

Capitolo 2

Continuo monodimensionale polare

1. Modello di trave rettilinea nel piano

Essendo il modello tridimensionale troppo complicato e osservando che la geometria della trave propone una dimensione prevalente, si va alla ricerca di equazioni semplificate, dette equazioni generalizzate, adattate all'oggetto studiato ma non perfettamente corrispondenti alle più generali equazioni per modelli tridimensionali.

Affinché il nostro modello sia legittimo si cerca un approccio semplificato verificando a posteriori la dualità tra gli operatori statico e cinematico. Il modello di trave rettilinea vive di vita propria, cioè per analizzarlo non occorre ripartire dal più generale modello tridimensionale e semplificare.

1.1. Modello continuo monodimensionale polare

La descrizione della trave avviene attraverso la caratterizzazione di ∞ punti orientati.

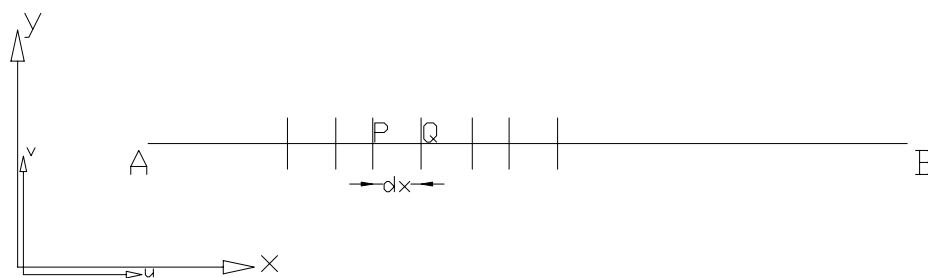


Fig.2: Continuo monodimensionale polare

Si esegue l'analisi infinitesimale del concio di trave infinitesimo:

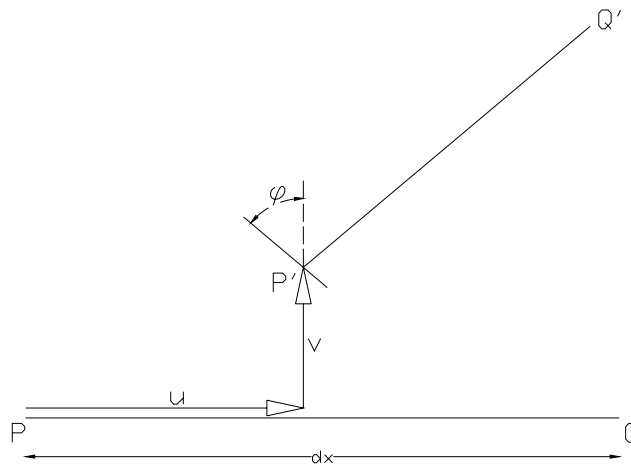


Fig.3: Concio infinitesimo di trave

il punto P trasla lungo x, trasla lungo y, ruota di una ampiezza φ . Consideriamo allora il vettore spostamento:

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

La grandezza φ compare per completare l'informazione perduta nel passaggio da ambiente tridimensionale ad ambiente monodimensionale. Così operando si è tacitamente formulata l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane. Si procede indagando sulle deformazioni generalizzate.

1.2. Problema cinematico

Gli spostamenti globali di Q sono la somma di uno spostamento rigido rispetto a P e di un incremento dovuto alla deformazione:

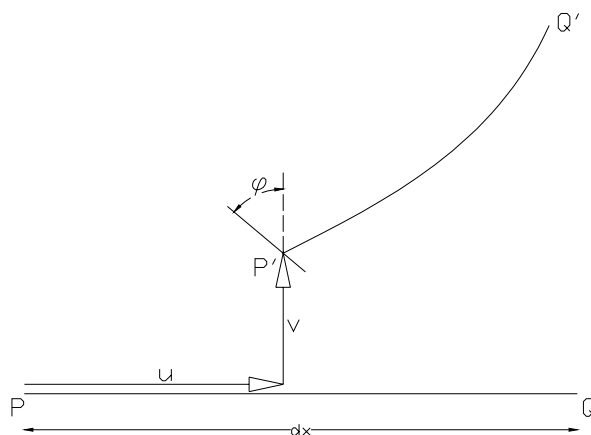


Fig.4: Analisi degli spostamenti

$$\begin{pmatrix} u_Q \\ v_Q \\ \varphi_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{du}{dx} dx \\ \frac{dv}{dx} dx \\ \frac{d\varphi}{dx} dx \end{pmatrix}$$

Gli spostamenti rigidi di Q sono:

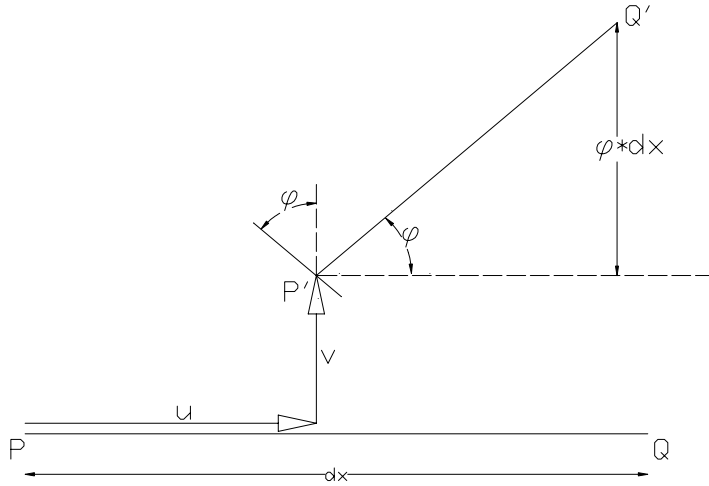


Fig.5: Spostamenti rigidi

$$\begin{pmatrix} u_{Q_{rig}} \\ v_{Q_{rig}} \\ \varphi_{Q_{rig}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v + \varphi dx \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi dx \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si fa osservare che la traslazione è rigida solo se $PQ \equiv P'Q'$ e se $P'Q'$ rimane rettilineo. Sottraendo gli spostamenti rigidi di Q agli spostamenti generali di Q rimane la deformazione di Q:

$$\begin{pmatrix} du_Q \\ dv_Q \\ d\varphi_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_Q \\ v_Q \\ \varphi_Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{Q_{rig}} \\ v_{Q_{rig}} \\ \varphi_{Q_{rig}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dx} - \varphi \\ \frac{d\varphi}{dx} \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{pmatrix} dx$$

Si definiscono le seguenti deformazioni generalizzate:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \Rightarrow \text{Elongazione}$$

$$\gamma = \frac{dv}{dx} - \varphi \Rightarrow \text{Deformazione a taglio}$$

$$\kappa = \frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow \text{Curvatura}$$

Si spendono due parole per evidenziare il significato fisico della deformazione a taglio $\gamma = \frac{dv}{dx} - \varphi$: γ esprime la rotazione in più del segmento d'orientazione rispetto alla rotazione della linea d'asse.

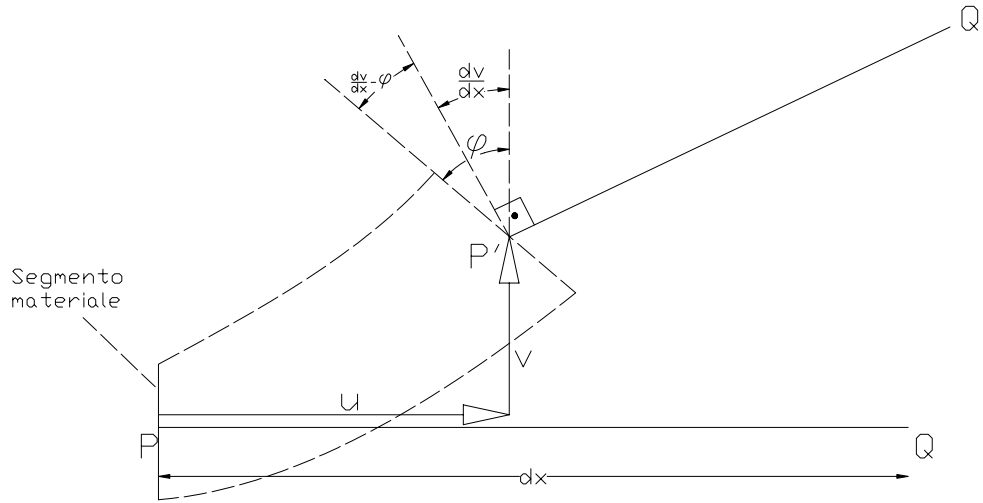


Fig.6: Significato fisico della deformazione a taglio

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (19)$$

Si fa osservare che il problema è cinematicamente determinato perché l'operatore è quadrato.

1.3. Condizioni al contorno geometriche

$$\begin{aligned} u_A &= \bar{u}_A & u_B &= \bar{u}_B \\ v_A &= \bar{v}_A & v_B &= \bar{v}_B \\ \varphi_A &= \bar{\varphi}_A & \varphi_B &= \bar{\varphi}_B \end{aligned} \quad (20)$$

1.4. Problema statico

Anche nella statica si cercano delle grandezze generalizzate. Si riconoscono a priori come grandezze generalizzate lo sforzo assiale, il taglio, il momento flettente, salvo poi verificare l'aggiuntività tra gli operatori statico e cinematico. Il concio infinitesimo PQ è soggetto alle seguenti forze:

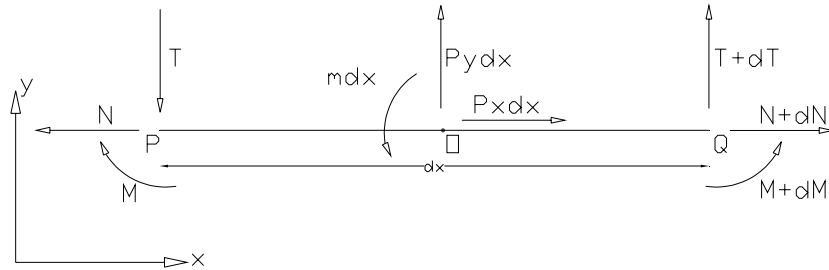


Fig.7: Forze in gioco

Imponendo l'equilibrio cardinale si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} N' + P_x &= 0 \\ T' + P_y &= 0 \\ M' + T + m &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

In forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} -\frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N \\ T \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ m \end{pmatrix}$$

Osservando l'operatore statico si riconosce la matrice aggiunta dell'operatore cinematico; si asserisce, allora, che N, T, M sono le grandezze duali di ε, γ e κ . Anche il problema statico è determinato, cioè noti P_x, P_y e m si possono determinare univocamente N, T ed M ; la trave monodimensionale è internamente isostatica.

1.5. Condizioni al contorno meccaniche

$$\begin{aligned} \pm N &= f_x \\ \pm T &= f_y \\ \pm M &= \mu \end{aligned} \quad (22)$$

1.6. Legame costitutivo

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA_t & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (23)$$

2. Trave indeformabile a taglio

L'Ipotesi di lavoro è $\gamma=0$, cioè $\frac{dv}{dx} = \varphi$; è come se fosse stato imposto un vincolo interno.

Questa condizione muta il problema cinematico e il problema statico: le deformazioni generalizzate divengono:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{du}{dx} \\ \gamma &= \frac{dv}{dx} - \varphi \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \varphi \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \frac{du}{dx} \\ \kappa = \frac{d^2v}{dx^2} \end{cases} \\ \kappa &= \frac{d\varphi}{dx} \end{aligned}$$

Le incognite si riducono da 3 (u, v, φ) a 2 (u, v). φ non è più una incognita perché sarà sempre uguale alla rotazione che subisce la linea d'asse.

2.1. Problema cinematico

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (24)$$

Si ha a che fare con due equazioni disaccoppiate.

2.2. Condizioni al contorno geometriche

$$\begin{aligned} u_A &= \bar{u}_A & u_B &= \bar{u}_B \\ v_A &= \bar{v}_A & v_B &= \bar{v}_B \\ v'_A &= \bar{\varphi}_A & v'_B &= \bar{\varphi}_B \end{aligned} \quad (25)$$

2.3. Problema statico

Dovendo l'operatore statico essere l'aggiunto dell'operatore cinematico, anche il problema statico riduce le sue equazioni.

NB: imporre $\gamma=0$ non implica taglio nullo perché cinematica e statica non sono legate fra di loro.

Le equazioni della statica mutano come di seguito:

$$\begin{aligned} N' + P_x &= 0 \\ T' + P_y &= 0 \\ M' + T + m &= 0 \end{aligned}$$

Si procede alla condensazione del taglio:

$$T' = -P_y$$

Ottenendo:

$$\begin{aligned} N' + P_x &= 0 \\ M'' + m' - P_y &= 0 \end{aligned}$$

In forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} -\frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y - m' \end{pmatrix} \quad (26)$$

Si ha a che fare con due equazioni disaccoppiate.

2.4. Soluzione col metodo degli spostamenti

$$\{\varepsilon\} = [D]\{u\}$$

$$[D^*]\{\sigma\} = \{b\}$$

$$[\sigma] = [C]\{\varepsilon\} \Rightarrow [\sigma] = [C][D]\{u\} \Rightarrow \begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' EA \\ EI v'' \end{pmatrix}$$

Dalle equazioni della statica si ottengono le due equazioni di equilibrio in funzione degli spostamenti:

1) $EAu'' = -P_x \Rightarrow$ Equazione dell'asta

2) $Elv^{IV} = P_y - m' \Rightarrow$ Equazione della linea elastica della trave indeformabile a taglio