmatrix} \quad (14)$$

dove si è indicato con h lo spessore del guscio.

OSS: In maniera più diretta, per definire il legame costitutivo del modello in analisi si potrebbe costruire la matrice di rigidezza riportata sopra in (14) assemblando le matrici di rigidezza ottenute per i modelli di:

1. membrana, relativamente alle variabili N_m e N_p ,
2. piastra piana, relativamente alle variabili M_m , T_m e M_p .

Di seguito infine, si riporta anche il legame costitutivo inverso:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_p \\ \gamma_m \\ k_m \\ k_p \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Eh} & \frac{-\nu}{Eh} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{Eh} & \frac{1}{Eh} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5/6 Gh} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12}{Eh^3} & \frac{-\nu 12}{Eh^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\nu 12}{Eh^3} & \frac{12}{Eh^3} \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} N_m \\ N_p \\ T_m \\ M_m \\ M_p \end{Bmatrix} \quad (15)$$

OSS:

Se si procede alla determinazione della soluzione del problema elastico associato al modello di guscio di rivoluzione (sia con la strategia del metodo delle forze che con la strategia del metodo degli spostamenti), si nota che le equazioni risolventi che si ottengono sono molto complesse, ed è difficile determinare in forma analitica la soluzione.

Il problema elastico tuttavia, riduce la propria complessità, se si introducono delle ipotesi semplificative: tali ipotesi (come si vedrà tra breve), conducono a teorie semplificate (ma approssimate) dei gusci di rivoluzione, come la Teoria di Meissen o di Geckler.

3. Modelli semplificati¹²

Nei paragrafi successivi, sulla base del quadro fin qui delineato, data l'impossibilità di risolvere analiticamente il problema elastico nei termini posti in precedenza, si studiano alcuni modelli semplificati, che in generale permettono di analizzare i gusci di rivoluzione di geometria particolare (a curvatura unica, ovvero le *cupole sfetiche*).

3.1 Teoria di Meissner

La teoria semplificata di Meissner, concentra l'attenzione sui gusci di rivoluzione sferici, nei quali vale $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}$. (Fig.11).

¹² I modelli riportati in questa sezione, utilizzano ipotesi semplificative sia per il problema cinematico e statico e sia per la geometria dell'oggetto strutturale.

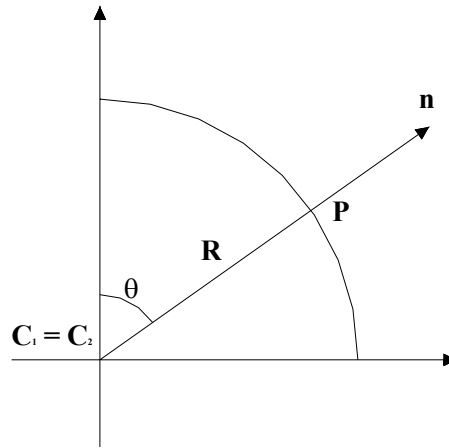


Fig.15: Sezione di un guscio sferico

Prima di entrare nei dettagli di suddetta teoria, è opportuno modificare (per comodità) la variabile indipendente del problema prendendo, anziché l'ascissa curvilinea s , l'angolo di colatitudine θ . Vale infatti, la seguente equazione, che lega le due variabili sopra citate:

$$ds = R d\theta \quad (16)$$

che può essere riscritta nel seguente modo:

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{R} \cdot \frac{d}{d\theta} \quad (17)$$

Di conseguenza, sulla base di quanto detto sopra e saltando alcuni semplici passaggi, si riportano di seguito le nuove equazioni implicite di congruenza e le nuove equazioni indefinite di equilibrio (in forma esplicita); l'apice “ ‘ ”, tuttavia, indica la derivazione rispetto alla variabile θ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_m = \frac{1}{R} \cdot (u' + v) \\ \varepsilon_p = \frac{1}{R} \cdot (v + u \cdot \cot g(\theta)) \\ \gamma_m = \frac{1}{R} \cdot (v' - u) - \varphi \\ k_m = \frac{\varphi'}{R} \\ k_p = \frac{1}{R} \cdot \varphi \cdot \cot g(\theta) \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\begin{cases} N_m' + (N_m - N_p) \cdot \cot g(\theta) + T_m + P_m \cdot R = 0 \\ T_m' + T_m \cdot \cot g(\theta) - (N_m - N_p) + P_n \cdot R = 0 \\ M_m' + (M_m - M_p) \cdot \cot g(\theta) + T_m \cdot R = 0 \end{cases} \quad (19)$$

OSS:

L'unica attenzione, nel ricavare le equazioni di equilibrio (16), va posta nella derivazione del prodotto di due funzioni dipendenti da θ , come ad esempio:

$$\frac{1}{r_0} \cdot \frac{d}{ds}(N_m \cdot r_0) = \frac{1}{r_0} \cdot \left\{ \frac{1}{R} \cdot \left[\frac{dN_m}{d\theta} \cdot r_0 + \frac{dr_0}{d\theta} \cdot N_m \right] \right\} = \frac{1}{R} \cdot (N_m' + N_m \cdot \cot g(\theta)) \quad (20)$$

A questo punto, l'ulteriore passo da svolgere per giungere alla definizione delle equazioni della teoria di Meissner, è introdurre l'ipotesi di *indeformabilità a taglio*: tale semplificazione è molto plausibile, dato che in elementi di piccolo spessore è trascurabile la deformabilità a taglio.

Ciò implica che:

$$\gamma_m = \frac{1}{R} \cdot (v' - u) - \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{1}{R} \cdot (v' - u) \quad (21)$$

Con questa semplificazione le variabili di spostamento si riducono da 3 a 2, le equazioni implicite di congruenza si riducono a 4, mentre le equazioni di equilibrio (a seguito della condensazione del taglio) diventano 2.

Lo studioso Meissner tuttavia, si accorse che il problema elastico così posto, sia utilizzando la strategia del metodo degli spostamenti e sia quella del metodo delle forze, non era ancora risolvibile analiticamente.

Dopo numerosi tentativi allora, intraprese la strategia di soluzione *seminversa*¹³ (o "ibrida") riportata di seguito.

La peculiarità di tale strategia è che le incognite primarie che vengono scelte sono sia cinematiche che statiche.

L'obiettivo cioè, anticipabile già da ora, è quello di arrivare a formulare un sistema risolvibile di due equazioni nelle incognite dipendenti Φ_m e T_m .

Il primo passo da effettuare, nell'ambito della metodologia ibrida, è il calcolo della derivata della seconda equazione di congruenza, contenuta in (15):

$$R \cdot \varepsilon_p' = v' + u' \cdot \cot g(\theta) - u \cdot \frac{1}{\sin^2(\theta)} \quad (22)$$

Per calcolare l'equazione precedente si è utilizzata la seguente relazione:

¹³ Tale strategia, è quella normalmente usata per trovare la soluzione del problema elastico associato al solido di De Saint Venant.

$$\frac{d(\cot g(\theta))}{d\theta} = -\frac{1}{\sin^2(\theta)} \quad (23)$$

A questo punto, operando la differenza tra la 2° e la 1° equazione di congruenza contenute in (15), si ottiene:

$$\begin{aligned} R \cdot (\varepsilon_p - \varepsilon_m) &= u \cdot \cot g(\theta) - u' \\ R \cdot (\varepsilon_p - \varepsilon_m) \cdot \cot g(\theta) &= u \cdot \cot^2 g(\theta) - u' \cdot \cot g(\theta) \end{aligned} \quad (24)$$

Sommando infine, l'ultima delle Equazioni (24) con l'Equazione (22), si ha:

$$R \left[(\varepsilon_p - \varepsilon_m) \cdot \cot g(\theta) + \varepsilon_p' \right] = v' - u \quad (25)$$

dove si è utilizzata la seguente proprietà : $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

In definitiva, utilizzando l'indeforabilità a taglio espressa dalla (21) e sostituendola nella (25) si ottiene:

$$\varphi_m = \varepsilon_p' + (\varepsilon_p - \varepsilon_m) \cdot \cot g(\theta) \quad (26)$$

Il legame costitutivo poi, permette sicuramente di scrivere le seguenti due equazioni per M_m e M_p :

$$\begin{aligned} M_m &= D \cdot (k_m + \nu \cdot k_p) \\ M_p &= D \cdot (k_p + \nu \cdot k_m) \end{aligned} \quad (27)$$

Sostituendo ora alle curvature k le espressioni delle equazioni di congruenza implicita, contenute nel sistema (15), si ha :

$$\begin{aligned} M_m &= D \cdot \left(\frac{\varphi_m'}{R} + \nu \cdot \frac{1}{R} \cdot \varphi_m \cdot \cot g(\theta) \right) \\ M_p &= D \cdot \left(\nu \cdot \frac{\varphi_m'}{R} + \frac{1}{R} \cdot \varphi_m \cdot \cot g(\theta) \right) \end{aligned} \quad (28)$$

E sostituendo le (28) nella terza equazione di equilibrio, riportata nel sistema (19) si ottiene una equazione nelle variabili φ_m e T_m che rappresenta **la prima equazione di Messner** :

$$\varphi_m'' + \varphi_m' \cdot \cot g(\theta) - \varphi_m \cdot \cot^2 g(\theta) - \nu \cdot \varphi_m + T_m \cdot \frac{R^2}{D} = 0 \quad (29)$$

Per ottenere la seconda equazione risolvibile di Meissner invece, si parte dal legame costitutivo inverso, mediante il quale è facile scrivere le seguenti relazioni per ε_m e ε_p :

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= \frac{1}{Eh} \cdot (N_m - \nu \cdot N_p) \\ \varepsilon_p &= \frac{1}{Eh} \cdot (-\nu \cdot N_m + N_p) \end{aligned} \quad (30)$$

Sostituendo le (30) nella (26) otteniamo:

$$N_p' - \nu \cdot N_m' + (1 + \nu) \cdot (N_p - N_m) \cdot \cot g(\theta) = \varphi_m \cdot Eh \quad (31)$$

Rimaneggiando poi, la prima equazione di equilibrio riportata nel sistema (16), e sostituendo in essa la (31) si ha :

$$\begin{aligned} (N_p - N_m) \cdot \cot g(\theta) &= N_m' + T_m + P_m \cdot R \\ N_p' - \nu \cdot N_m' + (1 + \nu) \cdot (T_m + N_m' + P_m \cdot R) &= \varphi_m \cdot Eh \\ N_p' + N_m' &= -(1 + \nu) \cdot (T_m + P_m \cdot R) + \varphi_m \cdot Eh \end{aligned} \quad (32)$$

Rimaneggiando invece, la seconda equazione di equilibrio riportata nel sistema (16), e facendone la derivata si ottiene:

$$\begin{aligned} (N_p + N_m) &= T_m' + T_m \cdot \cot g(\theta) + P_n \cdot R \\ \frac{d}{d\theta} (N_p + N_m) &= N_p' + N_m' = T_m'' + T_m' \cdot \cot g(\theta) - \frac{T_m}{\sin^2(\theta)} + P_n' \cdot R \end{aligned} \quad (33)$$

In definitiva allora, uguagliando le due relazioni trovate per N_m' e N_p' si ottiene **la seconda equazione di Messner**:

$$\begin{aligned} T_m'' + T_m' \cdot \cot g(\theta) - T_m \cdot \cot^2 g(\theta) + \nu \cdot T_m + \\ - Eh \cdot \varphi_m = - \left[(1 + \nu) \cdot P_m + P_n' \right] \cdot R \end{aligned} \quad (34)$$

Le equazioni di Messner appena trovate, possono essere riscritte in forma compatta nel seguente modo:

$$\begin{cases} L \cdot \varphi_m - \nu \cdot \varphi_m + T_m \cdot \frac{R^2}{D} = 0 \\ L \cdot T_m + \nu \cdot T_m - Eh \cdot \varphi_m = - \left[(1 + \nu) \cdot P_m + P_n' \right] \end{cases} \quad (35)$$

dove L è l'operatore di Messner, così definito:

$$L = \frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{d}{d\theta} \cdot \cot g(\theta) - \cot^2 g(\theta) \quad (36)$$

Purtroppo, anche questo sistema di equazioni non è risolvibile analiticamente in forma chiusa poiché fortemente non lineare (oltre che accoppiato).

I coefficienti delle variabili φ_m e T_m infatti, analogamente ai coefficienti delle loro derivate prime, sono costituiti rispettivamente da $\cot g^2(\theta)$ e $\cot g(\theta)$ ¹⁴.

¹⁴ Si ricorda che la $\cot g(\theta)$ è una funzione che varia tra 0 e $+\infty$, per θ che va da 0 a 90° (come nel caso delle cupole).

A partire dalla Teoria di Meissner tuttavia, e mediante alcuni ragionamenti, è possibile definire la seconda Teoria approssimata, attribuita a Geckler: quest'ultima è usata spessissimo per effettuare i calcoli¹⁵ delle cupole, poiché conduce ad equazioni risolventi di cui si conosce la soluzione in forma chiusa.

3.2 Teoria di Geckler (Approssimata)

Ipotesi iniziali di Meissner

Le equazioni (35), come già visto in precedenza, oltre ad essere fortemente non lineare sono anche non omogenee: Lo studioso Meissner di conseguenza, si accorse che la vera difficoltà nel trovare la soluzione alle sue equazioni era nel trovare la soluzione particolare (legata al termine noto).

Tuttavia, osservò che se la cupola è a tutto sesto ($\theta = \pi/2$) l'effetto dei carichi esterni (distribuiti sulla superficie media e assialsimmetrici) può essere studiato e determinato mediante il modello di membrana di rivoluzione.

In questo caso infatti, considerando una cupola isostatica¹⁶, le reazioni vincolari alla base sono tangenti alla cupola stessa, generando così un regime di sforzi membranale nel guscio.

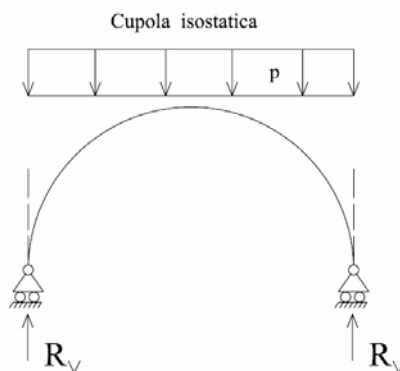


Fig.16

Considerando invece, una cupola a tutto sesto incastrata alla base (sistema iperstatico)

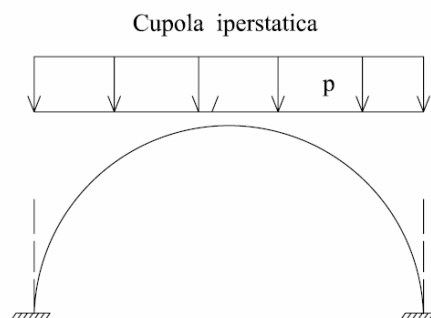


Fig.17

¹⁵ Approssimati.

¹⁶ Semplicemente appoggiata alla base.

ed usando la strategia di soluzione del metodo delle forze, la soluzione generale del problema elastico è costituita dalla somma della soluzione particolare (o integrale particolare) con la soluzione del problema omogeneo associato.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{S}\boldsymbol{\chi}$$

dove $\boldsymbol{\sigma}_0$ è la soluzione particolare del problema non omogeneo ($\mathbf{D}^*\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{b}$) e $\mathbf{S}\boldsymbol{\chi}$ è la soluzione generale del problema omogeneo ($\mathbf{D}^*\boldsymbol{\sigma}_\chi = \mathbf{0}$).

Con il metodo delle forze cioè, si individua dapprima un Sistema Principale¹⁷ (o **Problema 0**):

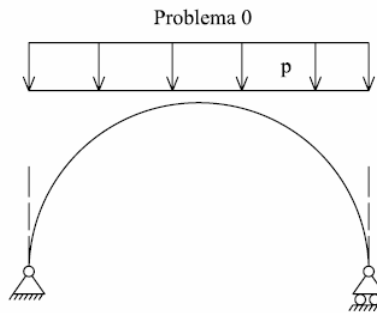


Fig.18

e due problemi OMOGENEI¹⁸ (**Problema 1 e Problema 2**), in cui si evidenziano le incognite iperstatiche $\boldsymbol{\chi}$ (scelte a priori):

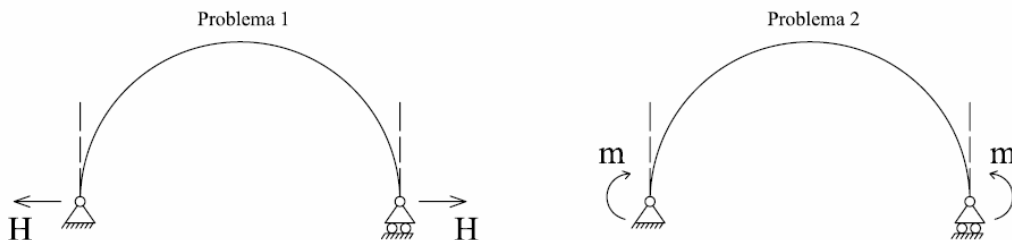


Fig.19

In generale, considerata una cupola, la soluzione particolare (soluzione del PB 0) non corrisponde esattamente a quella della membrana di rivoluzione: oltre al regime membranale di tensione infatti, sono presenti anche il taglio e il momento flettente; soltanto se il guscio sferico è a tutto sesto tuttavia, non si distrugge il regime membranale di tensione all'interno della cupola.

Se la cupola è a tutto sesto quindi (o leggermente ribassata), il Problema 0 è un problema di membrana. Gli effetti dei carichi sulla cupola cioè, possono essere trovati mediante un problema di membrana.

Alla luce di quanto appena detto, si analizzeranno d'ora innanzi solo cupole non ribassate (e quindi solo cupole a tutto sesto).

¹⁷ Coincidente con il problema NON OMOGENEO.

¹⁸ La dizione "Problema Omogeneo" indica che le forze attive (carichi esterni..) sono nulle.

Per questi elementi allora, è nota la soluzione particolare (coincidente con la soluzione del modello di membrana) ma è necessario determinare ancora la soluzione del problema omogeneo associato.

Tenendo presente il quadro fin qui delineato, lo studioso Meissner elaborò una IPOTESI (una schematizzazione) sul comportamento di una cupola: immaginò che le travi ordite lungo i meridiani fossero appoggiate su un suolo elastico di rigidezza pari a quella delle travi ordite lungo i paralleli.

E' proprio a partire da questa ipotesi che entra in gioco la Teoria approssimata di Geckler, volta alla determinazione della soluzione del problema omogeneo associato (per l'esempio riportato sopra, è la somma delle soluzioni del PB1 e PB2).

Teoria di Geckler

Ripartendo dall'*ipotesi* di Meissner, Geckler arrivò alla conclusione che più lo spessore della cupola è piccolo, più le travi curve (che corrono lungo i meridiani) si comportano come travi lunghe¹⁹.

Di conseguenza, Geckler immaginò una soluzione del problema omogeneo analoga a quella della trave su suolo elastico (studiata nei capitoli precedenti); in particolare, scrisse le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \varphi_m(\theta) = e^{-\beta\theta} \cdot f_1(\beta\theta) + e^{+\beta\theta} \cdot f_2(\beta\theta) \\ T_m(\theta) = e^{-\beta\theta} \cdot g_1(\beta\theta) + e^{+\beta\theta} \cdot g_2(\beta\theta) \end{cases} \quad (37)$$

Il coefficiente β tiene conto del rapporto tra la rigidezza del suolo (travi ordite lungo i paralleli) e la rigidezza delle travi ordite lungo i meridiani, e quindi in generale differenzia il comportamento di una trave lunga da quello di una trave corta.

Nel caso analizzato, come già detto in precedenza, minore è lo spessore del guscio e maggiore è la tendenza al comportamento di trave lunga per le travi curve; la soluzione quindi, si smorza velocemente e non risente di quello che succede nel vincolo opposto.

A livello matematico invece, lo smorzamento rapido della soluzione (quando lo spessore è piccolo) è legato al fatto che β assume valori molto grandi.

A questo punto, ponendo l'attenzione sull'operatore di Messner L , si può osservare che se la cupola è a tutto sesto si ha $\cotg(\theta) = 0$ in corrispondenza dell'appoggio (dove $\theta = 90^\circ$).

Questa osservazione portò lo studioso Geckler, a trascurare i termini dell'operatore contenenti la cotangente. Più in particolare, egli ammise che la soluzione del problema omogeneo si smorza più velocemente della crescita della cotangente (che dall'appoggio fino all'apice della cupola va da 0 ad $+\infty$).

Di conseguenza arrivò alla seguente conclusione:

¹⁹ Alla luce del modello di trave su suolo elastico, si può affermare che la trave curva è lunga quando ha una rigidezza flessionale più piccola di quella del "suolo", costituito dalle travi curve.

$$L = \frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{d}{d\theta} \cot g(\theta) - \cot g^2(\theta) \quad (38)$$

che gli permise di riscrivere nel seguente modo il sistema di equazioni associate al problema omogeneo di cupola:

$$\begin{cases} \varphi_m'' - \nu \cdot \varphi_m + T_m \cdot \frac{R^2}{D} = 0 \\ T_m'' + \nu \cdot T_m - Eh \cdot \varphi_m = 0 \end{cases} \quad (39)$$

L'ulteriore e ultima semplificazione introdotta da Geckler, fu quella di trascurare il termine contenente il coefficiente di Poisson, e cioè:

$$L \pm \nu = \frac{d^2}{d\theta^2} \quad (40)$$

Concludendo, il sistema delle equazioni risolventi fornite dalla teoria approssimata di Geckler sono le seguenti:

$$\begin{cases} \varphi_m'' + T_m \cdot \frac{R^2}{D} = 0 \\ T_m'' - Eh \cdot \varphi_m = 0 \end{cases} \quad (41)$$

A questo punto, il sistema è facilmente risolvibile, infatti si può esplicitare la seconda equazione e sostituire nella prima ottenendo:

$$\begin{aligned} T_m^{IV} + T_m \frac{R^2 \cdot Eh}{D} &= 0 \\ T_m^{IV} + 4 \cdot \beta^4 \cdot T_m &= 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Nell'ultima delle due Equazioni (41) si è posto posto $\beta^4 = R^2 Eh / 4D$. Analogamente alla trave su suolo elastico, anche in questo caso è possibile definire una lunghezza caratteristica $\lambda = 2\pi / \beta$.

Se lo spessore è piccolo, come già detto, la soluzione si smorza velocemente; di conseguenza, il termine che conta maggiormente all'interno della soluzione (37) è quello con l'esponenziale positivo al quale è legato il comportamento nell'intorno di $\theta = 90^\circ$. Potremmo assumere in definitiva, come soluzione del problema omogeneo, un'equazione del tipo:

$$T_m = e^{\beta\theta} \cdot (C_1 \cdot \sin(\beta\theta) + C_2 \cdot \cos(\beta\theta)) \quad (43)$$

Anche se questa teoria è stata impostata sull'ipotesi di cupola non ribassata, si è visto (con l'esperienza fatta) che può essere adottata per il progetto di cupole che hanno un $\theta_{\max} = 45^\circ$.

A questo punto quindi, si può concludere che il problema della determinazione della soluzione del problema elastico associato alle cupole (anche leggermente ribassate) è risolto.

Determinata infatti, la funzione T_m mediante integrazione della (42), è possibile calcolare φ_m (che è la seconda variabile primaria del problema); Grazie al legame costitutivo diretto poi, si possono determinare le variabili secondarie k_m e k_p (che dipendono solo da φ_m), e le variabili M_m ed M_p . Per determinare infine, N_m e N_p , si impone un semplice equilibrio tra le variabili T_m e N_m , rappresentate nella figura sottostante:

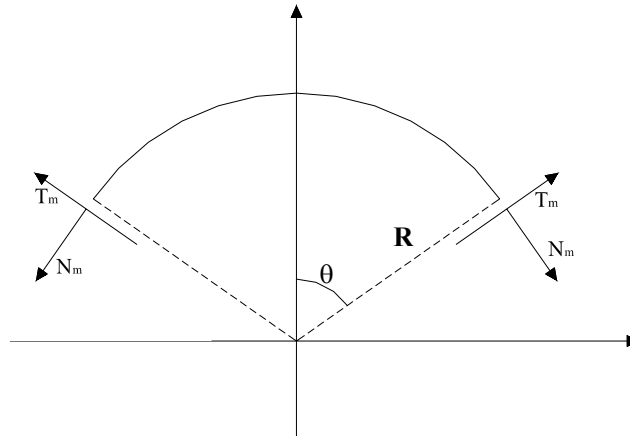


Fig. 20: Sezione di una porzione finita di calotta sferica

Dall'equilibrio infatti, scaturisce la relazione:

$$N_m = T_m \cotg(\theta).$$

Dalle equazioni indefinite di equilibrio allora, noto N_m si ricava N_p e le deformazioni ε_p e ε_m (dal legame costitutivo).

Infine poiché i problemi di guscio e di membrana possono considerarsi disaccoppiati per cupole non ribassate, come già studiato nel capitolo 10 (relativo alle membrane) è possibile calcolare il campo degli spostamenti u e v .

Le equazioni implicite di congruenza infatti, che legano ε_p e ε_m a u e v , sono disaccoppiate dalle altre, e ciò permette di ottenere il campo di spostamenti per integrazione delle deformazioni.

Condizioni al contorno

Al fine di determinare le due costanti di integrazione in (43), e la costante di integrazione relativa al campo degli spostamenti u e v , devono essere imposte 3 condizioni al contorno.

Per l'equazione (43) occorrono una condizione cinematica ed una meccanica (tali condizioni però, devono essere espresse in funzione di T_m : e tale operazione può risultare, a volte, complicata).

Per la determinazione del campo degli spostamenti invece, occorre una condizione al contorno cinematica (di solito su u).

5. Coefficienti di bordo della cupola

Come già visto per i tubi, i *coefficienti di bordo* rappresentano e costituiscono il legame esistente al bordo dell'elemento strutturale in esame, tra le grandezze statiche e cinematiche generalizzate (anch'esse di bordo).

Determinazione dei coefficienti di bordo di flessibilità e di rigidezza per il modello di Cupola

A livello operativo e per il modello di cupola (come anche per i modelli strutturali visti nelle sezioni precedenti), la determinazione dei *coefficienti di bordo di flessibilità* deve essere effettuata prendendo in considerazione un oggetto strutturale di tipo *labile*²⁰ (non vincolato ai bordi), in corrispondenza dei quali si applicano rispettivamente delle distribuzioni costanti di forze H e di coppie m : a questo punto possono essere valutati gli spostamenti w e le rotazioni di bordo φ , che rappresentano gli *effetti cinematici* delle forze attive in corrispondenza del bordo dell'oggetto in esame.



Fig. 21 : Sistema su cui si valutano i coefficienti di bordo

Ipotizzando di analizzare un *guscio con travi curve lunghe* (come generalmente accade nella realtà), e sapendo che le distribuzioni costanti di forze H e di coppie m (applicate ad una sola estremità²¹) costituiscono delle azioni esterne *autoequilibrate*, si determinano i coefficienti di bordo di flessibilità studiando separatamente questi due problemi:

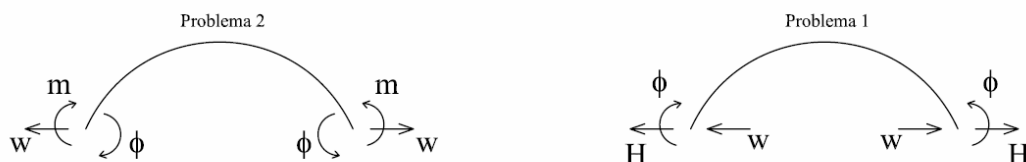


Fig. 22: Problema 1 e Problema 2

Nel primo problema (PB1) si assegna al bordo inferiore della cupola la sola distribuzione di forze H , e si determinano i suoi effetti cinematici in termini di w e φ . Nel secondo (PB2) si assegna al bordo inferiore della cupola la sola distribuzione di coppie m , e si determinano i suoi effetti cinematici in termini di w e φ .

²⁰ La labilità dell'elemento strutturale è riferita ai gradi di libertà w e φ , nel senso che gli eventuali vincoli presenti ai bordi non devono bloccare i gradi di libertà w e φ .

²¹ Il tubo è – per ipotesi – lungo. Ciò implica che le azioni esterne per la valutazione dei coefficienti di bordo possono essere applicate ad un solo estremo dell'elemento strutturale, dato che *ciò che accade meccanicamente ad un estremo del tubo non influenza ciò che accade meccanicamente all'altro estremo*.

Considerando allora, il PB1, si assegnano 2 condizioni al contorno meccaniche²² (non si impone la condizione al contorno su u poiché è una entità indeterminata, indipendente dalle azioni applicate ai bordi della cupola).

Tali condizioni al contorno allora, sono le seguenti:

$$\begin{aligned} M_m(\theta_{\max}) &= 0 \\ T_m \cos(\theta_0) - N_m \sin(\theta_0) + H &= 0 \end{aligned}$$

Mediante queste 2 condizioni al contorno meccaniche, è possibile determinare le 2 costanti di integrazione contenute nella soluzione generale del problema elastico (vedi (43)).

In questo modo, si ottengono proprio i coefficienti di bordo della 1° colonna della matrice dei coefficienti di bordo di flessibilità (w_H e φ_H), che valgono

$$\begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\alpha}{\beta} \sin^2(\theta_{\max}) & - \\ 2 \frac{\alpha^2}{\beta} \sin(\theta_{\max}) & - \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ m \end{Bmatrix}$$

dove

$$\beta = \frac{Eh}{R^2} \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4D}}$$

Tali coefficienti rappresentano, come detto in precedenza, il legame tra la distribuzione radiale di forze H , e gli spostamenti w e φ in corrispondenza del bordo caricato del tubo.

Considerando invece, il PB2, si assegnano sempre 2 condizioni al contorno meccaniche:

$$\begin{aligned} M_m(\theta_{\max}) - m &= 0 \\ -T_m \cos(\theta_0) - N_m \sin(\theta_0) &= 0 \end{aligned}$$

Mediante queste 2 condizioni al contorno meccaniche, è possibile determinare le 2 costanti di integrazione contenute nella soluzione generale del problema elastico (vedi (43)).

In questo modo, si ottengono proprio i coefficienti di bordo della 2° colonna della matrice dei coefficienti di bordo di flessibilità (w_m e φ_m), che valgono

$$\begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 2 \frac{\alpha^2}{\beta} \sin(\theta_{\max}) \\ - & 4 \frac{\alpha^3}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ m \end{Bmatrix}$$

Tali coefficienti rappresentano, come detto in precedenza, il legame tra la distribuzione radiale di coppie m , e gli spostamenti w e φ in corrispondenza del bordo caricato della cupola.

²² Dato che i bordi del tubo non sono vincolati (si considera un sistema labile), i bordi costituiscono la superficie libera dell'oggetto, su cui vanno imposte le 2 condizioni al contorno.

Quanto sopra esposto dimostra che gli effetti di H ed m non sono disaccoppiati, come accadeva per i modelli precedentemente analizzati; applicando una distribuzione radiale di forze H cioè, al bordo caricato della cupola si ottiene sia uno spostamento radiale w che una rotazione φ . Lo stesso si può affermare applicando alla cupola una distribuzione radiale di coppie m .

Il legame che definisce i coefficienti di bordo di flessibilità allora, è il seguente:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\alpha}{\beta} \sin^2(\theta_{\max}) & 2 \frac{\alpha^2}{\beta} \sin(\theta_{\max}) \\ 2 \frac{\alpha^2}{\beta} \sin(\theta_{\max}) & 4 \frac{\alpha^3}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ m \end{Bmatrix}$$

Per definire infine, il legame inverso rispetto a quello precedente, che contiene al suo interno la matrice dei coefficienti di bordo di rigidezza, è sufficiente invertire la matrice dei coefficienti di bordo di flessibilità, ottenendo:

$$\begin{Bmatrix} H \\ m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha \sin^2(\theta_{\max})} & -\frac{\beta}{2\alpha \sin(\theta_{\max})} \\ -\frac{\beta}{2\alpha \sin(\theta_{\max})} & \frac{\beta}{2\alpha^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix}$$