

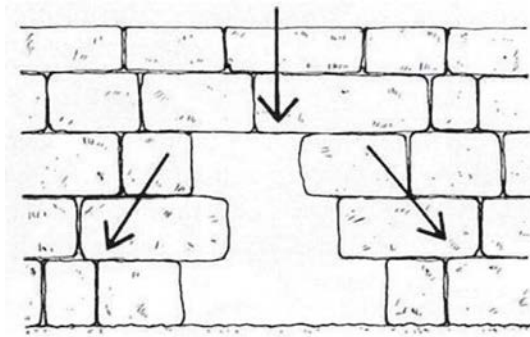


Gli archi in muratura

Da:

- “L’arte del costruire tra conoscenza e scienza” di Salvatore di Pasquale
- “La meccanica nell’architettura – La Statica” di Antonio Giuffrè
- “The stone skeleton” di Jaques Heyman
- “Le strutture in Architettura ” di Mario Salvadori e Robert Heller
- “Le strutture curve – archi e volte” di Luis Decanini e Laura Liberatore

L'arco naturale



Struttura che può venire a verificarsi naturalmente



Rottura naturale sopra un architrave

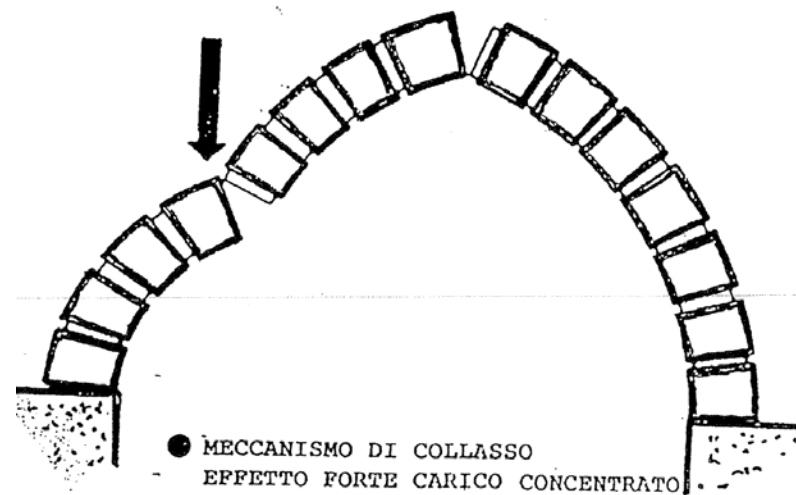
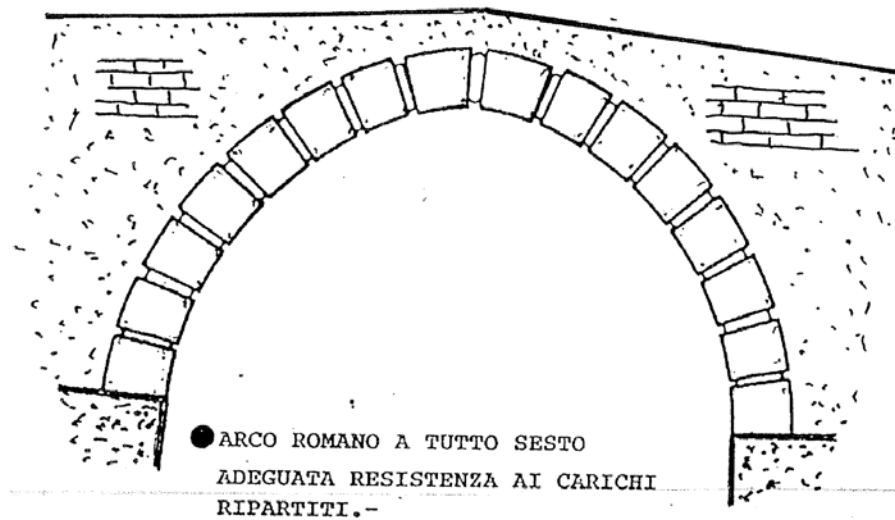
L'arco – Intuizione e canoni geometrici

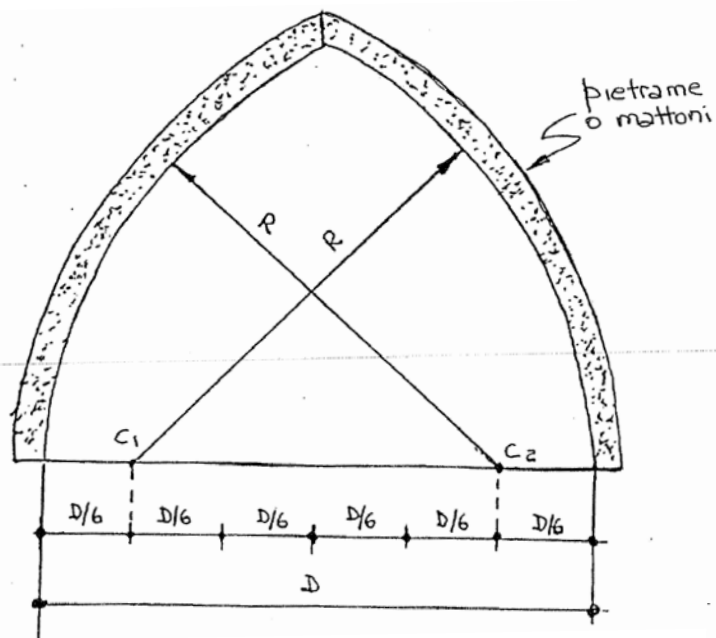


Arco Romano – a tutto sesto



Arco ogivale

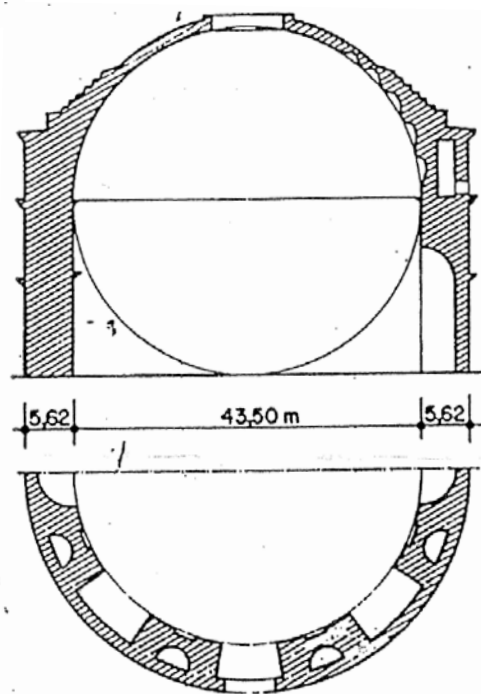




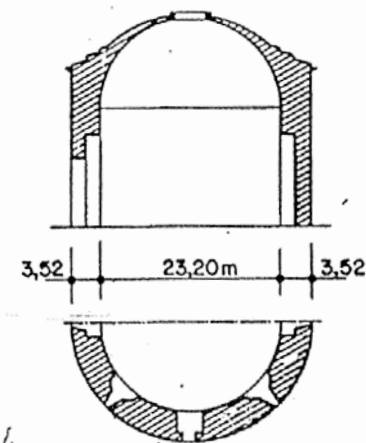
Proporzionamento geometrico

- Altezza massima uguale al diametro della cupola
- Spessore circa 0,3 volte il raggio
- Indipendenza dalle dimensioni

Regola di sole proporzioni che non tiene conto di dimensioni e carichi

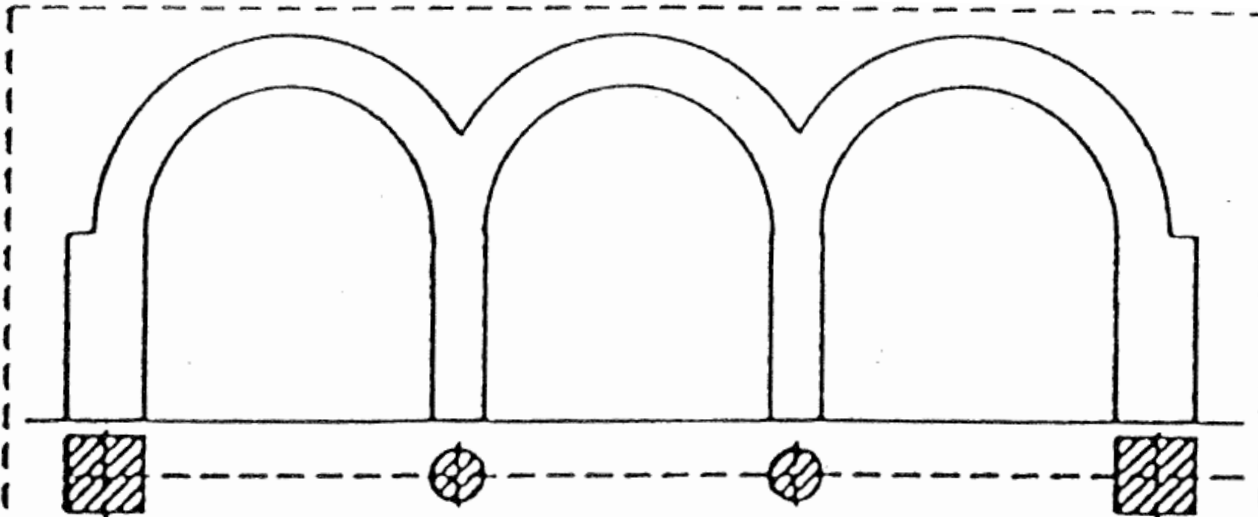


Il Pantheon in Roma



Mausoleo di Romolo

Vitruvio (80 a.C. – 15 a.C.) – De Architettura



"[...] Così' negli edifizii che si fabbricano a pilastri, le volte dei quali si serrano nelle divisioni de conj colle connessioni corrispondenti al centro, devono farsi i pilastri estremi piu' larghi, affinche' possano aver forza da resistere ai conj, che spinti dal peso dei muri, premendosi per le connessioni al centro, caccerebbero fuori le imposte.

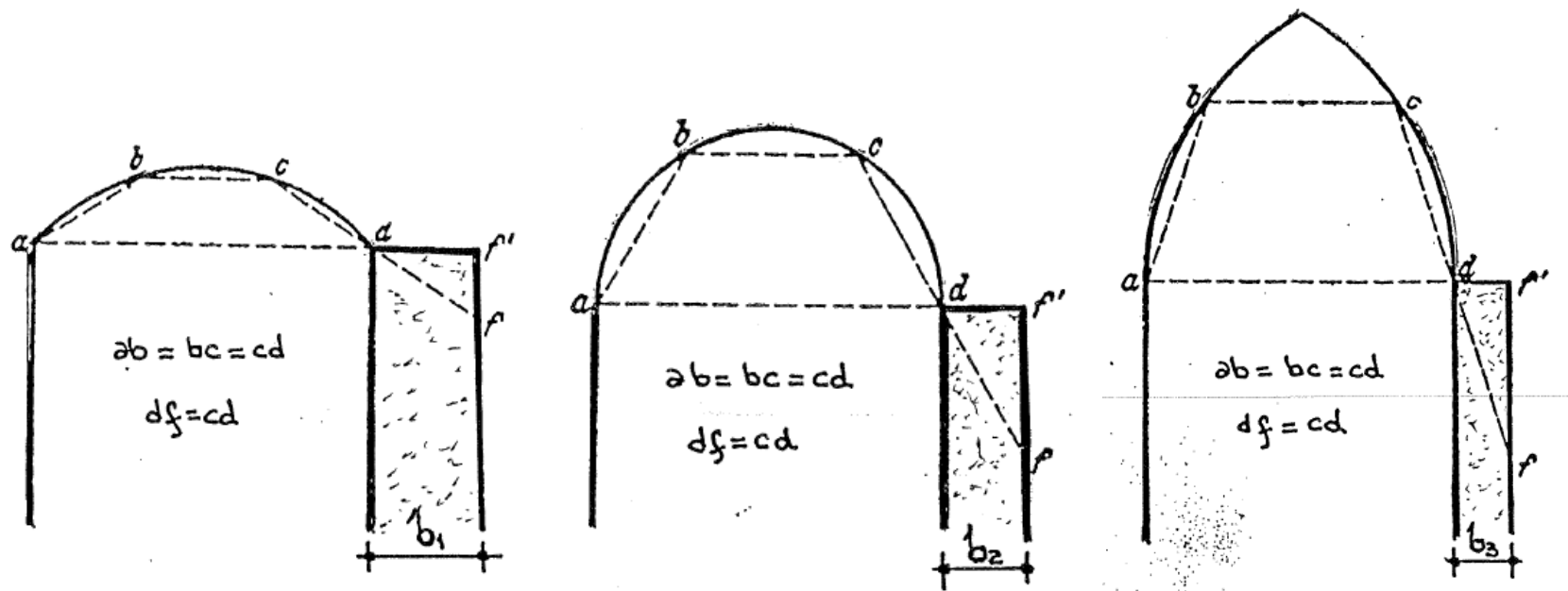
Onde se i pilastri angolari saranno assai larghi, rattenendo i coni daranno fermezza all'opera."

(De Architettura, libro VI, capo 9)

Regola geometrica per il dimensionamento dei piedritti



- Si divide l'arco con tre corde di uguale lunghezza
- Si ruota l'ultima corda di 180°
- La delimitazione esterna del piedritto è data dalla verticale passante per il punto più estremo.



$b_1 > b_2 > b_3$
 qualitativamente corretto

Il proporzionamento è ancora indipendente sia dal carico che dall'altezza dei piedritti

Questo metodo viene ancora raccomandato da Bernardo Vittone nel 1760

Leon Battista Alberti

A lui si deve la prima trattatistica architettonica sul funzionamento degli archi:

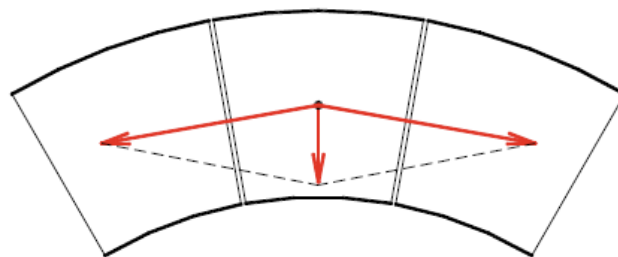
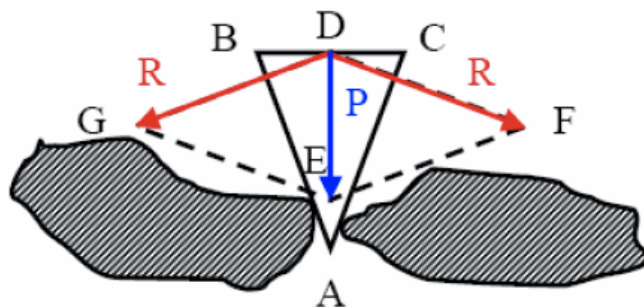
- *“... non si vede in che modo esso (l'arco) possa sconnettersi per conto proprio; salvochè l'un concio spinga fuori l'altro;”*
- *“quand'anche fossero disposti a tentare di scalzarsi a vicenda, la presenza stessa dei pesi...basta ad impedirlo;”*
- *“il concio posto in cima...non si vede come possa trovare la forza di spingere in fuori i conci che lo fiancheggiano;”*
- *“...quello che fanno seguito ad essi, occupando i fianchi dell'arco, verranno tenuti agevolmente...dall'equilibrarsi dei pesi;”*
- *“infine i conci posti alle due estremità inferiori, non si comprende come possano spostarsi una volta che gli altri, posti sopra di essi, restino fermi al loro posto”*
- *“Pertanto gli archi interi non abbisognano di corda poiché essi sono in grado di mantenersi da sé.”*

Sviluppa l'idea della somiglianza col cuneo (macchina semplice studiata da Aristotele ed Erone)

L'elemento costitutivo dell'arco è visto come una parte di cuneo con le facce verso il centro dell'arco ed individuate da piani perpendicolari alla superfici di intradosso e di estradosso

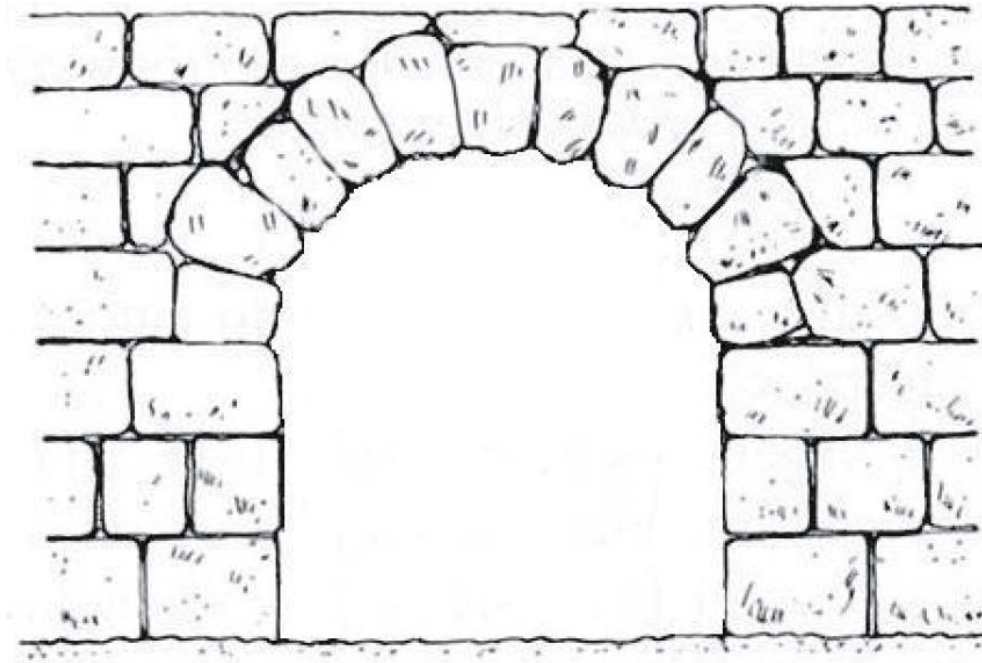
L'azione che ciascun concio esercita sugli adiacenti si manifesta, secondo L'Alberti, con l'allontanamento delle pareti mentre quella dei conci d'imposta viene contrastato dalle catene.

L'arco "intero" non ha bisogno di catene



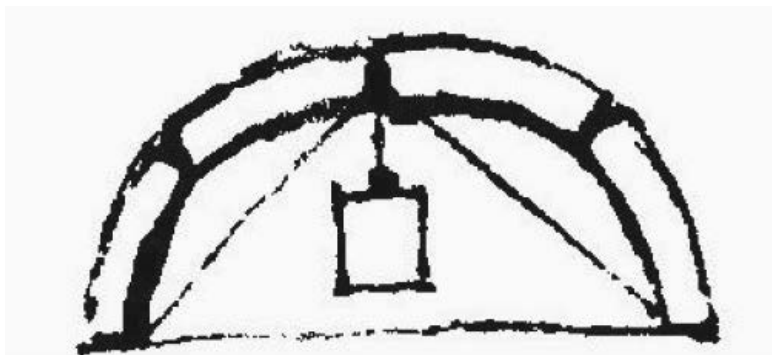
Leonardo da Vinci

“Arco non è altro che una fortezza causata da due debolezze imperoché l'arco negli edifici è composto di due quarti di circolo, i quali quarti circoli ciascuno debolissimo per sé desidera cadere e opponendosi alla ruina l'uno dell'altro, le due debolezze si convertono in un'unica fortezza”



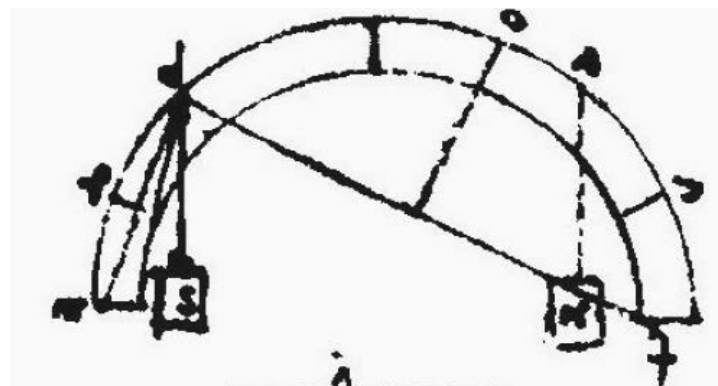
Studia le fratture ed i meccanismi che si generano in un arco composto per determinate condizioni di carico

Arco a tutto sesto caricato in chiave



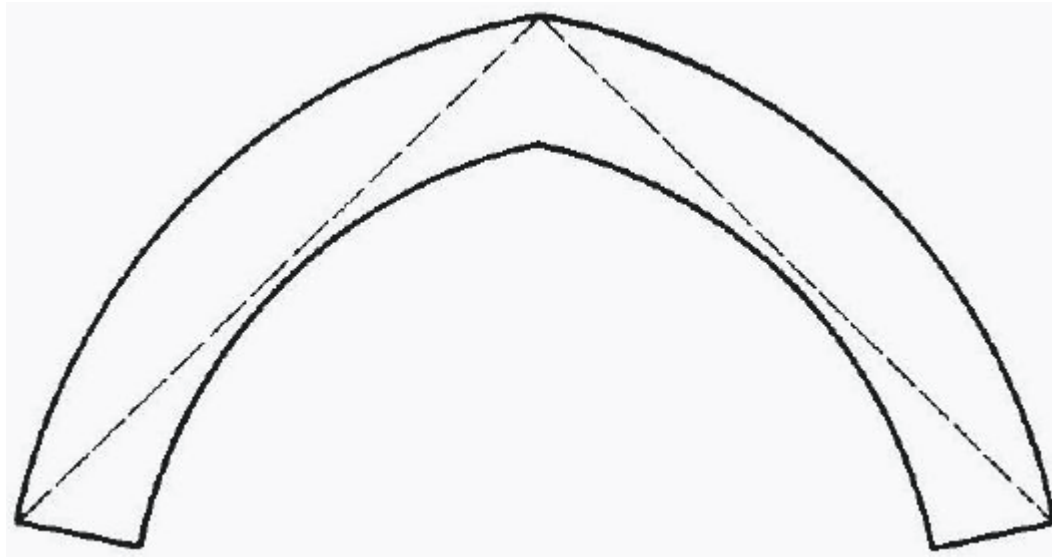
- Se l'arco è intero (fatto di un solo) pezzo si romperà solo quando avrà raggiunto la resistenza del materiale
- Allora si avrà la formazione di fratture e la trasformazione della struttura in meccanismo

Arco a tutto sesto caricato in una delle reni



- Fornisce la sequenza della formazione delle cerniere

“L’arco non si romperà, se la corda dell’archi di fuori non toccherà l’arco di dentro ”



Fa riferimento alla corda tra la chiave e l’imposta all’estradosso

Si può pensare all’intuizione dell’esistenza della linea delle pressioni

Studi fenomenologici

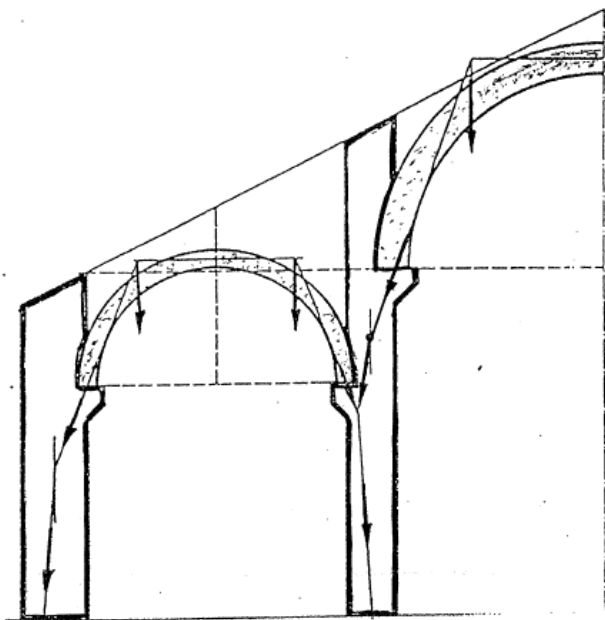
Assorbimento della spinta

Fino alla fine del XVII secolo non ci sono trattazioni di carattere matematico

Sono presenti studi fenomenologici che spesso corrispondono alla descrizione scritta dell' "arte del buon costruire"

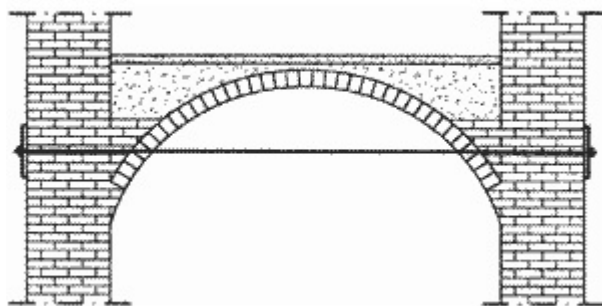
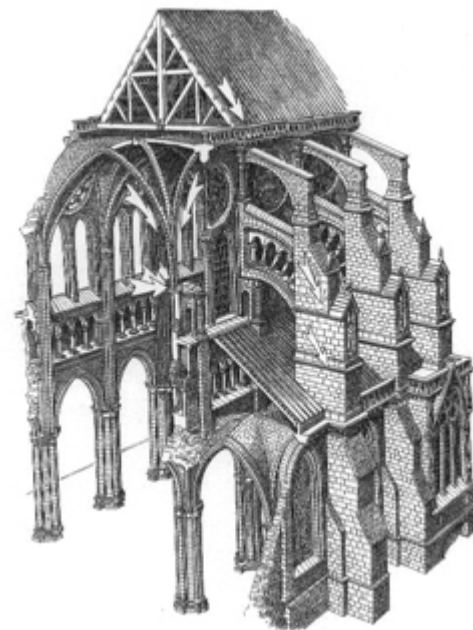
Vengono trovate delle soluzioni ad alcuni problemi statici legati alle strutture ad arco e contemporaneamente continuano ad essere usate soluzioni storicamente consolidate

Il problema principale rimane quello dell' assorbimento della spinta

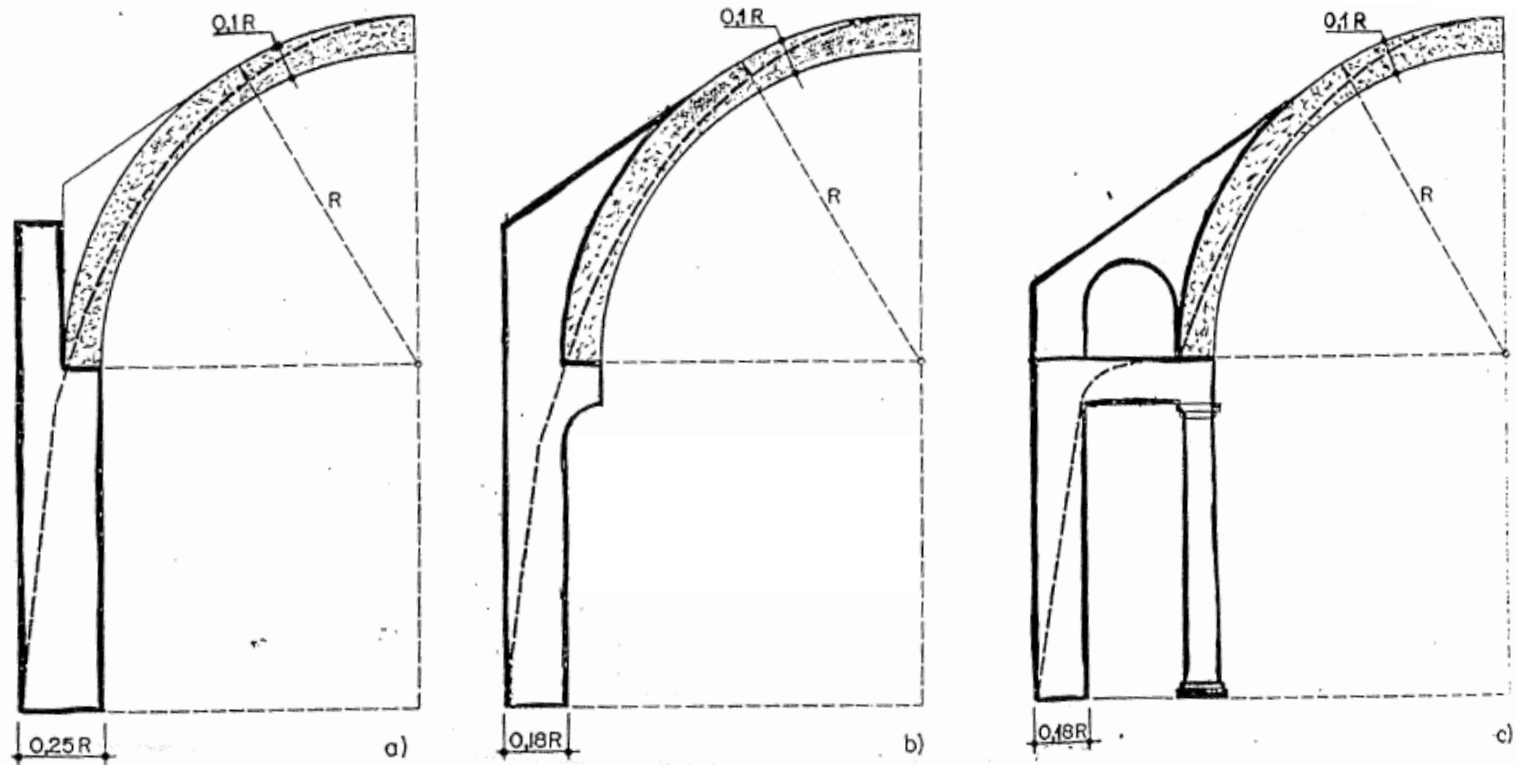


Sfruttamento della spinta di archi laterali per equilibrare in parte quella dell'arco centrale, in questo modo il piedritto centrale può essere più snello

Utilizzo di contrafforti



Utilizzo di catene



Spostamento verso l'interno dell'appoggio dell'arco sul piedritto per migliorare la condizione di equilibrio

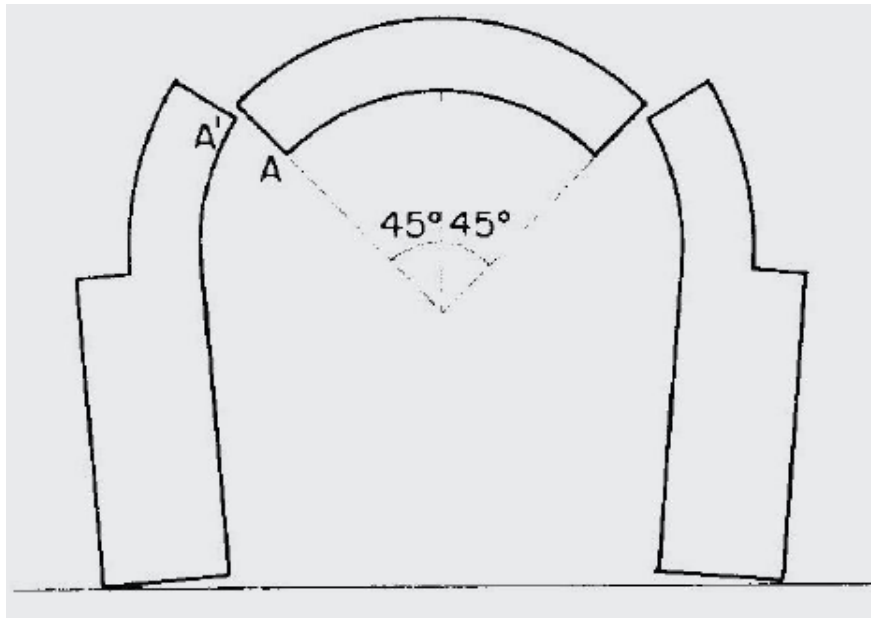
Utilizzo di una colonna a sostegno della componente verticale e uso del muro perimetrale per contrastare la spinta (tipico delle basiliche dell'architettura romana)

De La Hire

La teoria del cuneo

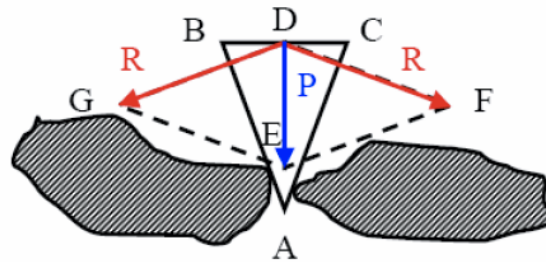
Il problema della statica degli archi compare per la prima volta nel “*Traité de la mécanique*” di Philippe De la Hire (1640-1718)

Il punto di partenza del suo studio è il meccanismo di collasso da lui ritenuto fondamentale, da questo studia l'equilibrio dell'arco che permette di determinare sia lo spessore dei conci che dei piedritti



La parte centrale dell'arco compresa tra due raggi a 45° rimane integra e scivola verso il basso esercitando un'azione di cuneo sulle parti restanti dell'arco spingendole in fuori e promuovendone il ribaltamento senza scorrimento

De La Hire riprende l'ipotesi di individuare nell'arco l'azione di una macchina semplice: il cuneo.

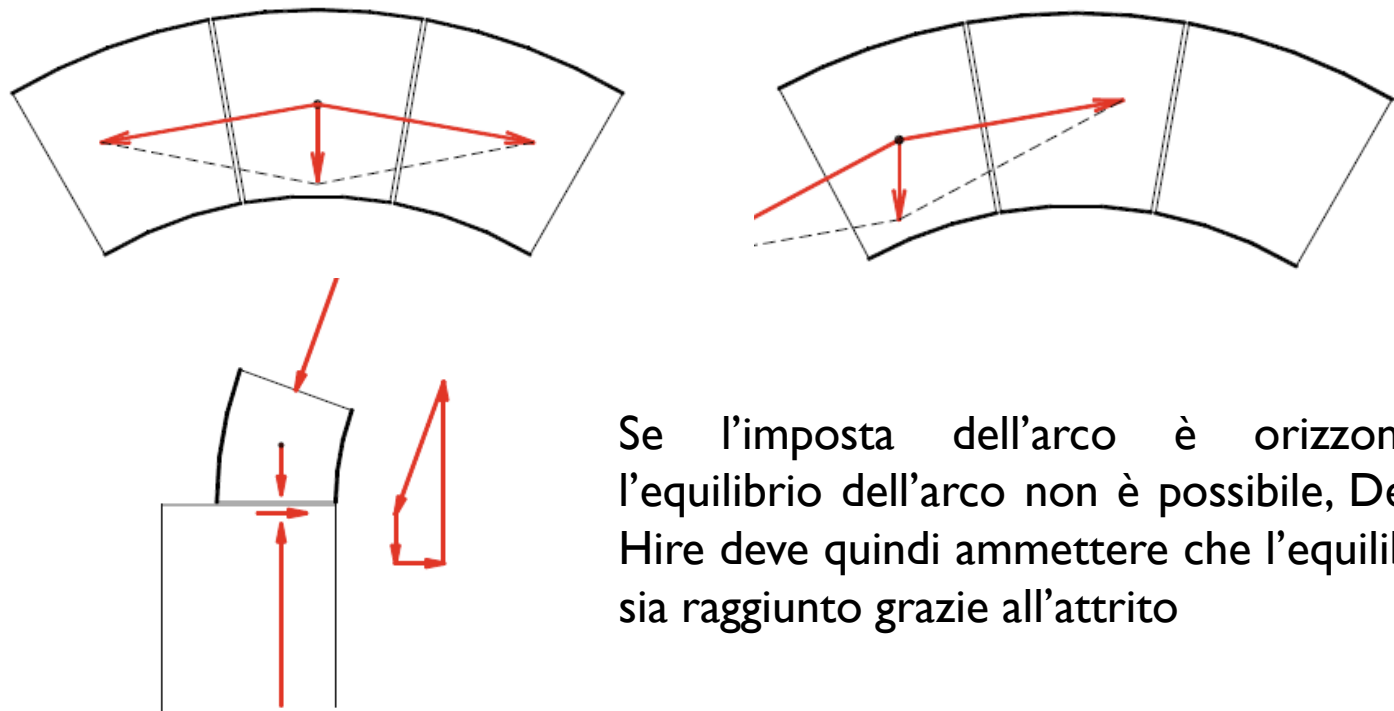


Il funzionamento dell'arco è interpretato come la risultante dell'azione mutua di corpi rigidi infinitamente resistenti, i conci dell'arco, supposti agire come cunei posti l'uno sull'altro e mantenuti in equilibrio grazie al peso proprio ed alle azioni scambiate

Un'altra ipotesi fondamentale del suo lavoro è purtroppo l'assenza del contributo dell'attrito tra i conci

Problema dell'equilibrio dell'arco

Partendo dal concio in chiave che ha dimensioni stabilite impone l'equilibrio di ogni concio successivo (il cui spessore è l'incognita del problema) impone l'equilibrio di ogni concio applicando nel baricentro le due forze trasmesse dai conci limitrofi e normali ai giunti e la forza peso



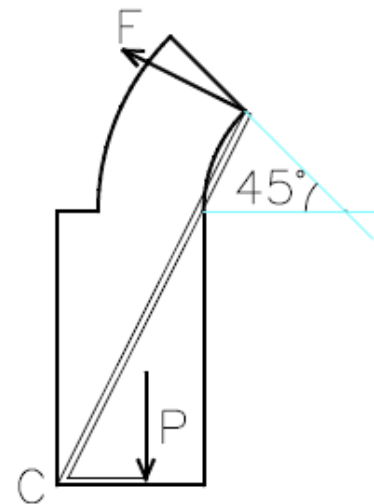
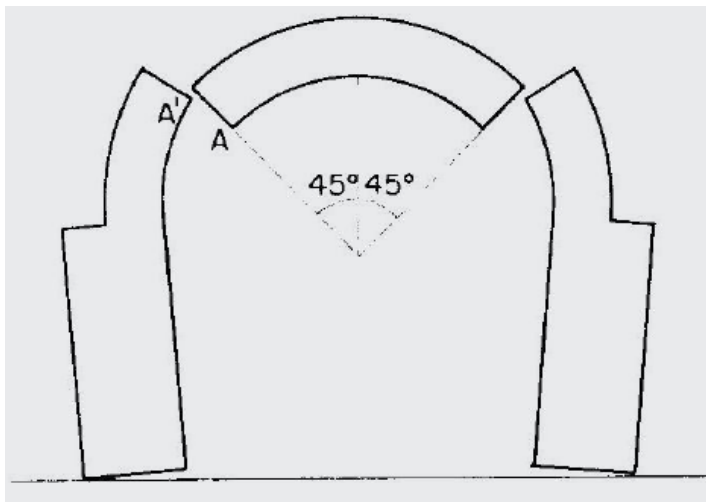
Se l'imposta dell'arco è orizzontale l'equilibrio dell'arco non è possibile, De La Hire deve quindi ammettere che l'equilibrio sia raggiunto grazie all'attrito

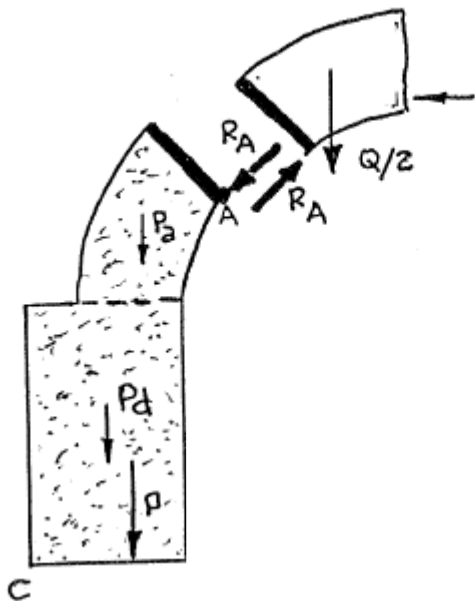
Problema del dimensionamento del piedritto

L'ipotesi è quella del meccanismo di rottura in cui la parte centrale si comporta come cuneo tra superfici lisce.

Le superfici sono prive di attrito e possono esercitare solo reazioni ad essa ortogonali

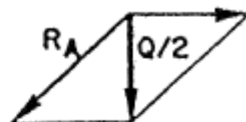
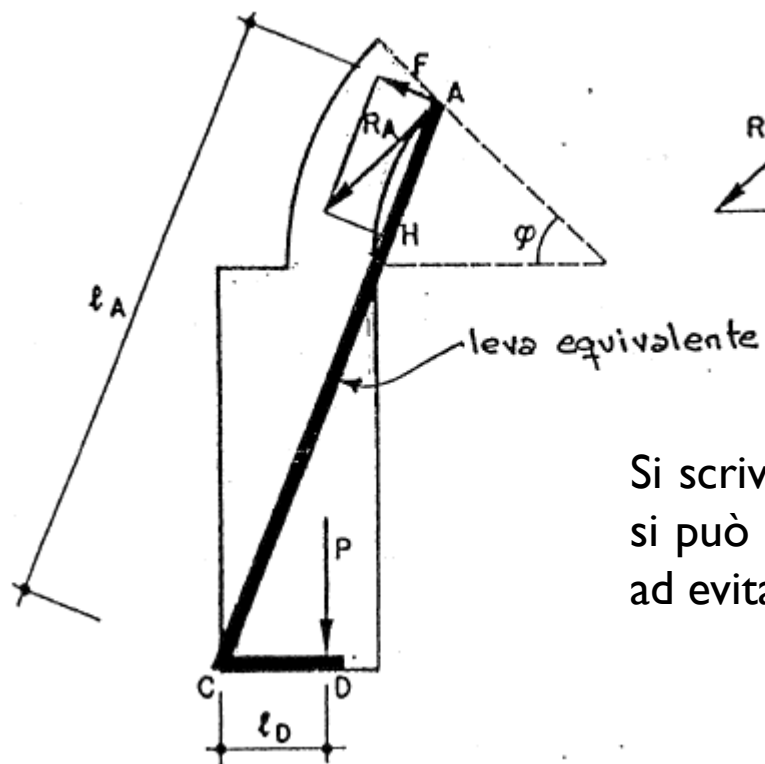
Il piedritto tende a ruotare intorno allo spigolo esterno alla base





La reazione R_A , ortogonale alla superficie di rottura è applicata nel punto A

Si individua la leva ACD e scompone la forza R_A esercitata dal cuneo centrale nelle componenti F ed H applicate al braccio della leva AC

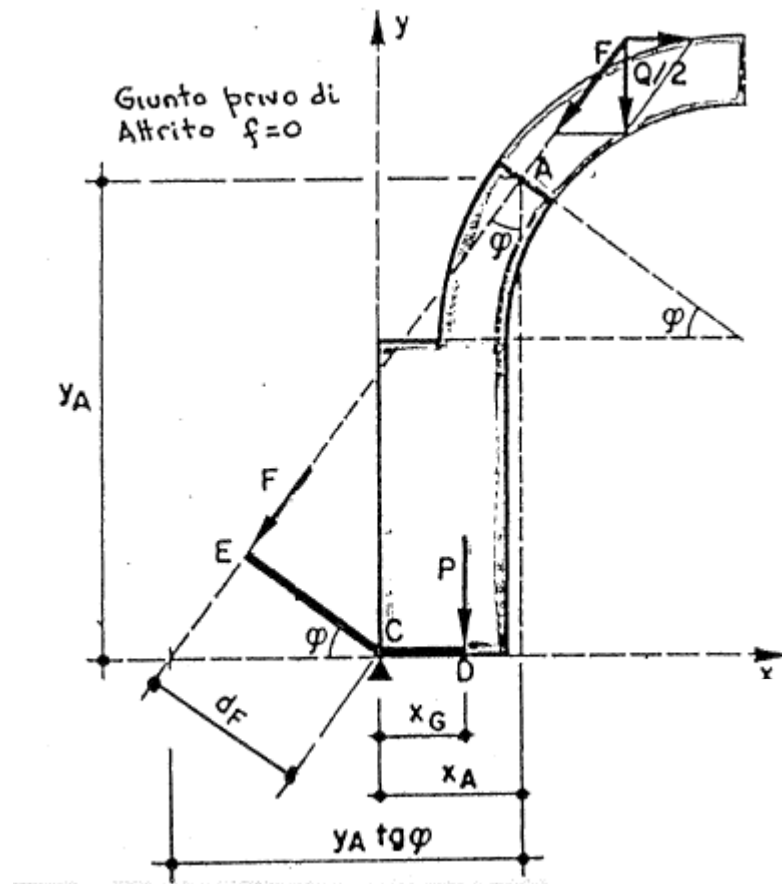


Si scrive l'equilibrio della leva $F l_A = P l_D$ da cui si può ricavare il peso del piedritto necessario ad evitare il ribaltamento

De Belidor

Il dimensionamento del piedritto

De Belidor riparte dagli studi di De La Hire per il dimensionamento del piedritto supponendo a reazione dell'arco applicato non più all'intradosso ma a metà spessore.



L'azione dell'arco risulta $F = \frac{Q}{2} \frac{1}{\cos(\varphi)}$

La leva angolare ECD è quella che determina l'equilibrio tra spinta e peso del piedritto.

$$F d_F = P x_G$$

con

$$d_F = (y_A \tan(\varphi) - x_A) \cos(\varphi)$$

ricavando così il peso del piedritto

$$P = \frac{F(y_A \tan(\varphi) - x_A)}{x_G}$$

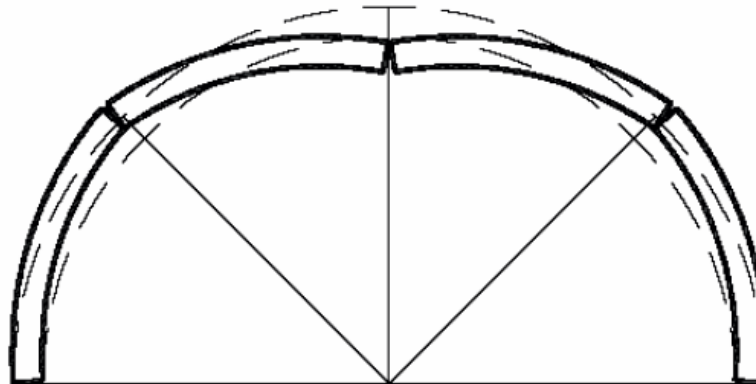
Couplet

Il collasso flessionale

Nel “*Seconde partie de l'examen de la pousse des voutes*” del 1730, ammette l'importanza fondamentale dell'azione dell'attrito tra i conci che impedisce l'attivazione di scorrimenti relativi

Affronta il problema dello spessore minimo di un arco a tutto sesto caricato con il solo peso proprio

La soluzione è ottenuta da Couplet ipotizzando un meccanismo di collasso a cinque cerniere, collocate all'estradosso in chiave e all'imposta e all'intradosso in posizione rialzata a 45° rispetto all'orizzontale



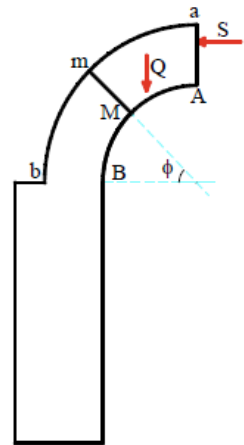
Coulomb

Il principio dei Massimi e Minimi

Charles Coulomb nel *“Essai sur une application de maximis et minimis a quelques problemes de statique, relatifs a l'Architecture”* del 1773, affronta il problema dell'equilibrio delle volte in presenza di coesione ed attrito tra i conci.

Per la prima volta l'obiettivo è la determinazione delle sollecitazioni che insorgono in una volta di assegnate dimensioni e figura.

Il problema fondamentale che Coulomb si pone è questo: In una volta per la quale siano assegnate la curva interna AB e la curva esterna ab, sono dati anche i giunti Mm perpendicolari agli elementi della curva interna; si richiedono i limiti della forza orizzontale S che sostiene questa volta, supponendo che essa sia sollecitata dal proprio peso, e sia trattenuta dalla coesione e dall'attrito



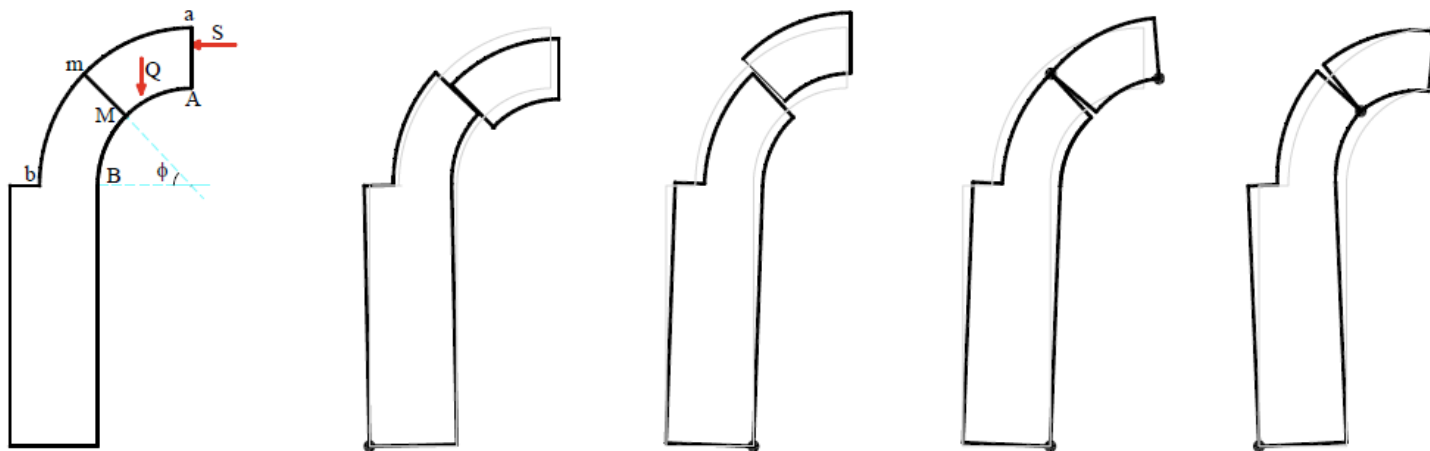
La porzione di arco considerata è quella tra la sezione in chiave ed un generico giunto assunto come critico

Si individuano 4 modalità di collasso:

- scorrimento relativo tra le facce nelle due direzioni
- l'apertura del giunto per rotazione all'intradosso e all'estradosso

Si impone l'equilibrio limite di scorrimento nelle due direzioni, ottenendo un valore minimo ed uno massimo della risultante S agente sulla sezione in chiave.

Analogo procedimento è utilizzato imponendo l'equilibrio limite alla rotazione nelle due direzioni.

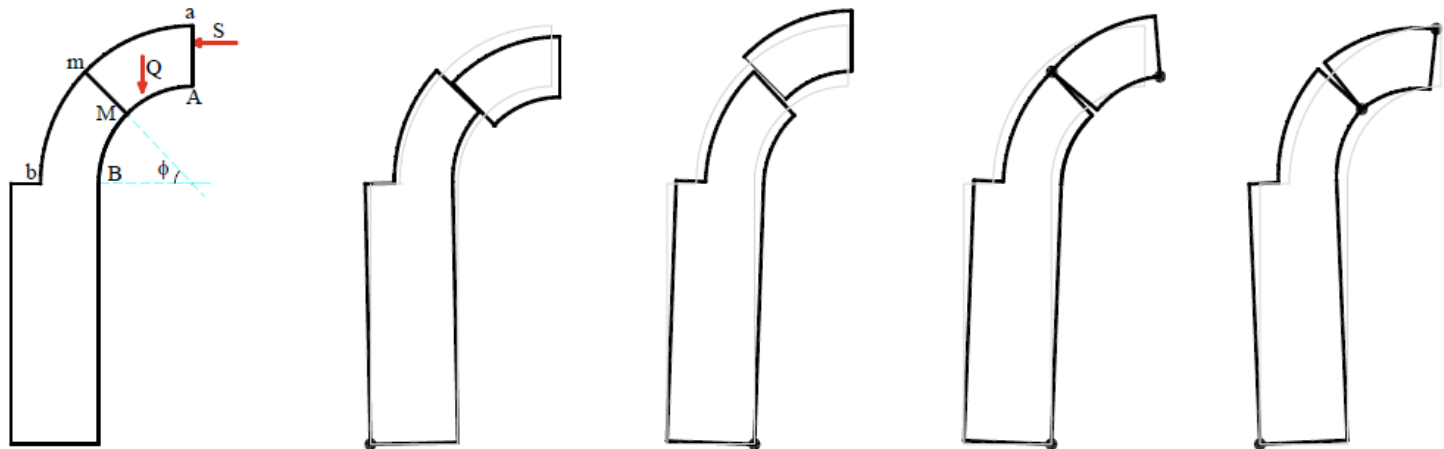


La massima reazione di attrito è assunta proporzionale all'azione normale sul giunto attraverso un opportuno coefficiente

I valori massimi e minimi di S vengono ricercati al variare della posizione ϕ del giunto critico sull'arco

Il risultato finale fornisce un limite inferiore ed uno superiore di S entro i quali l'equilibrio della volta è garantito

Coulomb scopre e accetta l'indeterminatezza del problema dimostrando che in un certo intervallo ammissibile tutte le soluzioni sono ugualmente accettabili.



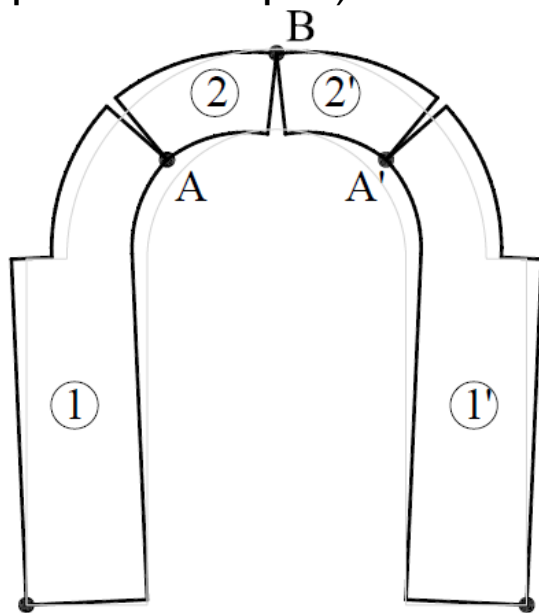
Mascheroni

Il calcolo a rottura

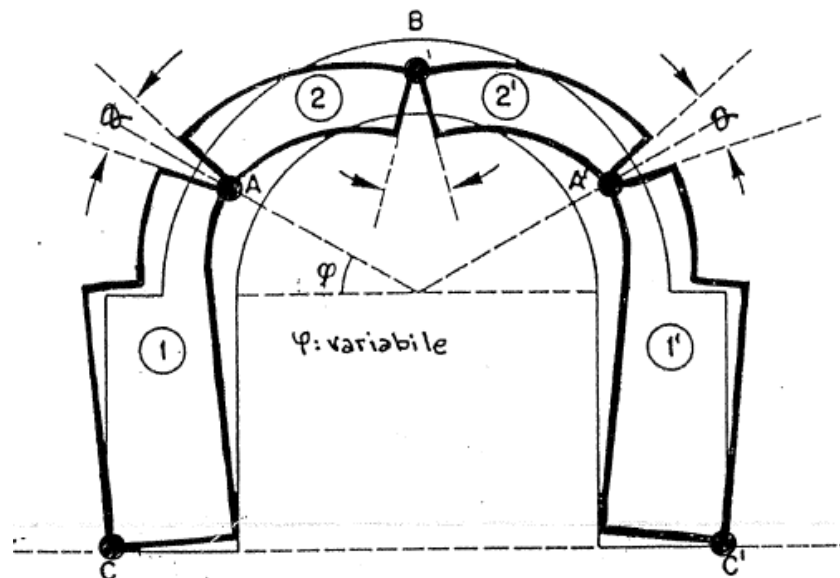
Mascheroni idealizza i meccanismi di rottura dell'arco individuati da De la Hire e da Coulomb a sistemi di aste rigide e ne determina le condizioni limite di equilibrio

Propone lo studio di due dei possibili meccanismi di rottura dell'arco:

- Rottura per scivolamento del cuneo centrale con punto di rotazione posto all'intradosso dell'arco (De La Hire, De Belidor)
- Rottura multipla con formazione di cerniere all'intradosso alle reni (simile a quello di Couplet)



Nella condizione di rottura si può vedere l'arco come sistema articolato di corpi rigidi vincolati a cerniera internamente e con l'esterno

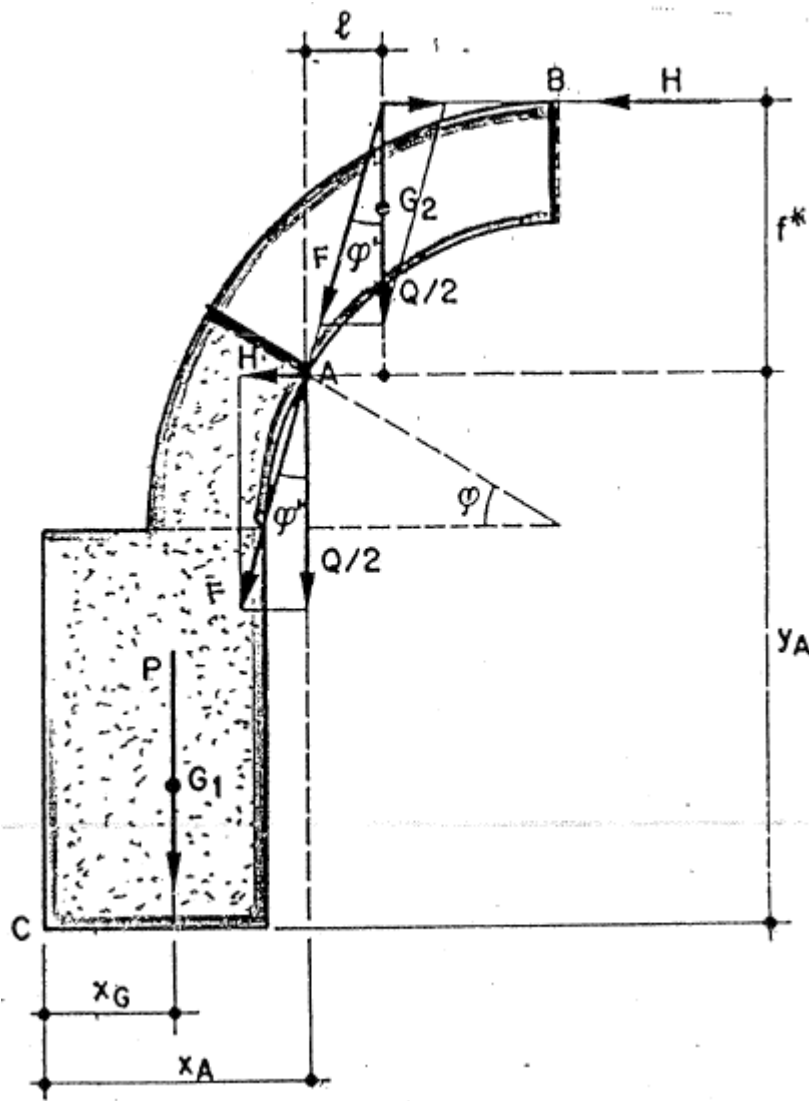


La Rottura a Flessione Multipla comporta l'apertura di lesioni all'intradosso in chiave e all'estradosso alle reni

E' più frequente dello scorrimento del cuneo

Il sistema è cinematicamente labile ($n=12$, $m=10$) ma possono esistere condizioni di carico tali da rispettare l'equilibrio

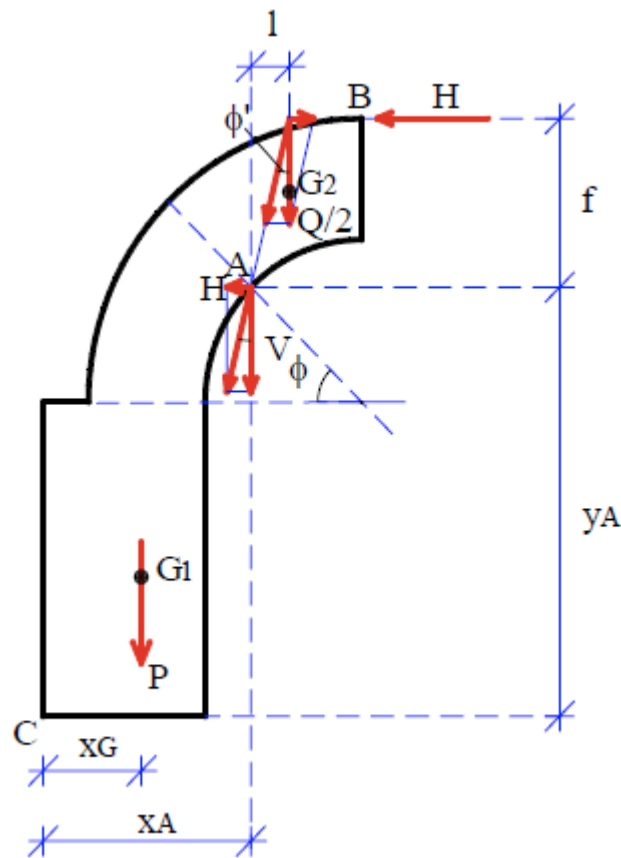
Viene analizzato tutto l'arco facendo variare l'angolo φ perche la posizione delle cerniere non è nota a priori



Per la simmetria del sistema la reazione offerta dalla cerniera in B non può che essere orizzontale

Il peso $Q/2$ del tratto AB, passante per il baricentro G_2 dovrà essere equilibrato da una forza orizzontale passante per B e da una forza passante per A

Si trova l'azione che il corpo AB esercita sul corpo AC attraverso la cerniera A



L'azione esercitata su AC ha componenti

$$V = Q / 2 \quad H = (Q / 2) \tan \varphi'$$

con

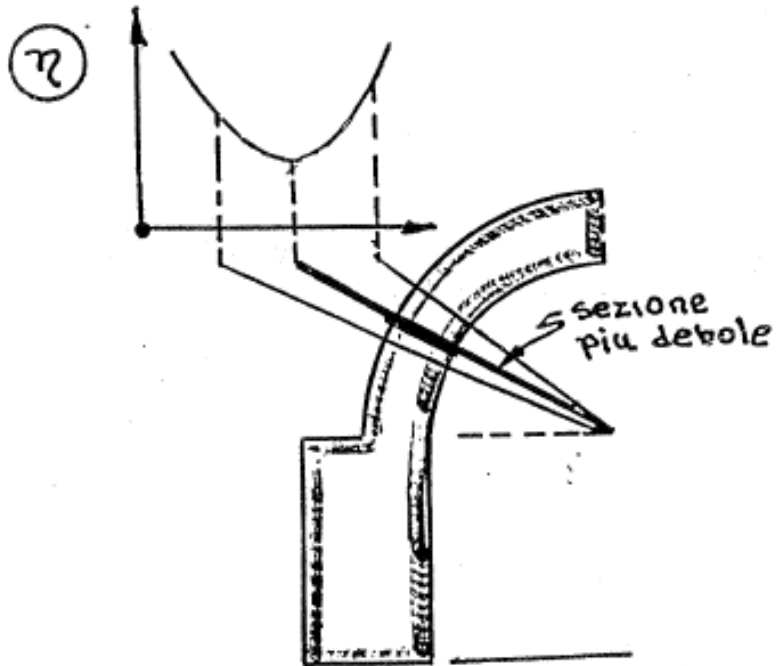
$$\tan \varphi' = l / f$$

L'equazione di equilibrio intorno a C fornisce la relazione :

$$H y_A - \frac{Q}{2} x_A - P x_G = 0 \longrightarrow P = \frac{Q}{2} \frac{(y_A \tan(\varphi') - x_A)}{x_G}$$

La relazione è analoga a quella di Belidor con φ' al posto di φ

Se $\varphi > \varphi'$ il peso P necessario per evitare lo scorrimento del cuneo è maggiore di quello necessario ad evitare la formazione delle cerniere



Dovendo effettuare la verifica per vari punti si può definire un parametro

$$\eta = \frac{P}{P_{necess}}$$

tale da dare un'idea immediata della stabilità della sezione verificata

L'attrito

Il calcolo a rottura

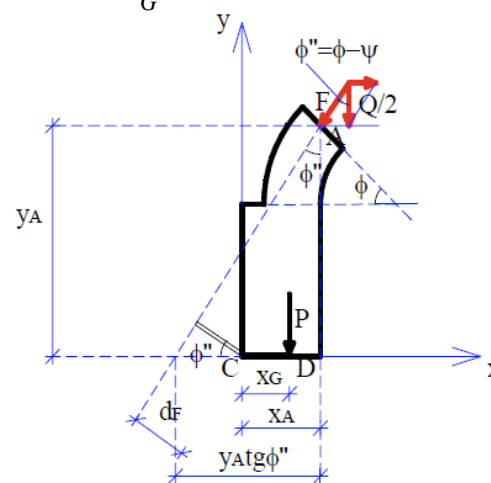
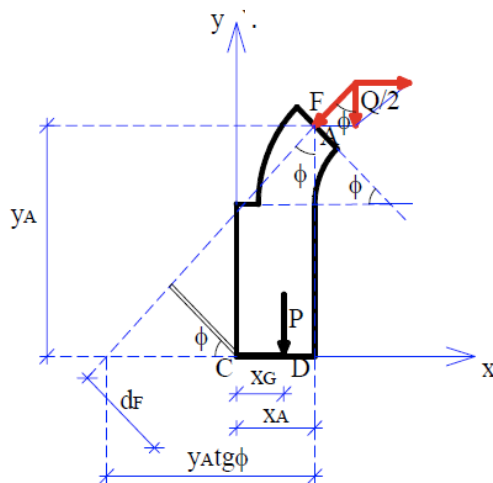
Nella maggioranza dei casi risulta $\varphi > \varphi'$ per cui la rottura avverrebbe per scorrimento piuttosto che per formazione di cerniere

Le superfici tra un concio e l'altro non sono prive di attrito come ipotizzato

La reazione che le superficie del giunto offre al cuneo centrale non è ortogonale al giunto stesso ma inclinata di un angolo ψ nel verso opposto a quello del moto.

L'equazione di equilibrio diventa:

$$Fd_F - Px_G = 0 \longrightarrow P = \frac{Q}{2} \frac{(y_A \tan(\varphi'') - x_A)}{x_G} \quad \text{con} \quad \varphi'' = \varphi - \psi$$



L'ipotesi di mancanza di attrito fa ritenere più pericoloso un meccanismo che di fatto non si realizza

La teoria elastica

Iperstaticità e catenaria

Nel XVIII secolo era possibile trattare rigorosamente solo strutture ipostatiche o isostatiche, erano note solo le condizioni di equilibrio

Il XIX secolo è segnato dai tentativi di interpretazione dell'arco in muratura nell'ambito della teoria della trave elastica ad asse curvilineo

Un arco considerato come elemento monolitico è una struttura iperstatica, per essere risolto è necessario tenere conto della deformabilità del materiale di cui è composto

Si affrontano problemi irrisolvibili nell'apparato concettuale del corpo rigido:

- l'effettiva capacità di sopportare certi stati di sollecitazione
- l'effettivo andamento della curva delle pressioni all'interno dell'arco

Hooke intuisce la relazione esistente tra una fune in equilibrio sotto carichi assegnati ed un arco soggetto agli stessi carichi avente forma identica ma rovesciata.

Navier

La teoria elastica

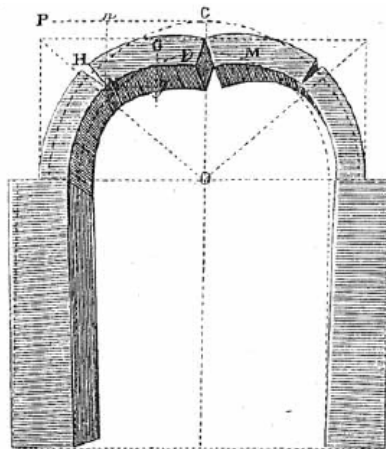
Gli studi di Navier si basano sulle ipotesi di:

- Legame elastico forze deformazioni
- Conoscenza delle condizioni al contorno

Se l'arco è considerato rigido non è possibile determinare la linea delle pressioni

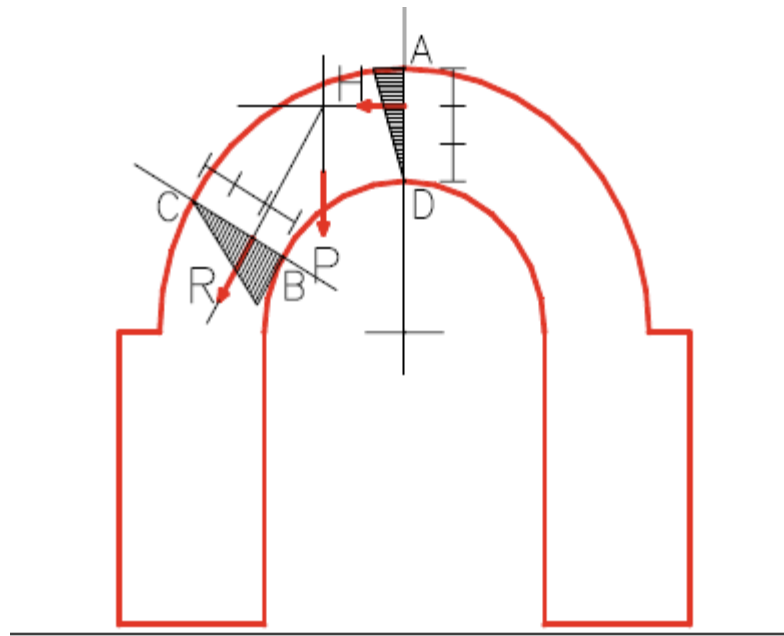
Se si considera deformabile divengono disponibili ulteriori equazioni che consentono di risolvere il problema iperstatico

Navier propose di effettuare le verifiche di stabilità condotte da Coulomb imponendo che le sezioni rimanessero interamente reagenti con tensioni massime di compressione inferiori alle tensioni massime di rottura del materiale rilevate sperimentalmente



Navier ipotizzò che, per avere solo sforzi di compressione, la linea delle pressioni doveva passare, in corrispondenza dei 'giunti di rottura', al massimo per il terzo medio della sezione resistente

In questo modo si ha la condizione limite di diagramma triangolare delle tensioni di compressione all'interno della sezione, con un valore nullo in corrispondenza del punto in cui ha inizio lo scorrimento in caso di rottura.

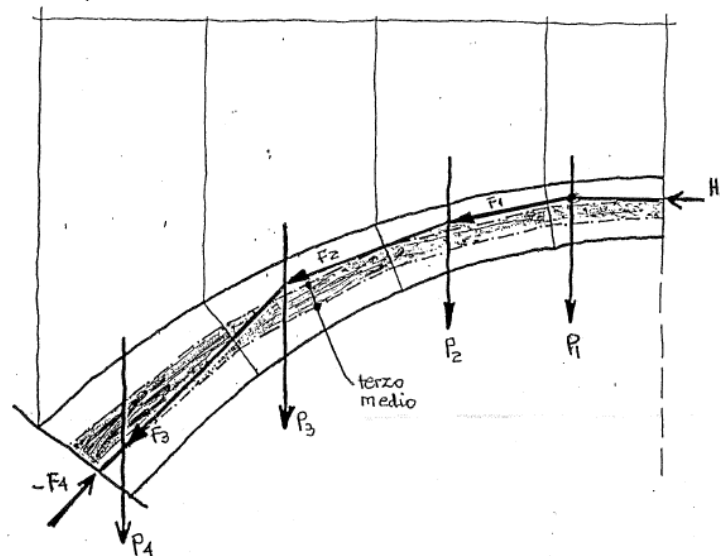


Mèry

La teoria elastica

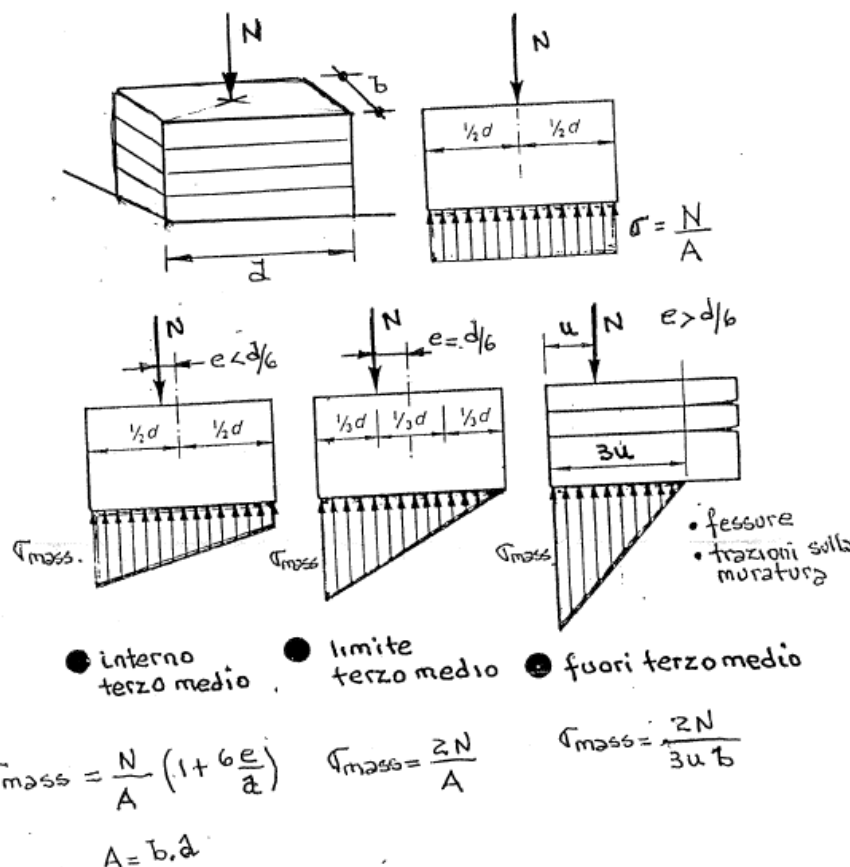
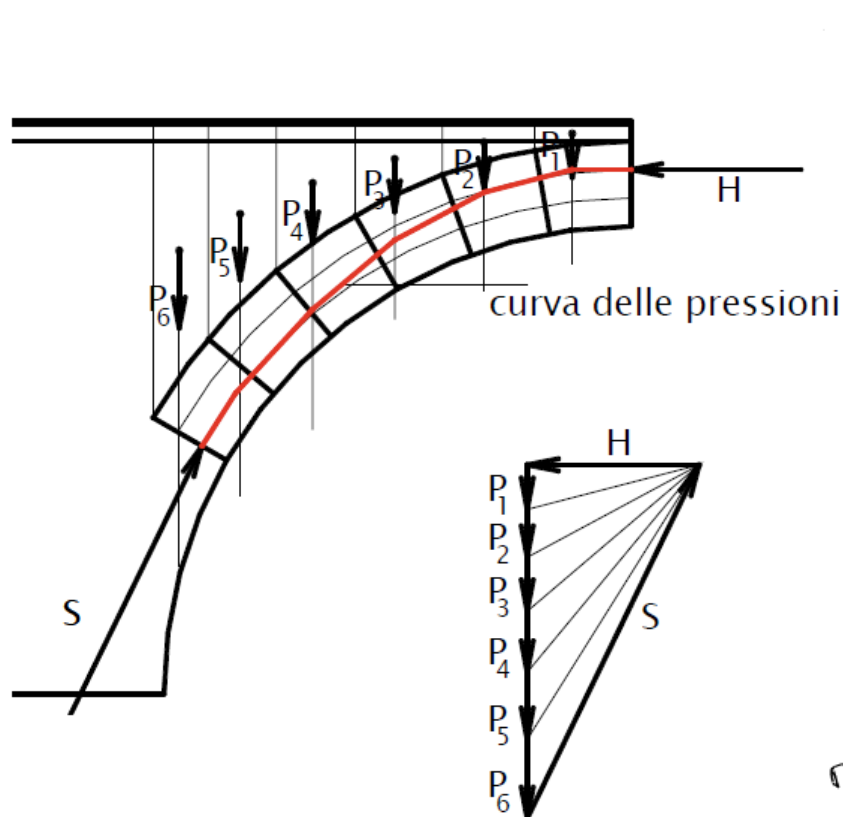
Partendo dagli studi di Navier, Mèry mostrò che il problema della determinazione del regime statico di un arco poteva essere risolto utilizzando un poligono di equilibrio a passaggio obbligato per due punti: il terzo medio inferiore nella sezione di imposta e il terzo medio superiore nella sezione in chiave, con retta d'azione orizzontale (per arco simmetrico e simmetricamente caricato e vincolato)

In questo modo noti i carichi esterni, era possibile ottenere l'andamento della curva delle pressioni.



La verifica dell'arco consiste nell'accertare che nelle sue sezioni non siano presenti forze di trazione

Per un arco con sezione trasversale rettangolare, bisogna verificare che la curva delle pressioni sia contenuta all'interno della fascia delimitata dal terzo medio di tutte le sezioni trasversali (nocciolo centrale d'inerzia).



Studi sulla linea delle pressioni

- MENABREA (1858) *PRINCIPIO DI MINIMO DELL'ENERGIA POTENZIALE*

Tra le infinite linee di pressioni che possono essere tracciate all'interno delle curve di intradosso e di estradosso dell'arco, quella «vera» è quella che rende minima la spinta orizzontale in chiave. (Si sceglierebbe una linea che passa per l'estradosso alle reni e all'intradosso in chiave)

- WINKLER (1867)

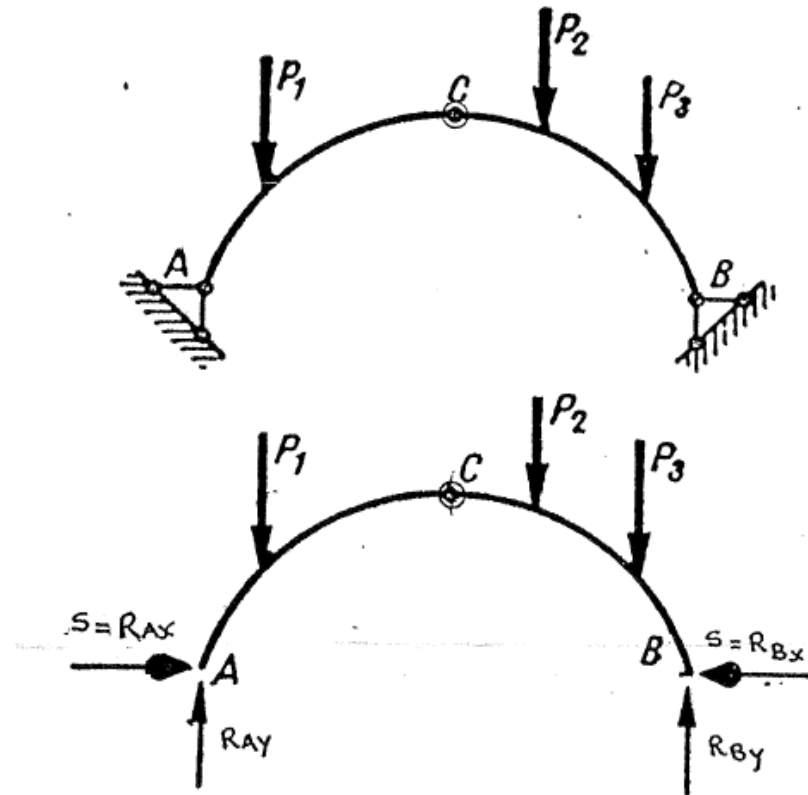
La «vera» curva di pressione è quella che mediamente si discosta il meno possibile dalla linea d'asse dell'arco (Studio che discende dalla teoria dell'elasticità)

- HEYMAN (1967) *TEOREMA DELLA SICUREZZA*

Se è possibile trovare una linea delle pressioni dell'arco completo, che sia in equilibrio con i carichi applicati (incluso il peso proprio) e rimane ovunque interna allo spessore dell'arco, allora questo è sicuro

Studio statico grafico dell'arco

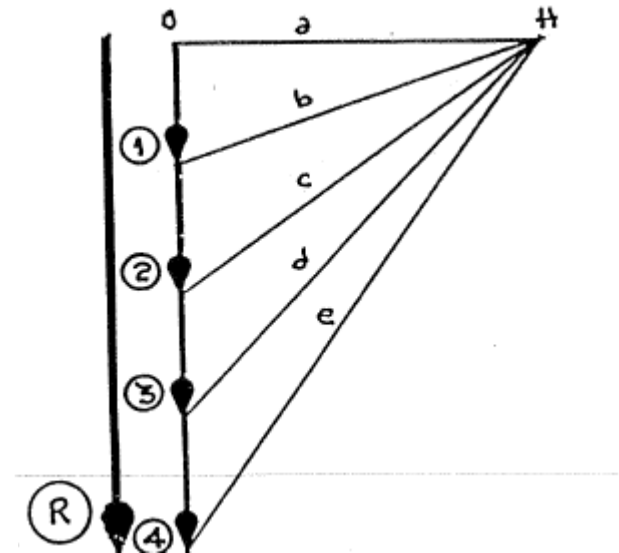
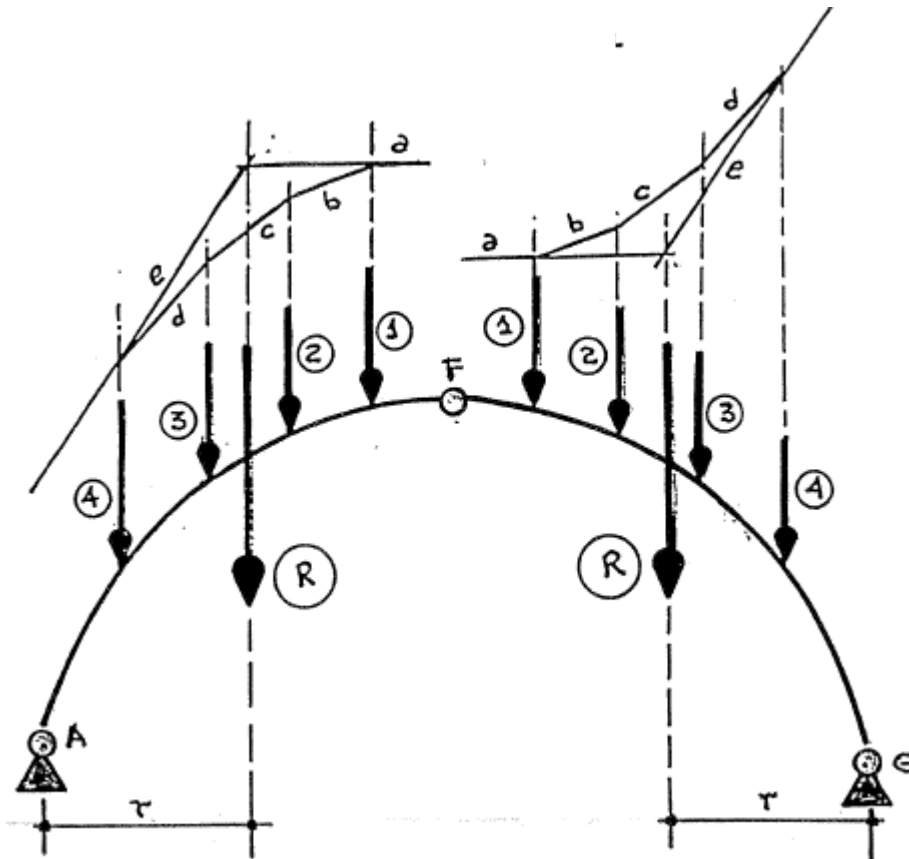
La line delle pressioni



Nel caso in cui tutti i carichi siano verticali la componente orizzontale s delle reazioni R_s è costante

$$R_{Ax} = R_{Bx} = S$$

Arco simmetrico caricato simmetricamente con sole forze concentrate verticali.



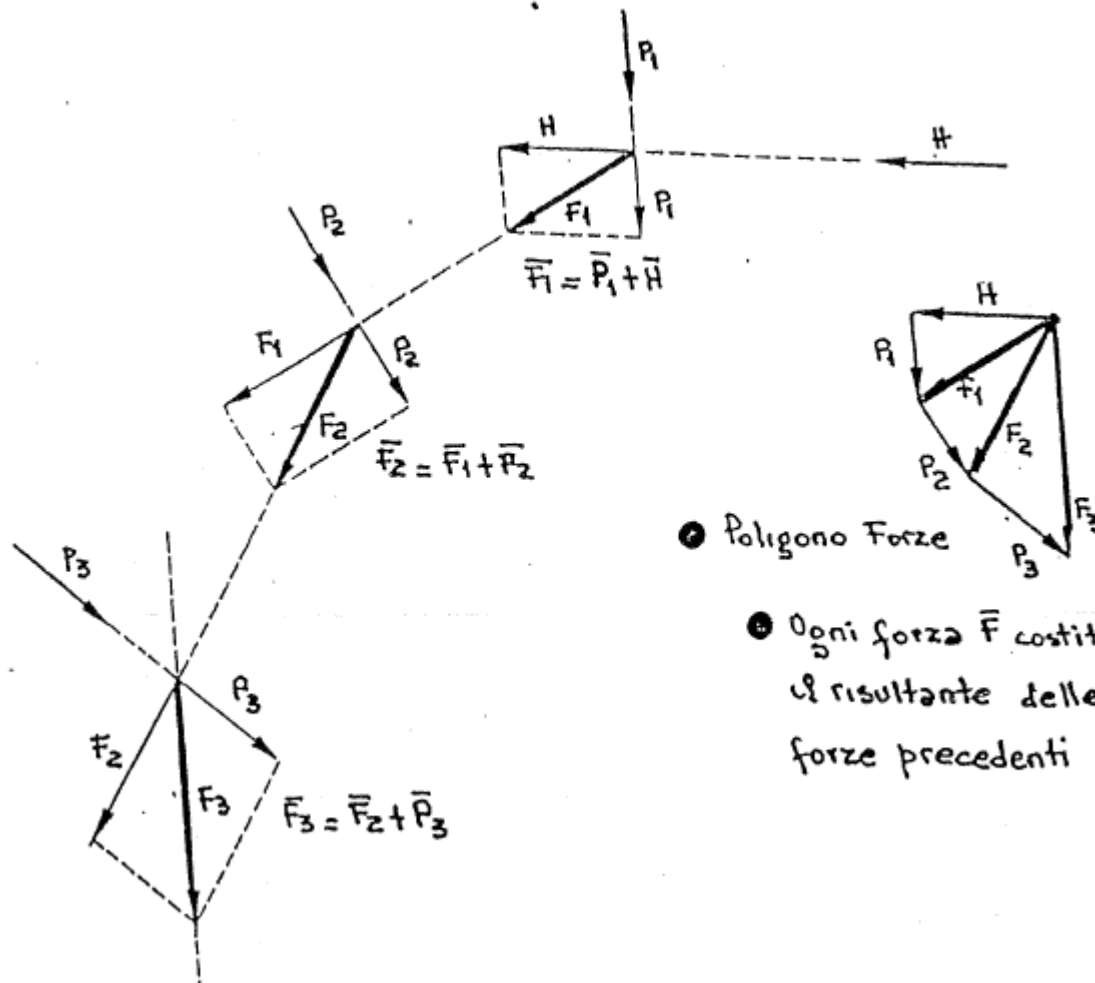
Si costruisce il poligono delle forze e lo si proietta da un punto H sull'orizzontale di O

(Il primo lato è orizzontale a)

La somma delle forze è la risultante R di tutti i carichi agenti sul semiarco

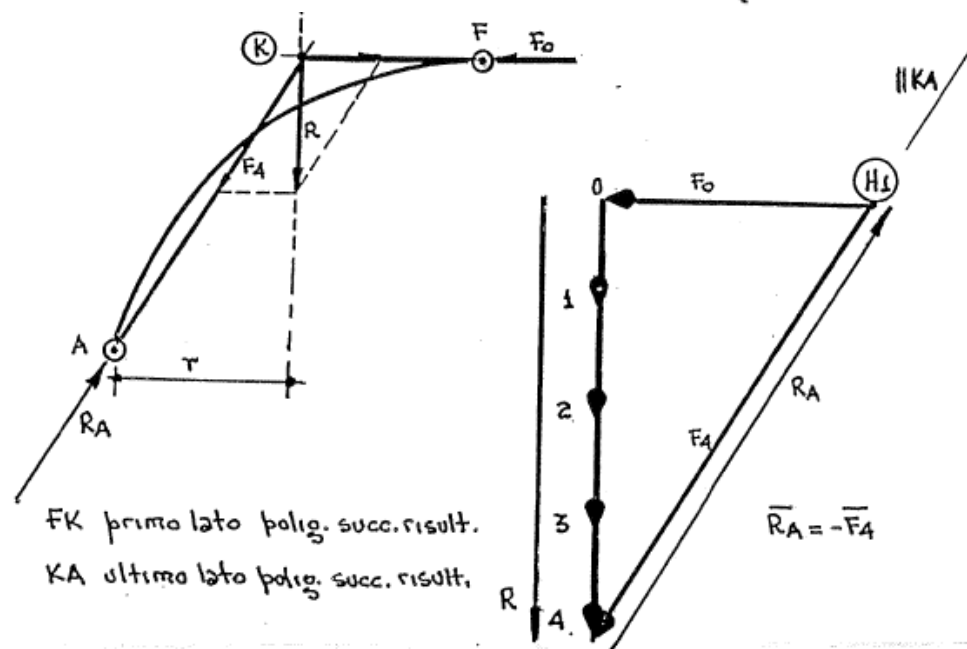
La retta d'azione di R risulta definita dall'intersezione del primo ed ultimo lato del poligono funicolare (tratti a ed e)

Il poligono delle risultanti successive

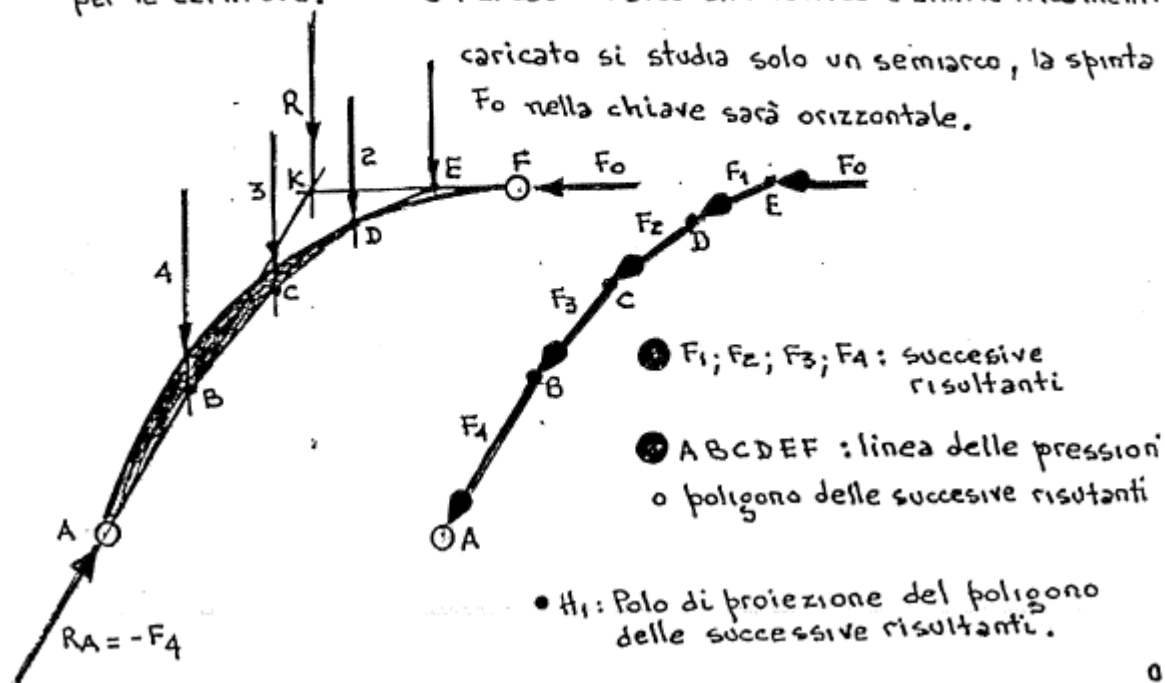


Bisogna determinare il polo di proiezione del poligono

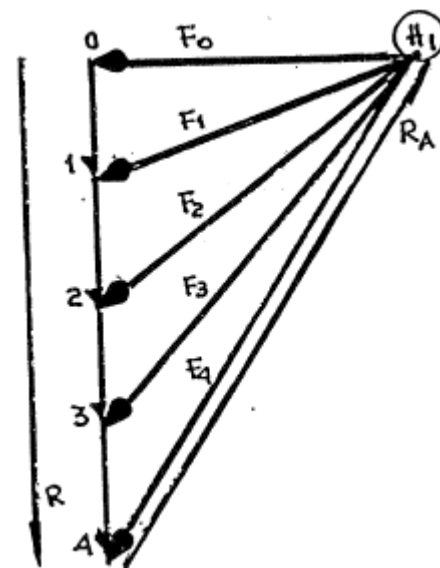
- La spinta in chiave F_0 sarà orizzontale (ipotesi giustificata dalla simmetria).
- Per il punto F (cerniera nella chiave) si traccia una retta orizzontale fino ad incontrare in K la retta d'azione del risultante, dopo si congiunge K con il punto A corrispondente alla cerniera di appoggio. In questa maniera si sono tracciati il primo lato (FK) e l'ultimo lato (KA) del poligono delle successive risultanti.
- Riportando dall'estremità di 4 una retta parallela a KA si determina sulla orizzontale da O il punto (H_1) che è il polo di proiezione del poligono delle successive risultanti. Allo stesso tempo sono state determinate F_0 ed R .

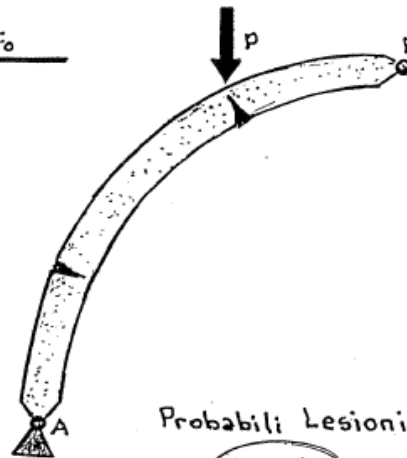
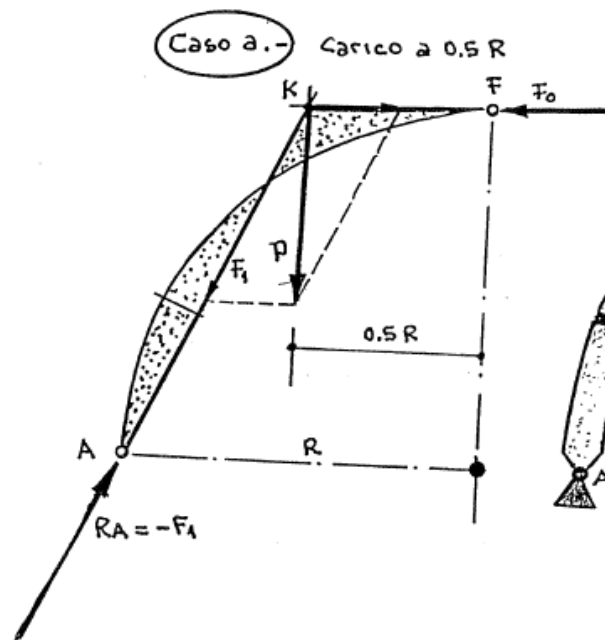


- Negli archi a 3 cerniere la linea delle pressioni è determinata staticamente dalla condizione che i lati estremi devono passare per le cerniere. -
- Nel caso di arco simmetrico e simmetricamente caricato si studia solo un semiarco, la spinta F_0 nella chiave sarà orizzontale.



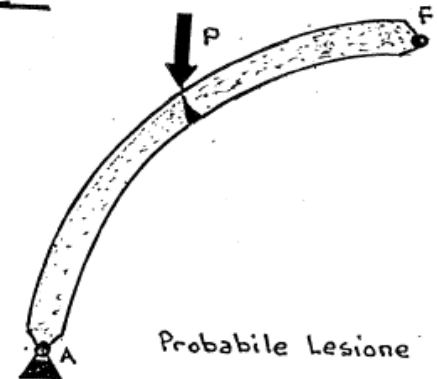
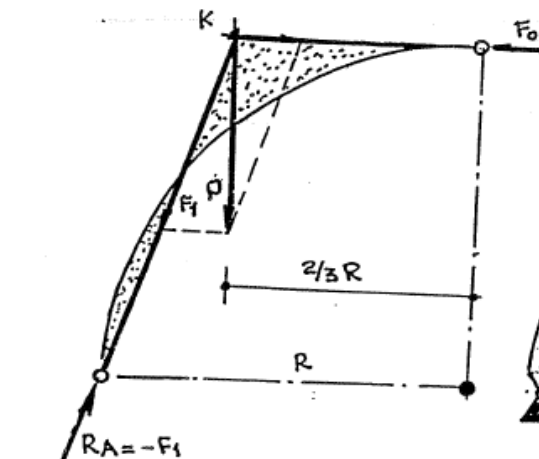
- ➡ Il comportamento statico di un arco è tanto più soddisfacente quanto meno la linea delle pressioni si scosta dall'asse del arco, perchè il momento flettente risulta altrettanto minore.





Probabili Lesioni

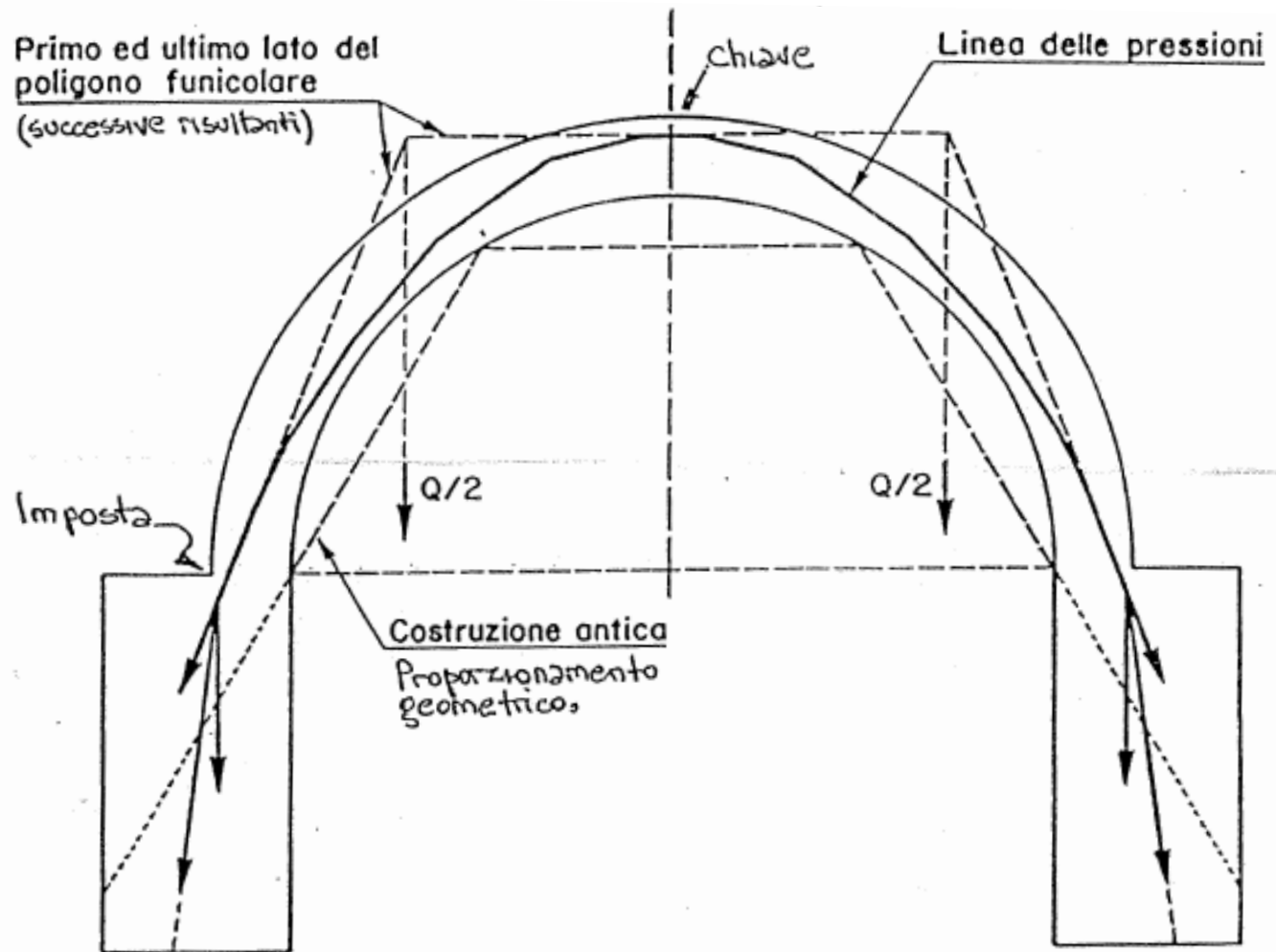
Caso b.- Carico a $2/3 R$ (spostamento verso le reni)



Probabile Lesione

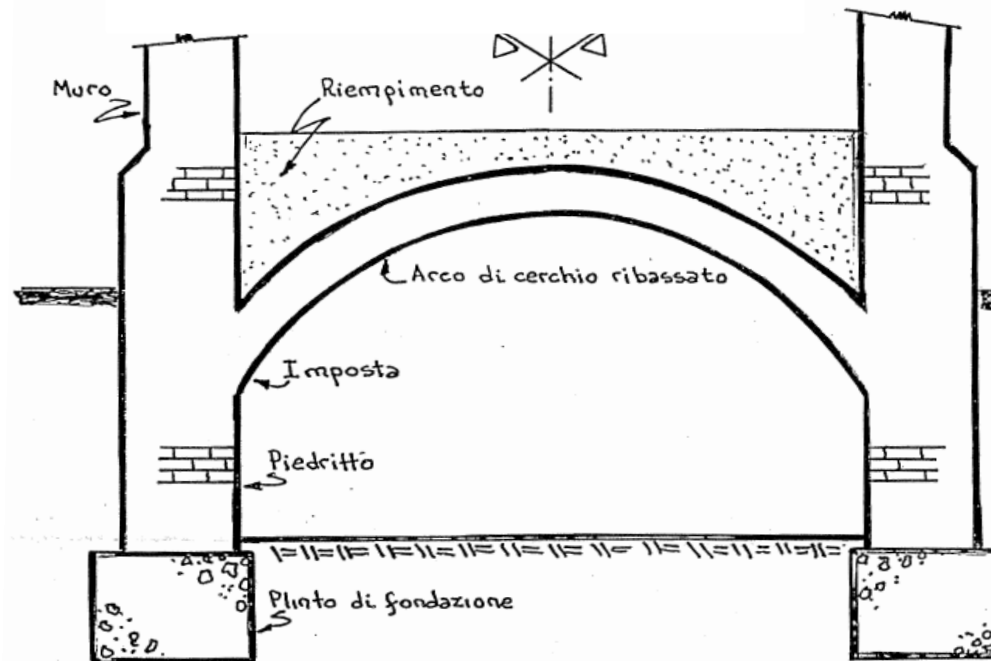
- Si scompone P secondo le due direzioni FK e KA e si ottengono la spinta in chiave F_0 e la reazione dell'imposta R_A

● Spostando il carico P verso l'imposta (caso b), la spinta F_0 è minore ed R_A è più vicina alla verticale. In corrispondenza con le reni si produce un innalzamento della linea delle pressioni. Questo dimostra l'utilità del rifianco.

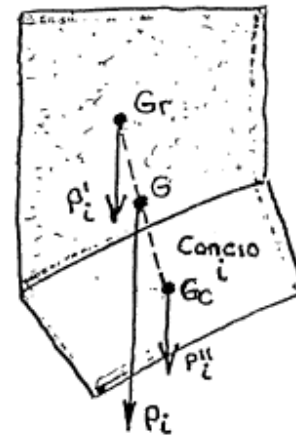
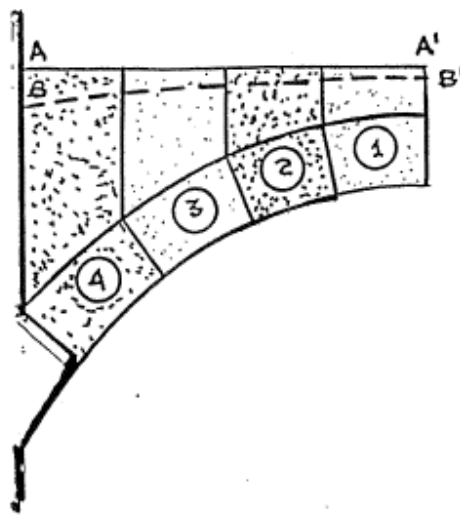


Il proporzionamento geometrico forniva un'indicazione coerente con l'inclinazione della reazione all'impasto.

Studio statico grafico dell'arco e delle strutture che lo sostengono



- Un arco simmetrico è simmetricamente caricato
- Materiale di riempimento con peso specifico uniforme γ_r
- Peso specifico del materiale dell'arco: γ_a
- Si considera la spinta del terreno sul piedritto



P_i' : peso fascia gravante

P_i'' : peso proprio dell'arco

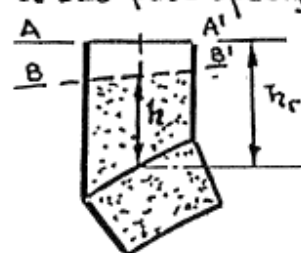
$$P_i = P_i' + P_i''$$

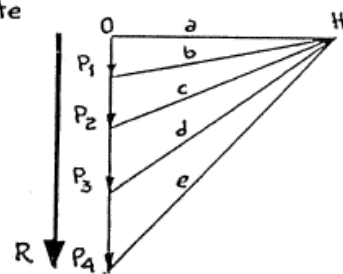
- Il semiarco è suddiviso in conci. Su ogni concio d'arco si proietta la parte corrispondente di tutti gli elementi che gravano sull'arco (rinfranco, pavimento, murature, ecc.). Si ottiene così una fascia gravante sul concio considerato.

Quindi si determinano il peso proprio ed il baricentro di ciascun concio e della fascia gravante corrispondente. Noti i baricentri, i valori dei pesi propri si compongono in un unico valore

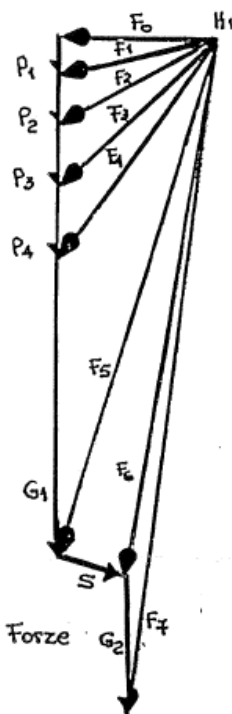
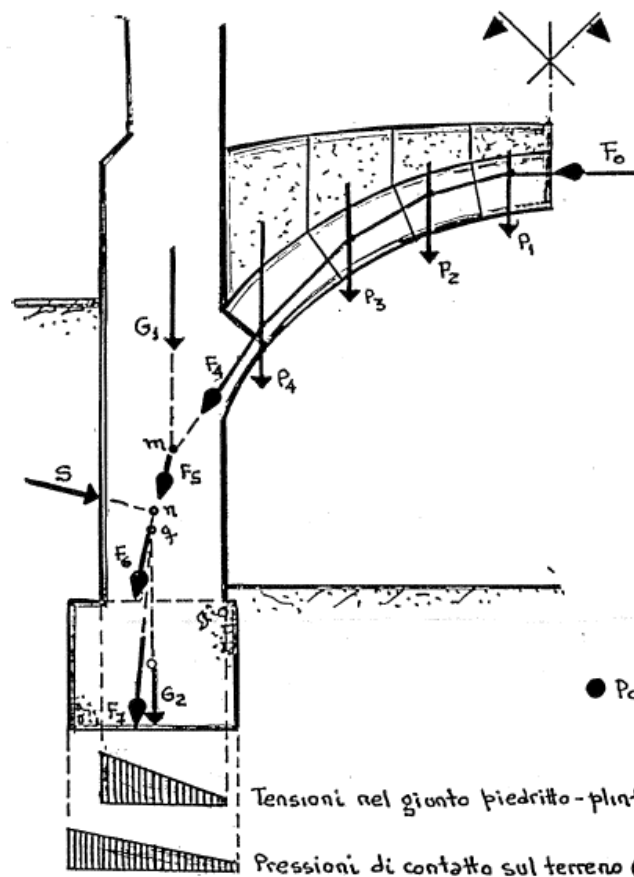
- Talvolta è conveniente sostituire la linea di carico A A' del riempimento per una linea di carico equivalente B B' omogeneizzata al peso specifico γ_d del materiale del arco. Se h_r è l'altezza reale del riempimento in un punto generico e il suo peso specifico è γ_r , l'altezza equivalente h risulta:

$$h = h_r \frac{\gamma_r}{\gamma_d}$$





Pesi dei conci e delle
corrispondenti fasce gravanti



Forma dell'arco

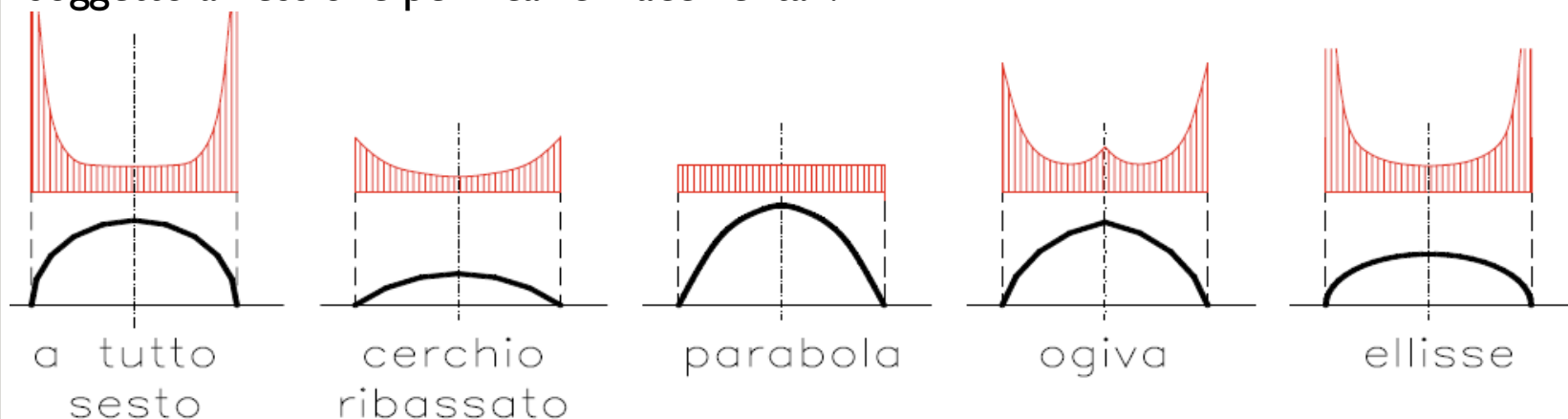
Gli studi condotti sull'arco nel corso del XIX secolo riguardavano prevalentemente la forma da conferire all'arco per garantire la centratura dello sforzo normale in corrispondenza delle facce a contatto tra un concio e l'altro.

Il profilo più adatto per un arco è quello la cui linea d'asse si dispone secondo la funicolare dei carichi ad esso applicati.

Se un arco è funicolare per un insieme di carichi, non può esserlo per tutti gli altri sistemi di carichi cui può essere assoggettato

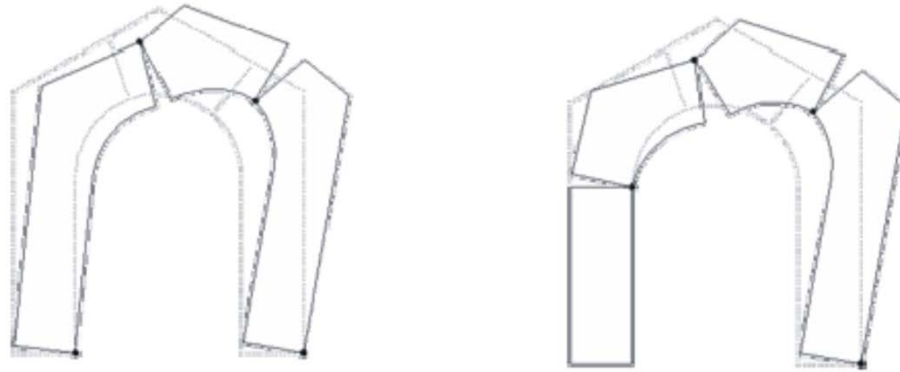
In ogni arco si ha in genere una combinazione di compressione e di flessione

Nell'arco in muratura la forma è, in genere, funicolare del peso proprio e l'arco è soggetto a flessione per i carichi accidentali.



Distribuzione di carichi che genera compressione uniforme per le diverse direttrici (linea d'asse coincidente con la linea delle pressioni)

Studi moderni con sotto l'azione sismica



Meccanismi di ribaltamento dei piedritti degli archi

Ancora improntati alla definizione del meccanismo di collasso

