Risposta forzata di un sistema lineare rappresentato da $P(s)$

$x_0 = 0$ $\qquad P(s) = \dfrac{N_p(s)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)}$ $\qquad u \longrightarrow \boxed{P(s)} \longrightarrow y$

$U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ per es. $U(s) = \dfrac{1}{s}$ gradino $\delta_{-1}(t)$

$U(s) = \dfrac{1}{s+\lambda}$ esponenziale $e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$

$U(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ seno $\sin \omega t$, $t \geq 0$

$U(s) = \dfrac{1}{(s+\lambda)^{k+1}}$ canonica per esponenziale $e^{-\lambda t}\dfrac{t^k}{k!}$, $t \geq 0$

$$\Rightarrow Y(s) = P(s)\,U(s) = \frac{N_p(s)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)}\,U(s)$$

sviluppo in fratti parziali

$$= \frac{R_1}{s+p_1} + \cdots + \frac{R_n}{s+p_n} + (*)$$

sviluppo analogo se i poli non sono tutti distinti

ove si è supposto che i poli siano distinti. $(*)$ rappresenta il termine dello sviluppo relativo a $U(s)$. Ad es se $U(s) = \frac{1}{s}$: $* = \dfrac{R_{n+1}}{s}$.

Antitrasformando
$$y(t) = R_1 e^{-p_1 t} + \cdots + R_n e^{-p_n t} + \mathcal{L}^{-1}[*]$$

Si noti che
$$R_i = \lim_{s \to -p_i} (s+p_i)\,P(s)\,U(s)$$
$$= \lim_{s \to -p_i} \frac{N_p(s)}{(s+p_1)\cdots(s+p_{i-1})(s+p_{i+1})\cdots(s+p_n)}\,U(s)$$

1. Risposta forzata di sistemi del 1° ordine per ingresso a gradino

$$P(s) = \frac{k}{1+\tau s} \qquad \begin{array}{l} k = \text{guadagno} \\ \tau = \text{costante di tempo} \end{array}$$

Per $U(s) = \frac{1}{s}$ si ha

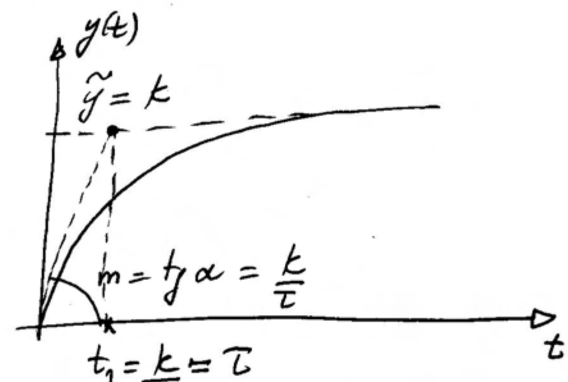
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s(1+\tau s)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_1}{s+\frac{1}{\tau}} + \frac{R_2}{s}\right] \qquad \begin{array}{l} R_1 = -k \\ R_2 = k \end{array}$$

$$= \left(R_1\, e^{-t/\tau} + R_2\right)\delta_{-1}(t) = k\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\delta_{-1}(t)$$

avendo $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \frac{k}{\tau}$.

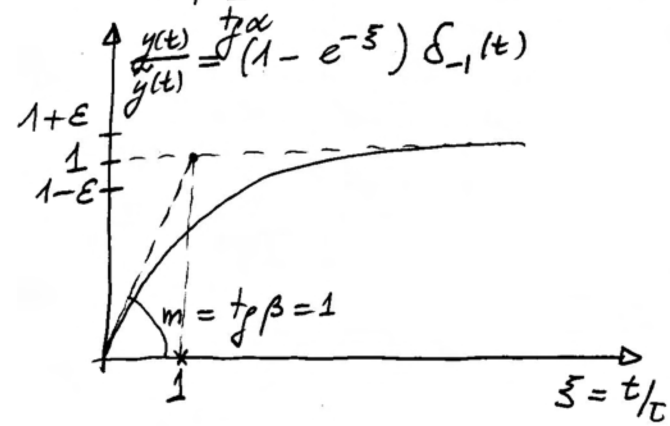
Se $\tau > 0$ e quindi il sistema è A.S.

$$y(t) \rightarrow \tilde{y}(t) = k\,\delta_{-1}(t)$$



e risulta

$$\frac{y(t)}{\tilde{y}(t)} = 1 - e^{-\xi} = 1 - \varepsilon$$



per $e^{-\xi} = e^{-t/\tau} = \varepsilon$

ossia per

$$t = -\tau \ln \varepsilon = \ln \frac{1}{\varepsilon^{\tau}}.$$

Questo valore di t è detto tempo di assestamento.

2. Risposte forzate di sistemi del 2° ordine per ingresso a gradino

2a. Sistemi con solo poli reali e distinti

Sia $P(s) = \dfrac{k}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$ $\qquad k =$ guadagno

$\tau_1, \tau_2 =$ costanti di tempo

Per $U(s) = \frac{1}{s}$ si ha

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_1}{s+\frac{1}{\tau_1}} + \frac{R_2}{s+\frac{1}{\tau_2}} + \frac{R_3}{s}\right]$$

$$= \left(R_1 e^{-t/\tau_1} + R_2 e^{-t/\tau_2} + R_3\right)\delta_{-1}(t)$$

$$R_1 = \frac{k\tau_1}{\tau_2-\tau_1} = -\frac{k\tau_1}{\tau_1-\tau_2}$$

$$R_2 = \frac{k\tau_2}{\tau_1-\tau_2}$$

$$= k\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2} e^{-t/\tau_2}\right)\delta_{-1}(t)$$

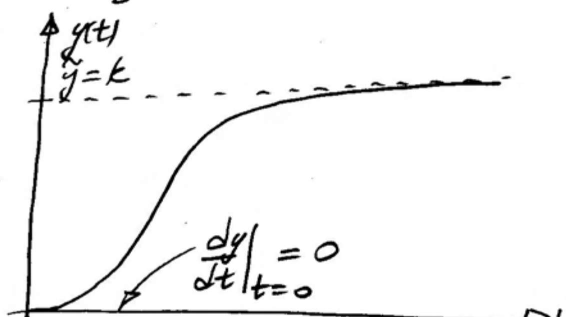
$$R_3 = k$$

con $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

Se $\tau_1, \tau_2 > 0$ il sistema è A.S. e

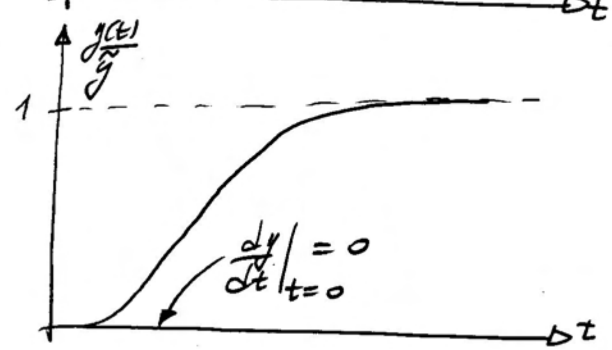
$$y(t) \to \tilde{y}(t) = k\,\delta_{-1}(t)$$

come nel caso precedente. Risulta per $\tau_1 >> \tau_2$



$$y(t) \simeq k\left(1 - 1\, e^{-t/\tau_1}\right)\delta_{-1}(t)$$

come nel caso precedente



2b- Sistemi con solo poli reali coincidenti

Sia $P(s) = \dfrac{k}{(1+\tau s)^2}$ - Si ha

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_1}{(s+\frac{1}{\tau})^2} + \frac{R_2}{s+\frac{1}{\tau}} + \frac{R_3}{s}\right]$$

$$R_1 = \left[\left(s+\frac{1}{\tau}\right)^2 \frac{k}{s(1+\tau s)^2}\right]_{s=-\frac{1}{\tau}} = -\frac{k}{\tau}$$

$$R_2 = \left[\frac{d}{ds}\frac{k}{\tau^2 s}\right]_{s=-\frac{1}{\tau}} = -k$$

$$R_3 = k$$

$$= k\left(1 - e^{-t/\tau} - \frac{1}{\tau} t\, e^{-t/\tau}\right)\delta_{-1}(t)$$

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\left[t\, e^{-\lambda t}\right] = \frac{1}{(s+\lambda)^2}$$

e l'andamento è analogo al caso 2a.

2c- Sistemi con poli reali e uno zero

Se $P(s) = \dfrac{k(1+\tau s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$

k = guadagno

τ_1, τ_2 = costanti di tempo

$\tau \neq \tau_1$ o τ_2.

Ripetendo i calcoli

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k(1+\tau s)}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}\right] = \left(R_1 e^{-t/\tau_1} + R_2 e^{-t/\tau_2} + R_3\right)\delta_{-1}(t)$$

$$R_1 = \frac{k}{\tau_1}\frac{1-\frac{\tau}{\tau_1}}{-\frac{1}{\tau_1}\left(1-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)} = -k\frac{\tau_1-\tau}{\tau_1-\tau_2}$$

$$R_2 = \frac{k}{\tau_2}\frac{1-\frac{\tau}{\tau_2}}{-\frac{1}{\tau_2}\left(1-\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)} = k\frac{\tau_2-\tau}{\tau_1-\tau_2}$$

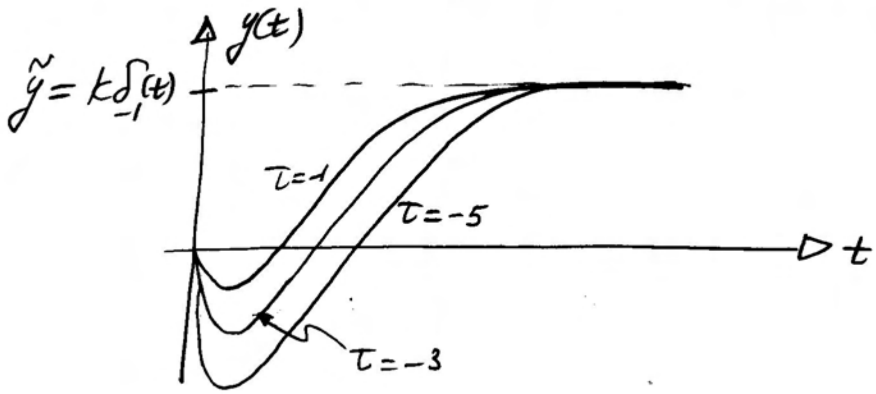
$$R_3 = k$$

$$= k\left(1 - \frac{\tau_1-\tau}{\tau_1-\tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2-\tau}{\tau_1-\tau_2} e^{-t/\tau_2}\right)\delta_{-1}(t)$$

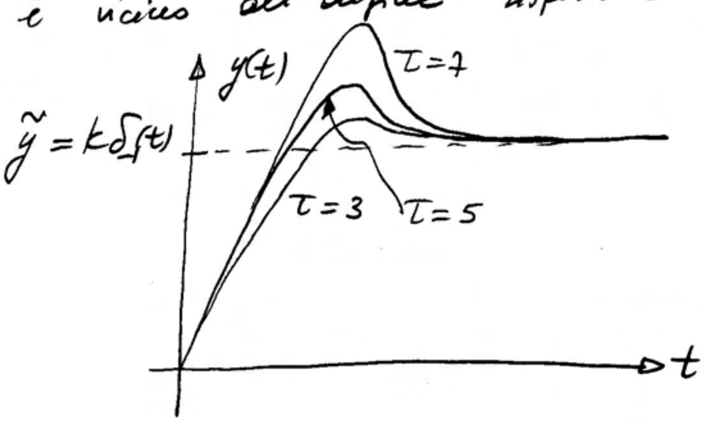
Se $\tau_1, \tau_2 > 0$ il sistema è A.S. Si possono distinguere alcuni sottocasi

I) $\underline{\tau < 0}$ è il caso più interessante in quanto $y(t)$ presenta una sottoelongazione o risposta inversa, tanto più pronunciata quanto più lo zero $-\frac{1}{\tau}$ (positivo) è vicino all'origine, in quanto

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = k\left(\frac{\tau_1+|\tau|}{\tau_1-\tau_2}\frac{1}{\tau_1} - \frac{\tau_2+|\tau|}{\tau_1-\tau_2}\frac{1}{\tau_2}\right) = -\frac{k}{\tau_1\tau_2}|\tau| < 0$$



II) $\underline{\tau > \tau_1 > \tau_2}$ essendo $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = +\frac{k}{\tau_1\tau_2}\tau > 0$ si ha una sovraelongazione, tanto più marcata quanto più lo zero (negativo) è vicino all'origine rispetto ai poli (anch'essi negativi).



III) $\tau \simeq \tau_1 \gg \tau_2$ L'espressione di $y(t)$ può essere approssimata come segue

$$y(t) \simeq k\left(1 - \frac{\tau - \tau_2}{\tau_1 - \tau_2}\, e^{-t/\tau_2}\right)\delta_{-1}(t)$$

$$\simeq k\left(1 - e^{-t/\tau_2}\right)\delta_{-1}(t)$$

come nel caso del primo ordine (ciò è ovvio in quanto lo zero quasi cancella il polo in $s = -\frac{1}{\tau_1}$)

IV) $\tau_1 > \tau > \tau_2$ la risposta è più veloce del caso $P(s) = \dfrac{k}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$ grazie alla presenza dello zero.

V) $\tau_1 > \tau_2 > \tau > 0$ al diminuire di τ, ossia per lo zero $-\frac{1}{\tau}$ sempre più lontano dall'origine, la $y(t)$ tende ad essere quella del caso

$$P(s) = \frac{k}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$$

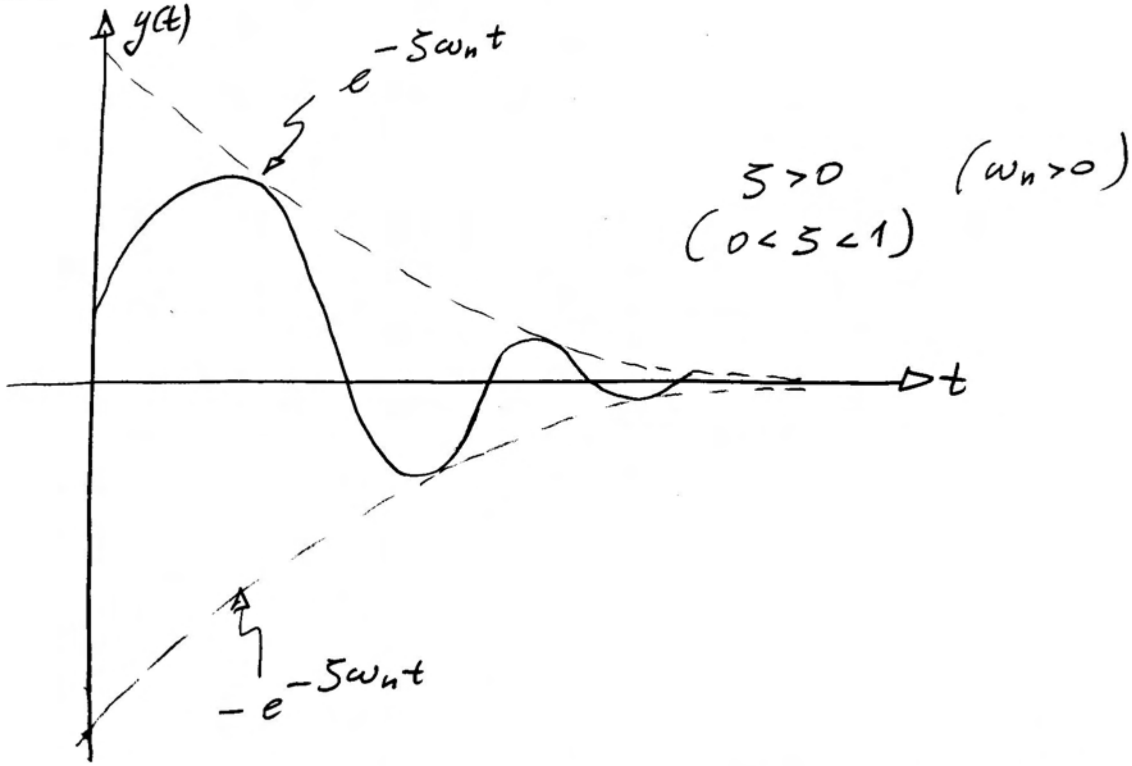
2d- Sistemi con poli complessi coniugati

Se $P(s) = \dfrac{k}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} = \dfrac{k\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

k = guadagno
$\omega_n > 0$ = pulsazione naturale
$|\zeta| < 1$ (smorzamento)

per $U(s) = \frac{1}{s}$ risulta (i calcoli sono lasciati al lettore)

$$y(t) = k\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2} + \arccos(\zeta)\right)\right)\delta_{-1}(t)$$



Se $\zeta<0$ $(-1<\zeta<0)$ gli esponenziali, e quindi $y(t)$, è divergente.

Calcolando $\dfrac{dy}{dt}=0 \Rightarrow t_k = \dfrac{k\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ $\quad k=1,2,3\dots$

ed in corrispondenza:

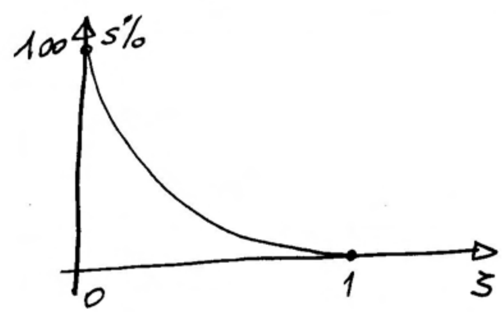
$$y(t_k) = k\left(1-(-1)^k e^{-\zeta k\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}\right).$$

Queste ultime due relazioni permettono di calcolare

$$y_{max} = k\left(1+e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \Rightarrow s\% = 100\, e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

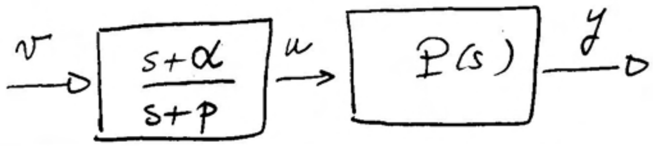
$$t_{max} = t_1 = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T_{periodo} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$



Cancellazione poli-zeri

Se



la risposta forzata vale

$$Y(s) = \frac{s+\alpha}{s+p} P(s) V(s) = \frac{N_P(s)(s+\alpha)}{(s+p)(s+p_1)\cdots(s+p_n)} V(s)$$

$$\overset{\text{sviluppo in fratti parziali}}{=} \frac{R_0}{s+p} + \frac{R_1}{s+p_1} + \cdots + \frac{R_n}{s+p_n} + (\#)$$

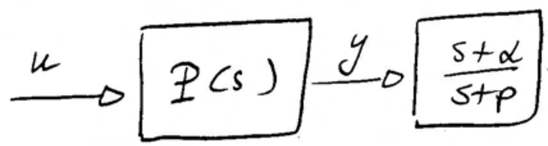
(#) rappresenta il termine relativo a $V(s)$. Antitrasformando

$$y(t) = R_0 e^{-pt} + R_1 e^{-p_1 t} + \cdots + R_n e^{-p_n t} + \mathcal{L}^{-1}[\#]$$

con
$$R_i = \lim_{s \to -p_i} \frac{(s+\alpha)\, N_P(s)}{(s+p_1)\cdots(s+p_{i-1})(s+p_{i+1})\cdots(s+p_n)} V(s)$$

Si noti che se $\alpha = p_i$ (cancellazione) $R_i = 0$, ossia il modo $e^{-p_i t}$ non appare in $y(t)$. Poiché tale modo rimane osservabile da y (l'uscita non è cambiata) si è perso di raggiungibilità.

Analogamente se



$u(t) = R_0 e^{-pt} + R_1 e^{-p_1 t} + \cdots + R_n e^{-p_n t} + \mathcal{L}^{-1}[\#]$.

Se $\alpha = p_i \Rightarrow R_i = 0$. In questo caso non si perde di controllabilità (l'ingresso è sempre u), ma il modo non appare in $y(t)$ perché si perde di osservabilità (in effetti l'uscita non è più y ma u)

Il regime permanente per sistemi A-S.

Sia $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$. Nello studio del regime permanente si vuole vedere se dopo un transitorio l'uscita ha le caratteristiche del solo ingresso (e quindi non dipende più da x_0). Tale uscita vale

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$Y(s) = C(sI-A)^{-1}x_0 + \left(C(sI-A)^{-1}B + D\right)U(s)$$

in cui il denominatore dei due termini a destra sono uguali.

$$Y(s) = \frac{N_\ell(s)}{(s+p_1)\,\text{—}\,(s+p_n)} + \frac{N_F(s)}{(s+p_1)\,\text{—}\,(s+p_n)}\,U(s)$$

ove si è supposto che i poli siano distinti. Espressioni analoghe valgono se i poli non sono tutti distinti. Sviluppando in fratti parziali

$$Y(s) = \frac{R_{\ell 1}}{s+p_1} + \text{—} + \frac{R_{\ell n}}{s+p_n} + \frac{R_1}{s+p_1} + \text{—} + \frac{R_n}{s+p_n} + (*)$$

ove $(*)$ rappresenta il termine dello sviluppo relativo a $U(s)$. Ad esempio

se $u(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \quad * = \dfrac{R_{n+1}}{s-\lambda}$

Antitrasformando

$$y(t) = \underbrace{(R_{\ell 1}+R_1)e^{-p_1 t} + \text{—} + (R_{\ell n}+R_n)e^{-p_n t}}_{y_t \,=\, y_{transitoria}} + R_{n+1}\,e^{\lambda t}$$

ed una volta che il transitorio è esaurito e poiché $Re(-p_i) < 0$

$$y(t) \longrightarrow \tilde{y}(t) = R_{n+1}\,e^{\lambda t}$$

Ma $\quad R_{n+1} = (s-\lambda)\left[C(sI-A)^{-1}x_0 + \left(C(sI-A)^{-1}B+D\right)\frac{1}{s+\lambda}\right]\Bigg|_{s=\lambda}$

$$= C(\lambda I - A)^{-1}B + D =$$

$$= P(\lambda)$$

sicché $\quad \tilde{y}(t) = P(\lambda)\, e^{\lambda t}.$

Analoghi sono i passaggi per $u = U e^{\lambda t}$ a cui corrisponde $\tilde{y} = U P(\lambda)\, e^{\lambda t}$.

Per ingressi sinusoidali, ricordando che $\sin \bar{\omega} t = \dfrac{e^{j\bar{\omega}t} - e^{-j\bar{\omega}t}}{2j} = \dfrac{u_1 - u_2}{2j}$

con $u_1(t) = e^{j\bar{\omega}t}$, $u_2(t) = e^{-j\bar{\omega}t}$ e valendo la sovrapposizione degli effetti si calcola

$$y = \underbrace{(R_{l_1} + R_1)e^{-p_1 t} + \dots + (R_{l_n} + R_n)\, e^{-p_n t}}_{y_t = y_{\text{transitoria}}} + \frac{P(j\bar{\omega})\, e^{j\bar{\omega}t} - P(-j\bar{\omega})\, e^{-j\bar{\omega}t}}{2j}$$

$$= y_t + \frac{1}{2j}\left[(Re + j\,Im)(c + js) - (Re - j\,Im)(c - js)\right]$$

$S = \sin \bar{\omega} t$
$c = \cos \bar{\omega} t$
$Re = Re(P(j\omega))$
$\quad = Re(P(-j\omega))$
$Im = Im(P(j\bar{\omega}))$

$$= y_t + \frac{1}{2j}\left[\cancel{Re\,c} + j\,Re\,s + j\,Im\,c - \cancel{Im\,s} - \cancel{Re\,c} + j\,Re\,s + j\,Im\,c + \cancel{Im\,s}\right]$$

$$= y_t + Re\,s + Im\,c = y_t + \sqrt{Re^2 + Im^2}\left(s \underbrace{\frac{Re}{\sqrt{Re^2+Im^2}}}_{\cos\varphi} + c \underbrace{\frac{Im}{\sqrt{Re^2+Im^2}}}_{\sin\varphi}\right)$$

$$= y_t + |P(j\bar{\omega})| \sin\big(\bar{\omega} t + \underbrace{\angle P(j\bar{\omega})}_{\varphi}\big)$$

e quindi

$$y(t) \longrightarrow \tilde{y}(t) = |P(j\bar{\omega})| \sin\left(\bar{\omega} t + \angle P(j\bar{\omega})\right).$$

Il regime permanente per sistemi generici (anche instabili)

È sempre possibile determinare x_0 di $\begin{array}{ll} \dot{x} = Ax + Bu & u \in \mathbb{R} \\ y = Cx + Du & y \in \mathbb{R} \end{array}$

in modo tale che l'uscita tenda a $\tilde{y} = P(\lambda)e^{\lambda t}$ oppure $\tilde{y} = P(j\bar{\omega}) \sin\left(\bar{\omega}t + \angle P(j\bar{\omega})\right)$

Se $P(s)$ è A-S- basta prendere $x_0 = 0$- Altrimenti x_0 è calcolato imponendo $x(t) = e^{\lambda t} x_0 \Rightarrow \lambda e^{\lambda t} x_0 = \dot{x} = A e^{\lambda t} x_0 + B e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow (\lambda I - A) x_0 = B$$

e tale x_0 esiste se e solo se $\lambda \notin \sigma(A)$ e vale $x_0 = (\lambda I - A)^{-1} B$-

L'uscita allora vale

$$\begin{aligned} y(t) &= C x(t) + D u(t) \\ &= C e^{\lambda t} (\lambda I - A)^{-1} B + D e^{\lambda t} \\ &= \left[C (\lambda I - A)^{-1} B + D\right] e^{\lambda t} \\ &= P(\lambda)\, e^{\lambda t} = \tilde{y}(t) \qquad t \geq 0- \end{aligned}$$

Analoghi sono i passaggi per $u = V e^{\lambda t} \Rightarrow \tilde{y} = V P(\lambda) e^{\lambda t}$-

Per ingressi sinusoidali, ricordando che $\sin \bar{\omega} t = \dfrac{e^{j\bar{\omega}t} - e^{-j\bar{\omega}t}}{2j} = \dfrac{u_1 - u_2}{2j}$ con $u_1(t) = e^{j\bar{\omega}t}$, $u_2(t) = e^{-j\bar{\omega}t}$ e valendo la sovrapposizione degli effetti si calcola

$$x_{01} = (j\bar\omega I - A)^{-1}B \quad \longleftarrow \quad u_1 = e^{j\bar\omega t}$$

$$x_{02} = (-j\bar\omega I - A)^{-1}B \quad \longleftarrow \quad u_2 = e^{-j\bar\omega t}$$

$$x_1 = e^{j\bar\omega t}x_{01} = e^{j\bar\omega t}(j\bar\omega I - A)^{-1}B$$

$$x_2 = e^{-j\bar\omega t}x_{02} = e^{-j\bar\omega t}(-j\bar\omega I - A)^{-1}B$$

$$\frac{y_1 - y_2}{2j} = \frac{1}{2j}\left[Cx_1 + Du_1 - (Cx_2 + Du_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\left(C(j\bar\omega I - A)^{-1}B + D\right)e^{j\bar\omega t} - \left(C(j\bar\omega I - A)^{-1}B + D\right)e^{-j\bar\omega t}\right]$$

$s = \sin\bar\omega t$

$c = \cos\bar\omega t$

$$= \frac{1}{2j}\left[P(j\bar\omega)e^{j\bar\omega t} - P(-j\bar\omega)e^{-j\omega t}\right]$$

$Im(P(j\bar\omega))$

$$= \frac{1}{2j}\left[(Re + j\,Im)(c + js) - (Re - j\,Im)(c - js)\right]$$

$Re(P(j\omega)) = Re(P(-j\omega))$

$$= \frac{1}{2j}\left[\cancel{Re\,c} + \underbrace{j\,Re\,s} + \underline{j\,Im\,c} - \cancel{Im\,s} - \cancel{Re\,c} + \underbrace{j\,Re\,s} + \underline{j\,Im\,c} + \cancel{Im\,s}\right]$$

$$= Re\,s + Im\,c = \sqrt{Re^2 + Im^2}\left(s\underbrace{\frac{Re}{\sqrt{Re^2+Im^2}}}_{\cos\varphi} + c\underbrace{\frac{Im}{\sqrt{Re^2+Im^2}}}_{\sin\varphi}\right)$$

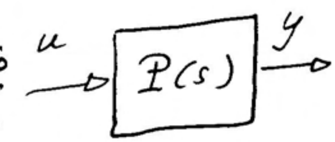
$$= |P(j\omega)|\sin\left(\omega t + \underbrace{\angle P(j\omega)}_{\varphi}\right)$$

Regime permanente per un sistema generico (anche instabile) – II metodo

Vi è un altro metodo per introdurre il regime permanente per sistemi che non sono A.S., senza far riferimento ad un particolare x_0.

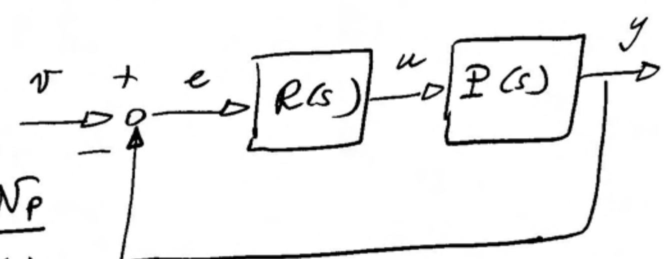
Prima di tutto si deve considerare che data

$$P(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N_P}{D_P}$$



è sempre possibile determinare

$$R(s) = \frac{d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_1 s + d_0}{s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0} = \frac{N_R}{D_R}$$



tale che

$$W(s) = \frac{RP}{1+RP} = \frac{N_R N_P}{D_P D_R + N_P N_R} = \frac{N_R N_P}{d_{CH}(s)}$$

abbia tutti i poli a parte reale negativa. Infatti

$$d_{CH}(s) = (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)(s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_0) + (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0)(d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_1 s + d_0)$$

è un polinomio di grado $2n$ e può essere imposto pari ad uno (sempre di grado $2n$) assegnato a piacere (ovviamente con radici a parte reale negativa)

$$d_{CH}(s) = d^*_{CH}(s) = s^{2n} + \beta_{2n-1} s^{2n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0$$

Si avranno $2n$ equazioni nelle $2n$ incognite, sempre determinabili

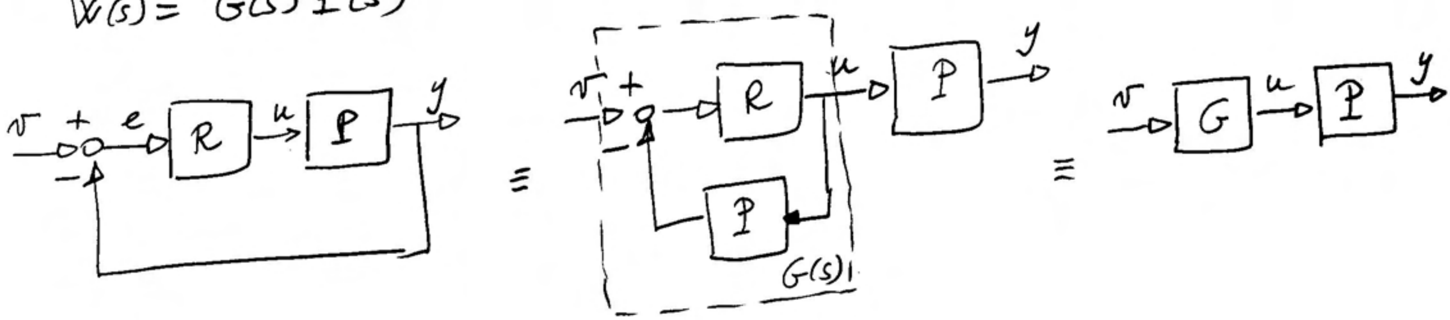
$$a_{n-1} + c_{n-1} = b_{n-1}\, d_{n-1} \qquad (m = n-1)$$

$$\vdots$$

$$a_0 c_0 = b_0 d_0 .$$

Si noti che anche $G(s) = \dfrac{R}{1+RP} = \dfrac{N_R D_P}{d_{CH}(s)}$ ha i poli a parte reale negativa

Ma $W(s) = G(s)\,P(s)$



Se dunque

$$v(t) = \frac{1}{G(\lambda)}\, e^{\lambda t}$$

$$v(t) = \frac{1}{G(j\bar\omega)} \sin\left(\bar\omega t - \angle G(j\bar\omega)\right)$$

esaurito il transitorio

$$u(t) \to \tilde u(t) = e^{\lambda t}$$

$$u(t) \to \tilde u(t) = \sin \bar\omega t$$

che esistono poiché $G(s)$ è A-S. Essendo anche $W(s)$ A-S.

anche

$$y(t) \to P(\lambda)\, e^{\lambda t} = \tilde y(t)$$

$$y(t) \to |P(j\bar\omega)| \sin\left(\bar\omega t + \angle P(j\omega)\right) = \tilde y(t) .$$

Zeri di un sistema con un ingresso e una uscita

La risposta di un sistema lineare $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

ad $u = V e^{\lambda t}$ con $\lambda \notin \sigma(A)$, vale

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[P(s)\, v(s) \right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{N_P}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)}\, V \frac{1}{s-\lambda} \right] =$$

$$= R_1 e^{-p_1 t} + \cdots + R_n e^{-p_n t} + V R_{n+1} e^{\lambda t}, \qquad R_{n+1} = \lim_{s \to \lambda} P(s) = P(\lambda)$$

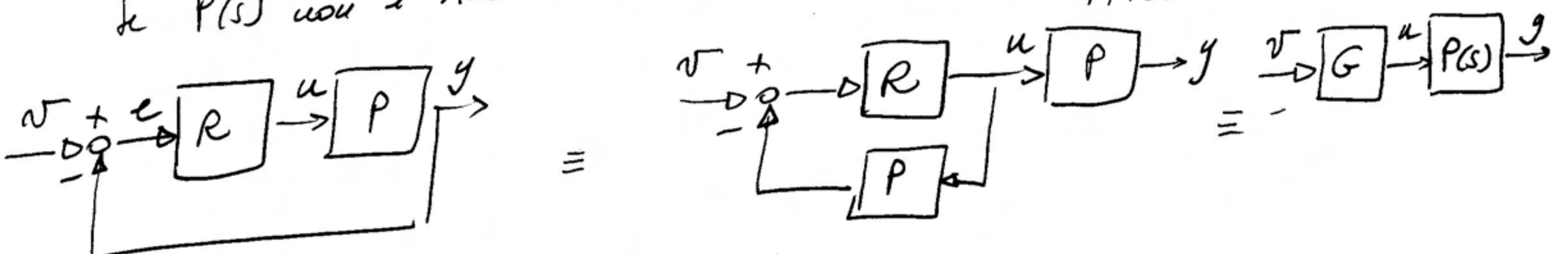
e se $P(s)$ è A.S.

$$y(t) \to P(\lambda)\, V e^{\lambda t} = \tilde{y}(t)$$

ed è indipendente da x_0. Qui $\lambda \gtrless 0$, ma il caso interessante è $\lambda \geq 0$

ovvero $\lambda < 0$ ma ben più piccolo in modulo di $\lambda_i \in \sigma(A)$.

Se $P(s)$ non è A.S. si prende $R(s)$ / $W(s) = \dfrac{RP}{1+RP}$ è A.S.



con $G = \dfrac{R}{1+RP}$ A.S. se si prende

$$v = \frac{V}{G(\lambda)} e^{\lambda t}, \quad \lambda \notin \sigma(G) \cup \sigma(A)$$

per l'A.S. di $G(s)$ e $W(s)$

$u \to \tilde{u} = V e^{\lambda t}$ $\qquad y \to \tilde{y}(t) = P(\lambda)\, V e^{\lambda t}$ indipendente da x_0.

Ovviamente se λ coincide con uno zero di $P(s)$ risulta $P(\lambda) = 0$ e quindi $y \to \tilde{y} = 0$ - Questa è la proprietà bloccante degli zeri.