Comportamento fuori piano di trave curva a semplice curvatura

Dott. Ing. Andrea Matteo de Leo

May 6, 2013

Contents

1 Modello generale

1.1 Campo di spostamenti

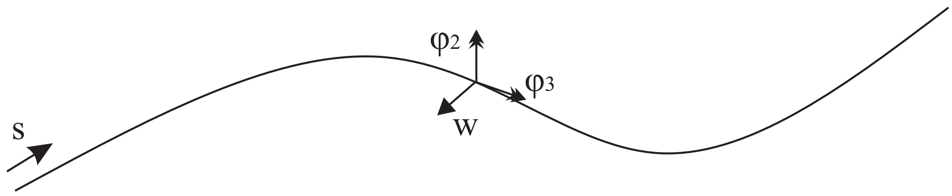

Figure 1: Campo di spostamenti trave curva per comportamento fuori piano

$$\begin{cases} w = w(s) \\ \varphi_2 = \varphi_2(s) \\ \varphi_3 = \varphi_3(s) \end{cases} \tag{1}$$

1.2 Problema cinematico

Consideriamo un concio infinitesimo di arco lungo ds di estremi P e Q. Indichiamo con $\bar{\mathbf{u}}$ il vettore spostamento nel punto P, tale che:

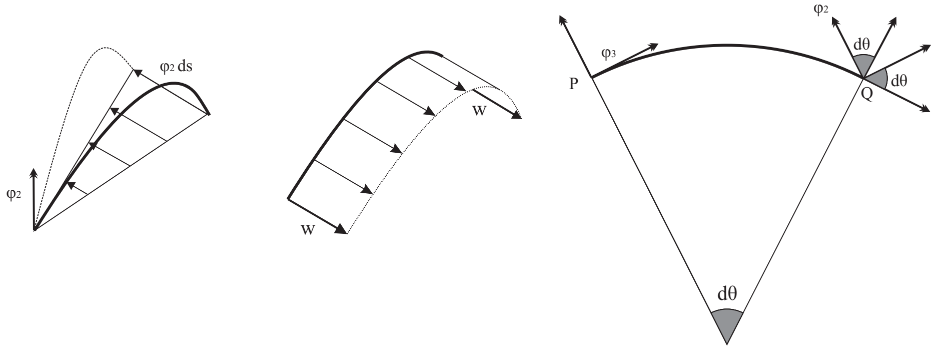

Figure 2: Cinematiche rigide

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

Scrivendo lo sviluppo in serie di Taylor troncato al prim' ordine del vettore $\bar{\mathbf{u}}$ otteniamo il vettore spostamento nel punto Q.

$$\bar{\mathbf{u}}_Q = \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} w' \\ {\varphi_2}' \\ {\varphi_3}' \end{Bmatrix} ds \tag{3}$$

La componente rigida del vettore spostamento $\bar{\mathbf{u}}_{Q,R}$, ricordando che $d\theta = \frac{ds}{R}$ è data da:

$$\bar{\mathbf{u}}_{Q,R} = \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\varphi_2 \\ \frac{\varphi_3}{R} \\ -\frac{\varphi_2}{R} \end{Bmatrix} ds \tag{4}$$

Sottraendo (4) da (3), si ottiene la componente di spostamento legata alla deformazione $\bar{\mathbf{u}}_{Q,D}$:

$$\bar{\mathbf{u}}_{Q,D} = \left\{ \begin{array}{c} w' + \varphi_2 \\ {\varphi_2}' - \frac{\varphi_3}{R} \\ {\varphi_3}' + \frac{\varphi_2}{R} \end{array} \right\} ds \tag{5}$$

Il vettore deformazione $\bar{\epsilon}$ risulta quindi dato da:

$$\bar{\epsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{u,v} \\ \kappa_{u,w} \\ \kappa_u \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} w' - \varphi_2 \\ {\varphi_2}' - \frac{\varphi_3}{R} \\ \frac{\varphi_2}{R} + {\varphi_3}' \end{array} \right\} \tag{6}$$

Che può essere posto in forma operatoriale come:

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma_{u,v} \\ \kappa_{u,w} \\ \kappa_u \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{d}{ds} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{ds} & -\frac{1}{R} \\ 0 & \frac{1}{R} & \frac{d}{ds} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} w \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{array} \right] \tag{7}$$

1.3 Problema statico

Consideriamo un concio infinitesimo di arco lungo ds.

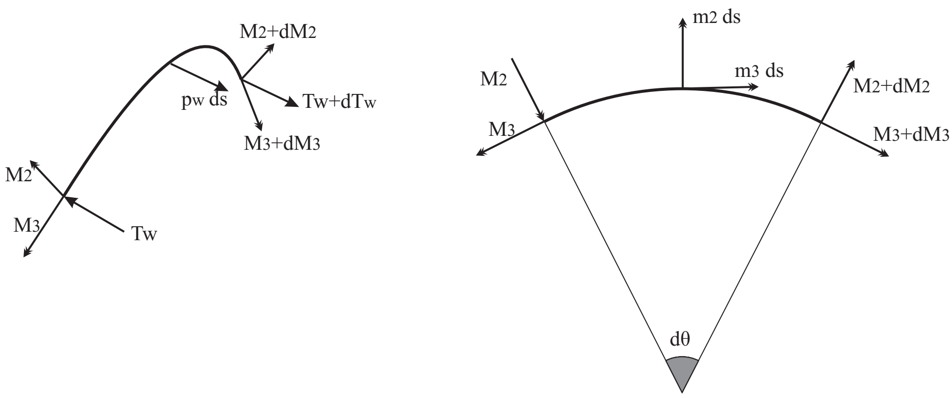

Figure 3: Grandezze statiche generalizzate

$$\left\{ \begin{array}{l} -T_w + (T_w + dT_w) + p_w ds = 0 \\ -M_2 \cos(\frac{d\theta}{2}) + (M_2 + dM_2)\cos(\frac{d\theta}{2}) - M_3 \sin(\frac{d\theta}{2}) - (M_3 + dM_3)\sin(\frac{d\theta}{2}) + \\ -T_w \frac{ds}{2} - (T_w + dT_w)\frac{ds}{2} + m_2 ds = 0 \\ M_2 \sin(\frac{d\theta}{2}) + (M_2 + dM_2)\sin(\frac{d\theta}{2}) - M_3 \cos(\frac{d\theta}{2}) + (M_3 + dM_3)\cos(\frac{d\theta}{2}) + \\ m_3 ds = 0 \end{array} \right. \tag{8}$$

Ricordando che $d\theta = \frac{ds}{R}$, linearizzando i vari termini otteniamo e dividendo tutto per ds otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} -{T_w}' = p_w \\ +T_w - {M_2}' + \frac{M_3}{R} = m_2 \\ -\frac{M_2}{R} - {M_3}' = m_3 \end{array} \right. \tag{9}$$

Che può essere posto in forma operatoriale come:

$$\begin{bmatrix} -\frac{d}{ds} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{d}{ds} & \frac{1}{R} \\ 0 & -\frac{1}{R} & -\frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_w \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_w \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix} \tag{10}$$

1.4 Legame costitutivo

$$\begin{Bmatrix} T_w \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} GA_t & 0 & 0 \\ 0 & EJ_2 & 0 \\ 0 & 0 & JG \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{u,v} \\ \kappa_{u,w} \\ \kappa_u \end{Bmatrix} \tag{11}$$

2 Modello con vincolo interno di indeformabilità a taglio

2.1 Problema cinematico

Il vincolo di indeformabilità a taglio si esprime come $\gamma_{u,v} = 0$ da cui otteniamo:

$$w' = -\varphi_2 \tag{12}$$

Sostituendo la (12), nelle (6) otteniamo il nuovo vettore deformazione $\bar{\epsilon}$:

$$\bar{\epsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \kappa_{u,w} \\ \kappa_u \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -w'' - \frac{\varphi_3}{R} \\ -\frac{w'}{R} + \varphi_3{}' \end{array} \right\} \tag{13}$$

Che può essere posto in forma operatoriale come:

$$\left\{ \begin{array}{c} \kappa_{u,w} \\ \kappa_u \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} -\frac{d^2}{ds^2} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R}\frac{d}{ds} & \frac{d}{ds} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w \\ \varphi_3 \end{array} \right\} \tag{14}$$

2.2 Problema statico

A seguito dell' imposizione del vincolo di indeformabilità a taglio, bisogna condensare il taglio T_w, il quale non è più ricavabile dal legame costitutivo. Per semplicità consideriamo nulli m_2 ed m_3.

Ricaviamo T_w dalla seconda delle (12):

$$T_w = M_2{}' - \frac{M_3}{R} \tag{15}$$

Le nuove equazioni di equilibrio risultano

$$\left\{ \begin{array}{l} -M_2{}'' + \frac{M_3'}{R} = p_w \\ -\frac{M_2}{R} - M_3{}' = 0 \end{array} \right. \tag{16}$$

Che può essere posto in forma operatoriale come:

$$\left[\begin{array}{cc} -\frac{d^2}{ds^2} & \frac{1}{R}\frac{d}{ds} \\ -\frac{1}{R} & -\frac{d}{ds} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} M_2 \\ M_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} p_w \\ 0 \end{array} \right\} \tag{17}$$

2.3 Legame costitutivo

$$\left\{ \begin{array}{c} M_2 \\ M_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} EJ_2 & 0 \\ 0 & GJ \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} k_{uw} \\ k_u \end{array} \right\} \tag{18}$$

2.4 Equazioni di campo

Applicando il metodo degli spostamenti si ottengono le seguenti equazioni di campo:

$$\left\{ \begin{array}{l} EJ_2(w^{IV} + \frac{\varphi_3{}''}{R}) + GJ(-\frac{w''}{R^2} + \frac{\varphi_3{}''}{R}) = p_w \\ EJ_2(\frac{w''}{R} + \frac{\varphi_3}{R^2}) - GJ(-\frac{w''}{R} + \varphi_3{}'') = 0 \end{array} \right. \tag{19}$$

3 Modello con vincolo interno di indeformabilità torsionale

3.1 Problema cinematico

Il vincolo di indeformabilità torsionale si esprime come $k_u = 0$ da cui otteniamo:

$$w' = R\,{\varphi_3}' \Rightarrow w = \int R\,{\varphi_3}'\,ds + c \tag{20}$$

Sostituendo la (20), nelle (13) otteniamo il nuovo vettore deformazione $\bar{\epsilon}$:

$$\bar{\epsilon} = \left\{\ \kappa_{u,w}\ \right\} = \left\{\ -\tfrac{\varphi_3}{R} - R\,{\varphi_3}''\ \right\} \tag{21}$$

Che posto informa operatoriale diventa:

$$\left\{\ \kappa_{uw}\ \right\} = \left[\ -\tfrac{1}{R} \quad -R\tfrac{d^2}{ds^2}\ \right]\left\{\ \varphi_3\ \right\} \tag{22}$$

3.2 Problema statico

A seguito dell' imposizione del vincolo di indeformabilità a torsionale, bisogna condensare il momento torcente M_3, il quale non è più ricavabile dal legame costitutivo.

Ricaviamo M_3 dalla prima delle (16):

$${M_3}' = R\,({M_2}'' + p_w) \tag{23}$$

La nuova equazione di equilibrio risulta

$$-\frac{M_2}{R} - R\,M_2'' = R\,p_w \tag{24}$$

Che può essere posta in forma operatoriale come:

$$\left[\ -\tfrac{1}{R} - R\,\tfrac{d^2}{ds^2}\ \right]\left\{\ M_2\ \right\} = \left\{\ R\,p_w\ \right\} \tag{25}$$

3.3 Legame costitutivo

$$\left\{\ M_2\ \right\} = \left[\ EJ_2\ \right]\left\{\ \kappa_{u,w}\ \right\} \tag{26}$$

3.4 Equazioni di campo

Applicando il metodo degli spostamenti si ottiene la seguente equazione di campo:

$$EJ_2(R^4{\varphi_3}^{IV} + 2{\varphi_3}'' + \frac{\varphi_3}{R^2}) = R\,p_w \tag{27}$$