

Capitolo 2

La stabilità interna

2.1 La proprietà di stabilità dei punti di equilibrio

Il problema della stabilità interna è relativo a proprietà delle evoluzioni nello spazio di stato della soluzione $x(t)$ dell'equazione differenziale $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. La teoria della stabilità ha un ruolo particolarmente importante nello studio dei sistemi dinamici e costituisce un complesso di metodi di *analisi qualitativa*, ossia di metodi che permettono di studiare le proprietà delle soluzioni *senza* necessitare il loro calcolo.

I teoremi dovuti al matematico ed ingegnere russo Lyapunov (1892) forniscono condizioni sufficienti per la stabilità di un punto di equilibrio. Non dicono se queste condizioni sono anche necessarie, anche se esistono teoremi che affermano, anche se solo da un punto di vista concettuale, che in realtà sono condizioni anche necessarie. Questi teoremi consentono dunque di stabilire delle proprietà delle soluzioni dell'equazione $\dot{x} = f(t, x)$ senza doverle risolvere, in particolare le proprietà di *limitatezza* e di *comportamento asintotico*.

Possono essere studiati gli effetti sulle traiettorie del sistema di tipi di perturbazione. Un primo caso di perturbazione è quello dello stato iniziale. Infatti se $x(t)$ è la soluzione di

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

si potrebbe voler studiare se la soluzione di

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 + \Delta x_0$$

con $x_0 + \Delta x_0$ “vicino” a x_0 , si mantiene prossima a $x(t)$ per $t \geq t_0$, e se tende a coincidere con $x(t)$ per $t \rightarrow \infty$. In altre parole si può voler studiare l'effetto della perturbazione Δx_0 sulla soluzione $x(t)$.

Se poi la funzione f dipende anche dall'ingresso $u(t)$

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

e si considera una perturbazione dell'ingresso, ossia si considera l'ingresso $u(t) + \Delta_u(t)$, con $\Delta_u(t)$, appartenente ad una classe prefissata, una perturbazione non nulla per $t \in [t_0, t_1]$ e nulla per $t \geq t_1$, si potrebbe voler studiare se la soluzione si mantiene prossima a $x(t)$ per $t \geq t_0$ e se tende a $x(t)$ per $t \rightarrow \infty$, ossia si può voler studiare l'effetto della perturbazione $\Delta_u(t)$ sulla soluzione $x(t)$.

Infine si potrebbe voler studiare come varia la soluzione dell'equazione differenziale al variare di qualcuno dei suoi parametri, ossia la stabilità strutturale. Può accadere infatti che a seguito di perturbazione anche piccole dei parametri la soluzione risulti molto diversa da quella corrispondente ai valori nominali. In tal caso si dice che il sistema non è strutturalmente stabile. Un tale studio permette di interpretare fenomeni reali complessi che, a seguito di piccole modifiche parametriche, danno luogo a cambiamenti catastrofici o a comportamenti caotici. Dunque anche in questo caso si può voler studiare l'effetto delle perturbazioni parametriche sulla soluzione $x(t)$.

Nel seguito si studieranno solo perturbazioni dello stato iniziale. Riferendosi all'equazione $\dot{x} = f(t, x, u)$, si definisce *coppia di equilibrio* (x_e, u_e) , con u_e costante, quella coppia stato-ingresso (costante) tale che

$$x(t) \Big|_{\substack{x_0=x_e \\ u=u_e}} = \varphi(t, t_0, x_e, u_e) = x_e, \quad \forall t \geq t_0$$

ovvero

$$0 = f(t, x_e, u_e).$$

Senza perdita di generalità si può supporre che $(x_e, u_e) = (0, 0)$. Infatti se così non fosse si potrebbero considerare le quantità

$$\xi = x - x_e, \quad \mu = u - u_e$$

per cui

$$\dot{\xi} = f(t, x, u) \Big|_{\substack{x=\xi+x_e \\ u=\mu+u_e}} = \tilde{f}(t, \xi, \mu)$$

e si avrebbe in corrispondenza della coppia $(\xi_e, \mu_e) = (0, 0)$ che

$$0 = \tilde{f}(t, 0, 0) = f(t, x_e, u_e).$$

Inoltre, più in generale, l'origine può essere la traslazione di una traiettoria non nulla del sistema che corrisponde ad un certo ingresso. Se infatti $\bar{x}(t)$ è la soluzione di $\dot{x} = f(t, x, u)$ definita per $t \geq t_0$, e che corrisponde alla funzione di ingresso $\bar{u}(t)$, si considera il cambio di variabile

$$\xi = x(t) - \bar{x}(t), \quad \mu = u(t) - \bar{u}(t), \quad \tau = t - t_0$$

sicché

$$\dot{\xi} = f(t, x, u) \Big|_{\substack{t=\tau+t_0 \\ x=\xi+\bar{x}(t) \\ u=\mu+\bar{u}(t)}} - f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \Big|_{t=\tau+t_0} = \tilde{f}(\tau, \xi, \mu).$$

Ovviamente

$$\tilde{f}(\tau, 0, 0) = f(\tau + t_0, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(\tau + t_0, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0, \quad \forall \tau \geq 0$$

e dunque la coppia $(0, 0)$ è di equilibrio.

Come noto, nel caso di sistemi non autonomi la soluzione $x(t)$ dipenderà da t e da t_0 , e non da $t - t_0$ come per i sistemi stazionari.

Poiché siamo interessati allo studio dell'effetto delle perturbazioni dello stato iniziale, faremo riferimento nel seguito al sistema

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

e si studierà la stabilità dei punti di equilibrio x_e definiti come quegli stati x_e tali che

$$x(t) \Big|_{x_0=x_e} = x_e, \quad \forall t \geq t_0$$

ovvero

$$0 = f(t, x_e)$$

o alternativamente faremo riferimento nel seguito al sistema

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0$$

e ci si riferirà al caso $u_e = 0$, ossia

$$x(t) \Big|_{\substack{x_0=x_e \\ u=0}} = \varphi(t, t_0, x_e, 0) = x_e, \quad \forall t \geq t_0$$

ovvero

$$0 = f(t, x_e, 0).$$

Gli stati di equilibrio sono quindi traiettorie degeneri date da $\{x_e\}$.

Definizione 1. Uno stato di equilibrio x_e di $\dot{x} = f(t, x)$ è *stabile* se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_{\varepsilon, t_0}$ tale che se $\|x_0 - x_e\| < \delta_{\varepsilon, t_0}$ allora $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon$, per ogni $t \geq t_0$. Se δ_ε non dipende da t_0 si ha la *stabilità uniforme* rispetto al tempo. Lo stato di equilibrio è *instabile* se non è stabile. $\square$

Poiché si considera $u_e = 0$, la definizione significa che se si perturba lo stato iniziale, l'evoluzione libera perturbata, ossia la soluzione di $\dot{x} = \tilde{f}(t, x_e, 0)$, $x(t_0) = x_0$, rimane nell'intorno di x_e , ossia della soluzione di $\dot{x} = \tilde{f}(t, x_e, 0)$, $x(t_0) = x_e$. Non si richiede però che l'evoluzione perturbata tenda a x_e .

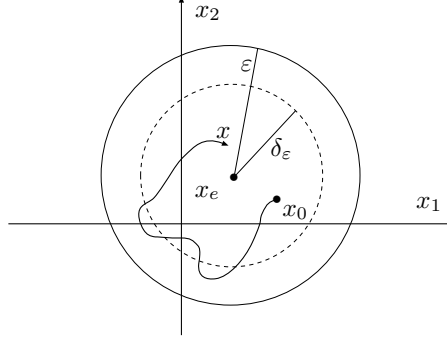


Figura 1 – Definizione di stabilità di un punto d'equilibrio

È ovvio che deve essere $\delta_{\varepsilon, t_0} \leq \varepsilon$ poiché $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon$ deve valere anche per $t = t_0$. Si noti inoltre che quando x_e è instabile esiste un ε arbitrariamente piccolo per il quale non esiste alcun δ_ε . In altre parole è possibile scegliere una sequenza $\{x_{0n}\}$ tendente ad x_e di punti iniziali ed una sequenza $\{t_n\}$ di istanti tali che

$$\|x(t_0 + t_n; t_0, x_{0n}) - x_e\| \geq \varepsilon, \quad \forall n,$$

ove si è indicato con $x(t_0 + t_n; t_0, x_{0n})$ la soluzione dell'equazione avendo (t_0, x_{0n}) come punto iniziale. Si noti che *potrebbe ancora avvenire che le soluzioni tendano a x_e per t tendente all'infinito*. Effettivamente la definizione di stabilità richiede la limitatezza delle traiettorie per ogni istante di tempo, sicché se si ha instabilità, ossia illimitatezza della traiettoria per ogni intorno dell'origine, al tempo t_0 ciò non significa che per tempi iniziali successivi $\bar{t}_0 > t_0$ si debba avere instabilità.

Definizione 2. Un punto di equilibrio x_e di $\dot{x} = f(t, x)$ è *asintoticamente stabile* se è stabile e se esiste un $\bar{\delta}_{t_0}$ tale che se $\|x_0 - x_e\| < \bar{\delta}_{t_0}$ allora $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$. Quest'ultima proprietà si chiama *attrattività* o *quasi-stabilità asintotica*.

Uno stato si dice *globalmente asintoticamente stabile* se è stabile e se inoltre per ogni stato iniziale x_0 risulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0. \quad \square$$

L'attrattività è una proprietà asintotica di convergenza a x_e . Essa è indipendente dalla proprietà di stabilità, che è una *proprietà di limitatezza per ogni $t \geq t_0$* , ossia si può avere attrattività, anche se x_e non è stabile. L'attrattività significa che per ogni $\eta > 0$, esiste un t_{a, η, t_0} tale che risulta $\|x(t) - x_0\| < \eta$. Se sia $\bar{\delta}$ che $(t_a - t_0)$ non dipendono da t_0 , si parla di *attrattività uniforme*.

Esempio. Si consideri il seguente sistema, che mostra come si può avere contemporaneamente instabilità ed attrattività del punto d'equilibrio

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)} \\ \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)} \end{pmatrix} = f(x).$$

L'origine è un punto d'equilibrio. Inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{(2x_1x_2 - 3x_1^2)\Delta - \Delta_{x_1}(x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5)}{\Delta^2} & \frac{(x_1^2 + 5x_2^4)\Delta - \Delta_{x_2}(x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5)}{\Delta^2} \\ \frac{-2x_2^2\Delta - \Delta_{x_1}x_2^2(x_2 - 2x_1)}{\Delta^2} & \frac{(-4x_1x_2 + 3x_2^2)\Delta - \Delta_{x_2}x_2^2(x_2 - 2x_1)}{\Delta^2} \end{pmatrix}$$

ove

$$\Delta = (x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2), \quad \Delta_{x_1} = 2x_1(1 + 3(x_1^2 + x_2^2)^2), \quad \Delta_{x_2} = 2x_2(1 + 3(x_1^2 + x_2^2)^2)$$

e dunque in un intorno del punto d'equilibrio $\frac{\partial f}{\partial x}$ non è limitata in norma e quindi f è non Lipschitz. Ciò comporta che la soluzione non è unica. Però $f(x)$ è continua e questo implica che la soluzione esiste, almeno localmente ossia fino ad un certo tempo $t + \delta$. In realtà la soluzione non ha punti di fuga al finito. Per vedere la continuità di $f(x)$ si noti che l'unica cosa che si deve studiare è se per $x = 0$ la funzione va o meno all'infinito. A tal fine si considerano le coordinate polari

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \vartheta = \arctan \frac{x_2}{x_1}$$

sicché

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)} = x_1^3 \frac{\tan \vartheta - 1 + x_2^2 \tan^3 \vartheta}{\rho^2(1 + \rho^4)} \\ &= \rho^3 \frac{\cos \vartheta}{1 + \tan^2 \vartheta} \frac{\tan \vartheta - 1 + \rho^2 \frac{\tan^5 \vartheta}{1 + \tan^2 \vartheta}}{\rho^2(1 + \rho^4)} = \pm \rho \frac{(1 + \tan^2 \vartheta)(\tan \vartheta - 1) + \rho^2 \tan^5 \vartheta}{\sqrt{1 + \tan^2 \vartheta} (1 + \tan^2 \vartheta)^2 (1 + \rho^4)} \\ f_2(x) &= \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)} = x_1^3 \frac{\tan^3 \vartheta - 2 \tan^2 \vartheta}{\rho^2(1 + \rho^4)} \\ &= \rho^3 \frac{\cos \vartheta}{1 + \tan^2 \vartheta} \frac{\tan^2 \vartheta (\tan \vartheta - 2)}{\rho^2(1 + \rho^4)} = \pm \rho \frac{\tan^2 \vartheta (\tan \vartheta - 2)}{\sqrt{1 + \tan^2 \vartheta} (1 + \tan^2 \vartheta) (1 + \rho^4)} \end{aligned}$$

essendo

$$x_1 = \rho^2 \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} = \rho^2 \frac{1}{1 + \tan^2 \vartheta}, \quad x_2 = \rho^2 \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = \rho^2 \frac{\tan^2 \vartheta}{1 + \tan^2 \vartheta}, \quad x_1 = \rho \cos \vartheta = \pm \frac{\rho}{\sqrt{1 + \tan^2 \vartheta}}.$$

Ovviamente quando x_1, x_2 tendono a zero ρ tende a zero, mentre ϑ , e quindi $\tan \vartheta$, non tende ad un valore costante, in quanto tale valore dipende dal percorso compiuto per avvicinarsi all'origine. Pertanto

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} f_1(x) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} f_2(x) = 0.$$

Dunque $f_1(x), f_2(x)$ tendono a valori finiti qualunque sia il percorso attraverso il quale x tende all'origine. Pertanto $f(x)$ è continua in x .

Il coefficiente angolare della traiettoria risulta

$$m(x) = \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}$$

e cambia di segno lungo le curve $x_2 = 0$, $x_2 = 2x_1$, $x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5 = 0$ che annullano il numeratore e denominatore. In particolare la terza curva, indicata con γ , nel primo quadrante risulta essere sempre al di sotto della curva $x_2 = x_1$. Inoltre sulla retta $x_2 = 2x_1$ si ha $m(x) = 0$, mentre sulla curva γ risulta $m(x) = \infty$. Il semipiano in alto si può allora suddividere in tre parti

- 1) una a sinistra della curva $x_2 = 2x_1$, in cui numeratore e denominatore sono positivi (ossia in cui $\dot{x}_2 > 0$ e $\dot{x}_1 > 0$) e quindi $m > 0$;
- 2) una tra la curva $x_2 = 2x_1$ e la curva γ , in cui il numeratore è negativo e il denominatore è positivo (ossia in cui $\dot{x}_2 < 0$ e $\dot{x}_1 > 0$) e quindi $m < 0$;
- 3) una a destra della curva γ , in cui numeratore e denominatore sono negativi (ossia in cui $\dot{x}_2 < 0$ e $\dot{x}_1 < 0$) e quindi $m > 0$.

Il risultato è che le traiettorie che partono a sinistra della curva $x_2 = 2x_1$ inizialmente divergono. Poi devono attraversare la curva $x_2 = 2x_1$ e quindi entrare nella zona in cui il coefficiente angolare è negativo. Infine devono attraversare la curva γ e quindi tendere a zero in quanto $\dot{x}_2 < 0$, $\dot{x}_1 < 0$.

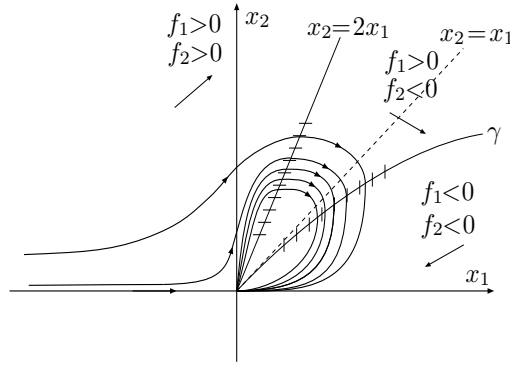


Figura 2 – Instabilità con attrattività del punto d'equilibrio

Un discorso analogo vale per il semipiano in basso essendo il sistema invariante rispetto alla trasformazione $z_1 = -x_1$, $z_2 = -x_2$.

Si comprende ora come mai la funzione $f(x)$ non è Lipschitz: per garantire che la traiettoria possa ritornare all'origine ci deve essere la non univocità della soluzione. In effetti $x \equiv 0$ è soluzione dell'equazione differenziale $\square$

La proprietà di stabilità asintotica garantirà la limitatezza delle traiettorie e che a seguito di una perturbazione dello stato iniziale l'evoluzione ritornerà, dopo un certo tempo, verso lo stato d'equilibrio. Si ricorda che ha senso studiare la stabilità asintotica di un certo stato d'equilibrio solo se esso è isolato, ossia non è punto di accumulazione di altri stati di equilibrio.

Supposta $f \in C^1(D)$, D dominio contenente x_e , una condizione sufficiente perché x_e sia isolato è che lo jacobiano $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e}$ sia non singolare.

Infatti considerato che in un intorno di x_e la dinamica del sistema può essere descritta dalla dinamica di $\xi = x - x_e$, data da¹

$$\dot{\xi} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e} \xi.$$

Se per assurdo $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e}$ fosse non singolare ed esistesse un altro punto di equilibrio $x'_e \neq x_e$ tale che

$$0 = f(t, x'_e)$$

posto $\xi = x'_e - x_e$ si avrebbe

$$\dot{\xi} = 0 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e} (x'_e - x_e)$$

e ciò è possibile se e solo se $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e}$ è singolare. Ma ciò contraddice il fatto che $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e}$ è non singolare, per cui non può esistere un tale x'_e ed x_e è isolato. Si noti che può però accadere che x_e sia isolato e che $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e}$ sia singolare, come nel caso del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \end{aligned}$$

ove

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¹ Si veda il metodo indiretto di Lyapunov.

e $x_e = 0$ è l'unico stato di equilibrio.

Come visto il δ_ε dipenderà in generale da t_0 . Si noti che il fatto che per ogni t_0 esista un $\delta_{\varepsilon, t_0}$ opportuno non assicura che esista un δ_ε che dipende solo da ε e che valga per ogni t_0 . Inoltre anche la proprietà di attrattività della stabilità asintotica di un punto d'equilibrio può dipendere da t_0 , in quanto il $\bar{\delta}$ potrà in generale dipendere da t_0 . Questi fatti sono illustrati dai seguenti esempi.

Esempio. Sia $\dot{x} = (6t \operatorname{sen} t - 2t)x$. La sua soluzione si ricava calcolando

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^t (6t \operatorname{sen} t - 2t) dt = [-6t \cos t]_{t_0}^t + \int_{t_0}^t 6 \cos t dt - 2 \int_{t_0}^t t dt$$

$$\begin{array}{ccc} u=6t, & du=6dt \\ dv=\operatorname{sen} t dt, & v=-\cos t \end{array}$$

per cui

$$\ln \frac{x(t)}{x_0} = -6t \cos t + 6t_0 \cos t_0 + 6(\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t_0) - t^2 + t_0^2 = -t^2 - 6t \cos t + 6 \operatorname{sen} t + \alpha(t_0)$$

ove

$$\alpha(t_0) = t_0^2 + 6t_0 \cos t_0 - 6 \operatorname{sen} t_0.$$

Dunque

$$x(t) = x_0 e^{\alpha(t_0)} e^{-t^2 - 6t \cos t + 6 \operatorname{sen} t}$$

L'andamento di $x(t)$ è mostrato in figura per $x_0 = 0.1$; si vede anche l'andamento dell'argomento dell'esponenziale.

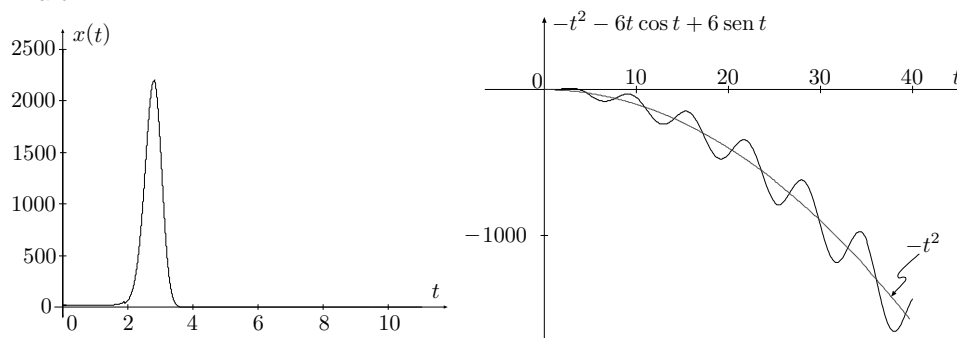


Figura 3 – Andamento delle funzioni $x(t) = x_0 e^{\alpha(t_0)} e^{-t^2 - 6t \cos t + 6 \operatorname{sen} t}$ e $-t^2 - 6t \cos t + 6 \operatorname{sen} t$

Per qualsiasi t_0 il termine $-t^2$ finirà per predominare e quindi l'esponenziale è limitato $\forall t \geq t_0$ da una costante $c(t_0)$, ossia

$$|x(t)| < |x_0| c(t_0), \quad \forall t \geq t_0.$$

Dunque $\forall \varepsilon > 0$, preso $\delta_{\varepsilon, t_0} = \varepsilon / c(t_0)$, se $|x_0| < \delta_{\varepsilon, t_0}$ ne segue che $|x(t)| < \varepsilon$. Pertanto x_e è stabile. Si supponga ora di prendere $t_0 = 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$ e di considerare il valore di $x(t)$ in $t = t_0 + \pi$

$$x(t_0 + \pi) = x((2k+1)\pi) = x_0 e^{\alpha(t_0) - \alpha(t)} = x_0 e^{(4k+1)(6-\pi)\pi}$$

in quanto

$$\begin{aligned} \alpha(t_0) &= \alpha(2k\pi) = 4k^2\pi^2 + 12k\pi \\ -\alpha(t) &= -\alpha(t_0 + \pi) = -\alpha((2k+1)\pi) = -(2k+1)^2\pi^2 + 6(2k+1)\pi \\ \alpha(t_0) - \alpha(t) &= -4k\pi^2 - \pi^2 + 24k\pi + 6\pi = (4k+1)(1-\pi)\pi. \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{x(t)}{x_0} = e^{(4k+1)(6-\pi)\pi} \rightarrow \infty \text{ per } k \rightarrow \infty$$

Pertanto fissato un $\forall \varepsilon > 0$, non esiste un δ_ε indipendente da t_0 tale che $\frac{|x(t)|}{x_0} < \varepsilon$. $\square$

Esempio. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = -\frac{x}{t+1}$$

per il quale si trova che

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = - \int_{t_0}^t \frac{dt}{t+1}$$

e quindi

$$\ln \frac{x}{x_0} = - \ln \frac{t+1}{t_0+1} = \ln \frac{t_0+1}{t+1}$$

ossia

$$x(t) = x_0 \frac{t_0+1}{t+1}.$$

Poiché $t \geq t_0$, si ha sempre $|x(t)| \leq |x_0|$, cioè $x_e = 0$ è stabile. Inoltre $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, ossia x_e è stabile asintoticamente. Vediamo se la convergenza a $x_e = 0$ è uniforme. Fissato un $\forall \varepsilon > 0$, il limite precedente ci dice che esiste un T_{ε, t_0} tale che per $t > T_{\varepsilon, t_0}$ si ha $|x(t)| < \varepsilon$, $\forall t \geq t_0 + T_{\varepsilon}$. La quantità T_{ε, t_0} dipende effettivamente da t_0 , in quanto

$$|x(t)| = |x_0| \frac{t_0+1}{t+1} < \varepsilon \quad \text{per} \quad t > \frac{|x_0|}{\varepsilon}(t_0+1) - 1 = T_{\varepsilon, t_0}$$

ed inoltre non esiste una costante $\bar{T}_\varepsilon$ valida per ogni t_0 in quanto $T_{\varepsilon, t_0} \rightarrow \infty$ per $t_0 \rightarrow \infty$. $\square$

Dunque la non uniformità rispetto al tempo al tempo può apparire sia nello studio della stabilità sia in quello dell'attrattività.

Definizione 3. Un punto d'equilibrio x_e di $\dot{x} = f(t, x)$ è *esponenzialmente stabile*² se esistono due costanti $k, \lambda > 0$ tali che

$$\|x(t) - x_e\| \leq k \|x_0 - x_e\| e^{-\lambda(t-t_0)}$$

per ogni $x_0 \in B_{x_e, r} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_e\| \leq r\}$, e per ogni $t \geq t_0 \geq 0$. La costante λ è detta *rateo di convergenza*.

Se questa proprietà vale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$, x_e è *globalmente esponenzialmente stabile*. $\square$

Si noti che dalla definizione di stabilità esponenziale si ha che $x(t) \rightarrow x_e$, ma non è detto che $x(t)$ tenda a x_e con legge esponenziale; si afferma solo che vi tende con legge maggiorabile da un esponenziale.

La stabilità esponenziale *implica* quella asintotica uniforme.

Infatti poiché se $\|x_0 - x_e\| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k}$ allora

$$\|x(t) - x_e\| \leq k \|x_0 - x_e\| e^{-\lambda(t-t_0)} < k \delta_\varepsilon = \varepsilon.$$

Si noti che δ_ε non dipende da t_0 , ossia x_e è stabile uniformemente. Inoltre fissato il valore ε , poiché $e^{-\lambda(t-t_0)} \rightarrow 0$ si ha che se $\|x_0 - x_e\| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k}$ allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0.$$

² La stabilità esponenziale viene assunta essere uniforme rispetto a t_0 .

Si noti che, poiché per $t = t_a$ si ha

$$\|x(t_a) - x_e\| < \varepsilon e^{-\lambda(t_a - t_0)} = \eta,$$

questo equivale a dire che $\forall \eta > 0$ si ha $\|x(t) - x_e\| < \eta$ per $t > t_a = t_0 - \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\eta}{\varepsilon}$. Quindi $\bar{\delta} = \delta_\varepsilon$ e $(t_a - t_0)$ non dipendono da t_0 e pertanto x_e è anche attrattivo uniformemente.

Si mostrerà in seguito che per una rappresentazione lineare

$$\dot{x} = f(t, x) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0$$

la stabilità esponenziale *equivale* alla stabilità asintotica.

Invece di fare riferimento a quella particolare traiettoria che è il punto di equilibrio x_e , ci si può riferire alla traiettoria $x(t)$, soluzione di $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, e introdurre la nozione di stabilità di un moto.

Definizione 4. Un moto $\mathcal{M}$ è stabile se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_{\varepsilon, t_0}$ tale che se $\|\hat{x}_0 - x_0\| < \delta_{\varepsilon, t_0}$ allora

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

essendo $\hat{x}(t)$ la soluzione di $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = \hat{x}_0$. □

In altre parole un moto è stabile se per piccole perturbazioni di $x(t_0)$, l'evoluzione perturbata $\hat{x}(t)$ rimane vicina in *ogni* istante a $x(t)$, pur potendo essere percorse con leggi temporali diverse; l'importante è che $\|x(\bar{t}) - \hat{x}(\bar{t})\| < \varepsilon$ ad ogni istante $\bar{t} \geq t_0$.

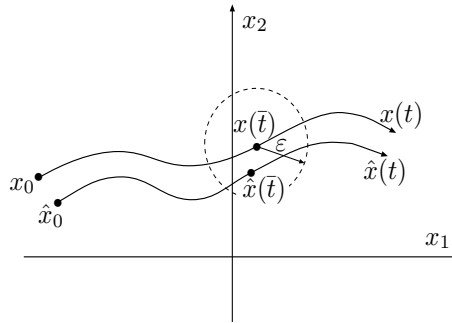


Figura 4 – Stabilità di un moto

Se $\bar{x}(t)$ è una traiettoria fissata, che soddisfa l'equazione

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(t, \bar{x}(t))$$

e $x(t)$ è la soluzione dell'equazione

$$\dot{x} = f(t, x)$$

posto $\xi = x(t) - \bar{x}(t)$ si ha

$$\dot{\xi} = f(t, x) \Big|_{x=\xi+\bar{x}} - f(t, \bar{x}) = f(t, \xi + \bar{x}) - f(t, \bar{x}) = \phi(t, \xi)$$

in quanto $\bar{x}(t)$ è una funzione nota del tempo. Si noti che $\xi_e = 0$ è uno stato di equilibrio. Lo studio dunque della stabilità di un moto si riduce a quello dell'origine di un nuovo sistema che in generale è non stazionario, anche se l'equazione differenziale di partenza è stazionaria.

2.2 Il metodo diretto di Lyapunov

Nella definizione di stabilità e in quella di stabilità asintotica una richiesta implicita è che le soluzioni di $\dot{x} = f(t, x)$ siano definite per ogni $t \geq t_0$, e ciò sarà assicurato dalla locale lipschizianità della funzione f , che di per sé non è sufficiente ad assicurare che $x(t)$ esista globalmente, e da ipotesi aggiuntive necessarie ai teoremi di Lyapunov³.

L'idea di introdurre una funzione scalare dello stato e di valutarne la variazione lungo il moto per trarre informazioni sulla stabilità di uno stato d'equilibrio, è legata a considerazioni di carattere energetico. Infatti le proprietà di stabilità dell'origine dello spazio di stato possono essere dedotte dall'analisi della funzione energia e della sua derivata lungo il moto. Però per sistemi complessi è difficile valutare la funzione energia.

Si consideri ad esempio la rete elettrica in figura, in cui L e C sono costanti, mentre la resistenza è una funzione non lineare dell'intensità di corrente i .

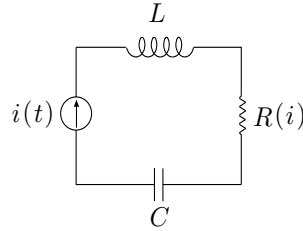


Figura 5 – Rete elettrica RLC

Assumendo come variabili di stato la carica $x_1 = q$ e l'intensità di corrente $x_2 = i = \dot{q}$ nel circuito, l'equazione che descrive il sistema è

$$-L \frac{di}{dt} - R(i)i - v_c = 0, \quad C = \frac{q}{v_c}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{1}{L}R(x_2)x_2. \end{aligned}$$

Questa è una rappresentazione differenziale non lineare. Si voglia ora studiare la stabilità dell'origine dello spazio di stato associato a tale rappresentazione. A tal fine si consideri la funzione che rappresenta l'energia immagazzinata nel circuito

$$E(x) = \frac{1}{2}Cv_c^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2C}x_1^2 + \frac{1}{2}Lx_2^2.$$

Essa è definita positiva, com'è ovvio essendo una funzione energia, e la sua derivata lungo il moto è

$$\dot{E} = \frac{1}{C}x_1\dot{x}_1 + Lx_2\dot{x}_2 = -R(x_2)x_2^2.$$

Si vede allora che se $R(x_2)$ è positiva per ogni x_2 , allora l'energia decresce lungo ogni traiettoria non identicamente nulla, e tende dunque a zero per t tendente all'infinito. In tal caso lo stato tende all'origine dello spazio di stato, che quindi risulta essere un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

Se invece $R(x_2)$ è nulla per ogni x_2 , ossia se il sistema non presenta dissipazioni, l'energia rimane costante e le traiettorie nello spazio di stato sono ellissi, e l'origine risulta essere un punto d'equilibrio (semplicemente) stabile.

Se infine $R(x_2)$ è negativa per ogni x_2 , ossia se la rete è un circuito attivo, l'energia aumenta col tempo e le traiettorie divergono illimitate per $t \rightarrow \infty$, e l'origine è instabile.

³ Ci si riferisce qui ad un teorema visto nel Capitolo 1 per il quale se $f(t, x)$ è continua a tratti in t e localmente Lipschitz in $x \in D$ per ogni $t \geq t_0$, con $D \subset \mathbf{R}^n$ un dominio

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x \in D \subset \mathbf{R}^n, \quad \forall t \geq t_0$$

allora se ogni soluzione di $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, giace internamente ad un compatto $W \subset D$, con $x_0 \in W$, esiste un'unica soluzione per $\forall t \geq t_0$.

Dunque le proprietà di stabilità dell'origine dello spazio di stato possono essere dedotte dall'analisi della funzione energia e della sua derivata lungo il moto. Questo metodo presenta due difficoltà. La prima è che per sistemi complessi è difficile valutare la funzione energia. La seconda è che spesso si conosce solo una rappresentazione matematica del sistema. D'altra parte la teoria di Lyapunov mostra che non occorre utilizzare proprio la funzione energia, ma che basta considerare funzioni $V(x)$ che godono delle proprietà della funzione energia. In effetti lo studio della stabilità dell'origine dello spazio di stato può essere fatto considerando la funzione $E(x)$ ignorandone il suo significato in termini di energia.

Lyapunov mostrò (1892) che si potevano usare delle funzioni, generalizzazione della funzione energia di un sistema, per determinare la stabilità di un punto di equilibrio. Riferendosi per il momento a *sistemi stazionari*

$$\dot{x} = f(x)$$

con $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio contenente x_e , sia

$$V: D \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione $C^1(D)$. La sua derivata *lungo la traiettoria del sistema*, ossia lungo le soluzioni di $\dot{x} = f(x)$ è

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

e cambia al cambiare del sistema, ossia al cambiare di $f(x)$. Perché una tale funzione V sia utilizzabile in luogo della funzione energia deve soddisfare alcune proprietà.

Definizione 5. Considerato l'intorno sferico

$$B_{x_e, r} = \{x \in D \mid \|x - x_e\| \leq r\}$$

la funzione $V(x)$ si dice

- 1) *definita positiva* in $B_{x_e, r}$ se $V(x) \geq 0$, $\forall x \in B_{x_e, r}$, con $V(x_e) = 0$ se e solo se $x = x_e$;
- 2) *semidefinita positiva* in $B_{x_e, r}$ se $V(x) \geq 0$, $\forall x \in B_{x_e, r}$ con $V(x_e) = 0$;
- 3) *definita o semidefinita negativa* se $-V(x)$ è definita o semidefinita positiva. □

Ad esempio $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ è definita positiva in $\mathbb{R}^2$ e semipositiva definita in $\mathbb{R}^3$.

Teorema 1. [Teorema di Lyapunov] Sia x_e un punto di equilibrio di $\dot{x} = f(x)$, con $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ dominio contenente x_e , localmente Lipschitz in x su D . Sia poi $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C^1(D)$ e definita positiva, con $\dot{V}(x)$, calcolata lungo le traiettorie del sistema, definita negativa (semidefinita negativa). Allora x_e è asintoticamente stabile (stabile).

Dim. Per un qualsiasi $\varepsilon > 0$ tale che

$$B_{x_0, \varepsilon} = \{x \in D \mid \|x - x_e\| \leq \varepsilon\} \subset D$$

sia

$$\alpha = \min_{\|x - x_e\| = \varepsilon} V(x).$$

Ovviamente $\alpha > 0$ poiché $V(x)$ è definita positiva. Si prendano poi $\beta \in (0, \alpha)$ e si consideri l'insieme

$$\Omega_\beta = \{x \in B_{x_e, \varepsilon} \mid V(x) \leq \beta\}.$$

Si noti che Ω_β è nell'interno di $B_{x_e, \varepsilon}$ perché se per assurdo vi fosse un punto⁴ $\bar{x} \in \partial B_{x_e, \varepsilon} \cap \Omega_\beta$ in $\bar{x}$ si avrebbe contemporaneamente $\beta < \alpha \leq V(\bar{x})$ in quanto $\bar{x} \in \partial B_{x_e, \varepsilon}$ e $V(\bar{x}) \leq \beta$ in quanto $\bar{x} \in \Omega_\beta$. Questa è una contraddizione.

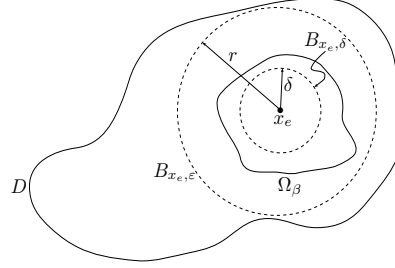


Figura 6

Ora se $\dot{V}(x)$ è semidefinita negativa

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad V(x) \leq V(x_0)$$

e se $x_0 \in \Omega_\beta$, ossia se la traiettoria parte in Ω_β essa rimane in Ω_β per ogni $t \geq t_0$, in quanto risulta

$$V(x) \leq V(x_0) \leq \beta$$

essendo $x_0 \in \Omega_\beta$.

Poiché f è Lipschitz su D e le soluzioni di $\dot{x} = f(x)$, $x(t_0) = x_0 \in \Omega_\beta$ giacciono interamente nel compatto $\Omega_\beta \subset D$, esiste una unica soluzione definita per ogni $t \geq t_0$. Per la continuità di $V(x)$ e poiché $V(x_e) = 0$, $\forall \beta, \exists \delta$ tale che se $\|x - x_e\| < \delta$ allora $V(x) < \beta$. Pertanto $B_{x_e, \delta} \subset \Omega_\beta \subset B_{x_e, \varepsilon}$. Inoltre

$$x_0 \in B_{x_e, \delta} \quad \Rightarrow \quad x_0 \in \Omega_\beta \quad \Rightarrow \quad x(t) \in \Omega_\beta \quad \Rightarrow \quad x(t) \in B_{x_e, \varepsilon}$$

ossia

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

e dunque x_e è un punto d'equilibrio stabile.

Supponiamo ora che $\dot{V}$ sia definita negativa. Poiché $0 \leq V(x)$ è monotonamente decrescente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = l \geq 0.$$

Mostriamo che $l = 0$. Se per assurdo fosse $l > 0$, sempre per la continuità di $V(x)$ esiste un d tale che

$$B_{x_e, d} \subset \Omega_l$$

ed inoltre le traiettorie giacciono sempre fuori di $B_{x_e, d}$, $\forall t \geq t_0$.

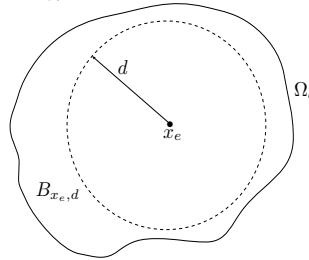


Figura 7

⁴ La frontiera di un insieme A si indica con ∂A .

Posto

$$-\gamma = \max_{\|x-x_e\| \in [d,r]} \dot{V}(x)$$

che esiste in quanto $\dot{V}(x)$ è continua e ha quindi un massimo su l'insieme compatto $\{x \mid \|x - x_e\| \in [d, r]\}$, si nota che $-\gamma < 0$; il massimo è infatti calcolato per $\|x - x_e\| \in [d, r]$. Dunque

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_{t_0}^t \dot{V}(x(\xi)) d\xi \leq V(x_0) - \gamma(t - t_0).$$

Ma per $t - t_0 > V(x_0)/\gamma$ risulta $V(x(t)) < 0$, il che è una contraddizione in quanto $V(x)$ è definita positiva. Dunque deve essere $l = 0$ e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0.$$

Questo significa che per ogni $a > 0$, $\exists T$ tale che per $t > T$: $V(x(t)) < a$. Seguendo i ragionamenti già fatti, considerato $B_{x_e, a}$ si può prendere $b \in (0, a)$ per cui $\Omega_b \subset B_{x_e, a}$. Se la traiettoria entra in

$$\Omega_b = \{x \subseteq B_{x_e, a} \mid V(x) \leq b\}$$

vi rimane. Che ci entri è sempre assicurato dal fatto che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0$$

che significa che per ogni $b > 0$, esiste un $\hat{T}$ tale che per $t > \hat{T}$ risulta $V(x(t)) < b$. Ciò implica che $x(t) \in \Omega_b$ per $t > \hat{T}$. Dunque per ogni $t > \hat{T}$ risulta che

$$x(t) \in \Omega_b \subset B_{x_e, a} \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - x_e\| < a$$

ossia

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e.$$

Questo prova l'attrattività. Pertanto x_e è stabile asintoticamente.

Se $\dot{V}(x)$ fosse stata semidefinita negativa, si sarebbe provata la stabilità di x_e . □

Le superficie $V(x) = c$ sono dette *linee di livello*. Poiché $\dot{V}(x) \leq 0$, quando $x(t)$ attraversa una linea di livello, entra in un *insieme di livello*

$$\Omega_c = \{x \mid V(x) \leq c\}$$

e non vi esce. Se poi $\dot{V}(x) < 0$, $x(t)$ passa da una linea di livello ad un'altra più interna, sicché alla fine $x(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$.

Se $\dot{V}(x) \leq 0$, si può concludere che x_e è semplicemente stabile. Il teorema di La Salle, che ha esteso la teoria di Lyapunov, permette di affermare in quali casi $\dot{V}(x) \leq 0$ implica anche la stabilità asintotica di x_e .

Le condizioni del teorema di Lyapunov sono solo sufficienti, ossia se una $V(x)$ non li verifica non significa che non possa esistere una $V(x)$ che permetta di affermare che x_e è stabile o asintoticamente stabile. Esistono tuttavia teoremi che, almeno concettualmente, permettono di affermare che per sistemi stazionari $\dot{x} = f(x)$ le condizioni date sono effettivamente necessarie e sufficienti, si può cioè dire che anche se x_e è stabile o stabile asintoticamente, è possibile costruire una funzione di Lyapunov che gode delle proprietà viste.

Considerando ora un *sistema non stazionario*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

con $f: [t_0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio contenente x_e . Si è visto come la non uniformità può riguardare sia la stabilità che l'attrattività di x_e . La stabilità uniforme e la stabilità asintotica uniforme possono essere caratterizzate in termini di funzioni di classe $\mathcal{K}$ e funzioni di classe $\mathcal{KL}$. Tali funzioni possono essere utilizzate nell'enunciato del teorema di Lyapunov per fornire delle limitazioni alla funzione candidata di Lyapunov e alla sua derivata. Per tale ragione sono dette anche funzioni di comparazione.

Definizione 6. Una funzione continua $\alpha: [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ è una *funzione di classe $\mathcal{K}$* se è strettamente crescente e $\alpha(0) = 0$. È una *funzione di classe $\mathcal{K}_\infty$* se $\alpha: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ è di classe $\mathcal{K}$ e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty.$$

Una funzione continua $\beta: [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ è una *funzione di classe $\mathcal{KL}$* se $\forall \bar{s}$ fissato, $\beta(r, \bar{s}) \in \mathcal{K}$ e se $\forall \bar{r}$ fissato, $\beta(\bar{r}, s)$ è decrescente con

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \beta(\bar{r}, s) = 0. \quad \square$$

Esempio. Si considerino i seguenti casi

1. $\alpha(r) = \arctg r \in \mathcal{K}$ in quanto $\alpha'(r) = \frac{1}{1+r^2} > 0$ sempre. Non è però di classe $\mathcal{K}_\infty$ in quanto $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \frac{\pi}{2} \neq \infty$.
2. $\alpha(r) = r^c \in \mathcal{K}_\infty$ con $c \in \mathbb{R}^+$, poiché $\alpha'(r) = cr^{c-1} > 0$ sempre e $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$.
3. $\beta(r, s) = \frac{r}{1+ksr} \in \mathcal{KL}$, con $k \in \mathbb{R}^+$ in quanto

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \beta}{\partial r} \right|_{\bar{s}} &= \frac{1+ksr - rks}{(1+ksr)^2} \Big|_{\bar{s}} = \frac{1}{(1+k\bar{s}r)^2} > 0 \quad \text{sempre} \\ \left. \frac{\partial \beta}{\partial s} \right|_{\bar{r}} &= -\frac{k\bar{r}}{(1+k\bar{s}\bar{r})^2} < 0 \quad \text{sempre in quanto } r \in [0, a) \end{aligned}$$

$$\text{e } \lim_{s \rightarrow \infty} \beta(r, s) = 0.$$

4. $\beta(r, s) = r^c e^{-s} \in \mathcal{KL}$, con $c \in \mathbb{R}^+$, poiché $\beta(r, \bar{s}) \in \mathcal{K}$, come già visto, e risulta sempre $\left. \frac{\partial \beta}{\partial s} \right|_{\bar{r}} = -\bar{r}^c e^{-s} < 0$, con $\lim_{s \rightarrow \infty} \beta(r, s) = 0$. $\square$

Se ora $\alpha \in \mathcal{K}$, allora α^{-1} è definita su $[0, \alpha(a))$ ed è di classe $\mathcal{K}$. Infatti poiché α è strettamente crescente, vi è biunivocità tra i punti $x \in [0, a)$ e quelli $y \in [0, \alpha(a))$. Dunque si può invertire α , e la funzione $\alpha^{-1}(y)$ è continua, strettamente crescente, con $\alpha^{-1}(0) = 0$ e naturalmente definita su $[0, \alpha(a))$. Analogamente se $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$, allora $\alpha^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$ su $[0, \alpha(a))$.

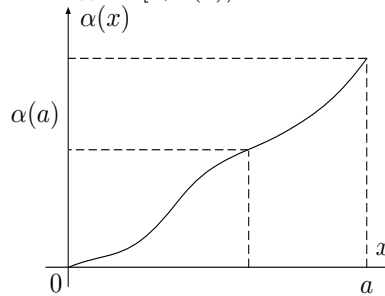


Figura 8 – Funzione di classe $\mathcal{K}$

Anche la composizione $\alpha_1 \circ \alpha_2$ di due funzioni di classe $\mathcal{K}$ (di classe $\mathcal{K}_\infty$ è ancora una funzione di classe $\mathcal{K}$ (di classe $\mathcal{K}_\infty$) in quanto $\alpha_1 \circ \alpha_2$ è continua e definita su $[0, \alpha_1(\alpha_2))$), risulta

$$\alpha_1(\alpha_2(0)) = \alpha_1(0) = 0,$$

ed è strettamente crescente poiché se $x_2 > x_1$ allora

$$y_2 = \alpha_2(x_2) > y_1 = \alpha_2(x_1) \quad \text{e} \quad \alpha_1(y_2) > \alpha_1(y_1)$$

ossia

$$\alpha_1(\alpha_2(x_2)) > \alpha_1(\alpha_2(x_1)).$$

Se poi $\alpha_i \in \mathcal{K}_\infty$ è ovvio che $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_1(\alpha_2(x)) = \infty$.

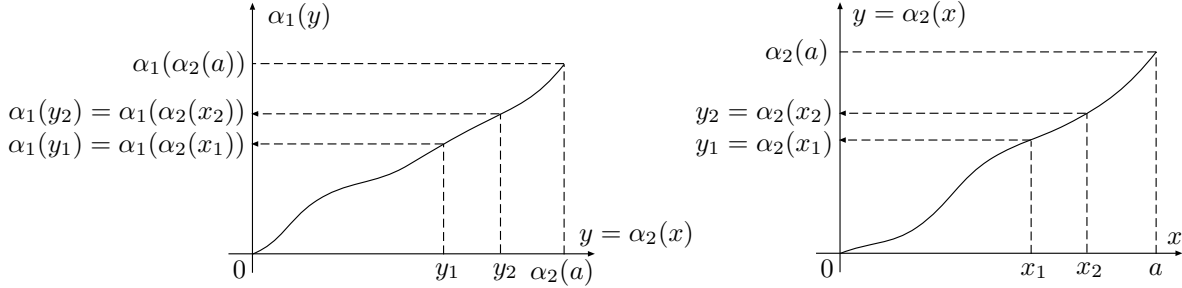


Figura 9 – Composizione di funzione di classe $\mathcal{K}$

Infine se $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$ e $\beta \in \mathcal{KL}$, allora $\alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s)) \in \mathcal{KL}$. Infatti

$$\alpha_1(0) = 0, \quad \alpha_1(\hat{r}) \xrightarrow{\hat{r} \rightarrow \infty} \infty.$$

Inoltre, posto $\hat{r} = \beta(\bar{r}, s)$, decrescente e tendente a zero per $s \rightarrow \infty$, e $\tilde{r} = \alpha_2(r)$, si può considerare la funzione $\alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s))$. Ora per ogni fissato $\bar{r}$ risulta dunque

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha_1(\beta(\alpha_2(\bar{r}), s)) = 0.$$

Una funzione di classe $\mathcal{KL}$ può essere sempre maggiorata mediante due funzioni di classe $\mathcal{K}_\infty$ ed una funzione esponenziale. Vale infatti il seguente risultato⁵

Proposizione 1. Se $\beta \in \mathcal{KL}$, esistono due funzioni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$ tali che

$$\beta(r, s) \leq \alpha_1(e^{-s} \alpha_2(r)), \quad \forall r, s \in [0, a) \times [0, \infty). \quad \square$$

Lemma 1. Il punto d'equilibrio x_e di $\dot{x} = f(t, x)$ è

1. uniformemente stabile se e solo se esiste una funzione $\alpha \in \mathcal{K}$ ed una costante $c > 0$ indipendente da t_0 tale che

$$\|x(t) - x_e\| \leq \alpha(\|x_0 - x_e\|), \quad \forall t \geq t_0 \quad \text{e} \quad \forall \|x_0 - x_e\| < c;$$

2. uniformemente asintoticamente stabile se e solo se esiste una funzione $\beta \in \mathcal{KL}$ ed una costante $c > 0$ indipendente da t_0 tale che

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \quad \text{e} \quad \|x_0 - x_e\| < c;$$

3. globalmente asintoticamente stabile se e solo se esiste una funzione $\beta \in \mathcal{KL}$ tale che

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0$$

e qualsiasi stato iniziale x_0 .

⁵ Per la dimostrazione si veda [?].

Dim. Per una dimostrazione di questo lemma si veda [?], pag. 653. Le affermazioni di questo lemma potrebbero anche essere prese come definizioni alternative di uniforme stabilità, uniforme asintotica stabilità e globale uniforme asintotica stabilità. $\square$

Si noti inoltre che $\|x(t) - x_e\| \leq \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0)$ significa che $\|x(t) - x_e\|$ risulta sempre non superiore alla funzione $\beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0)$, come illustrato in figura.

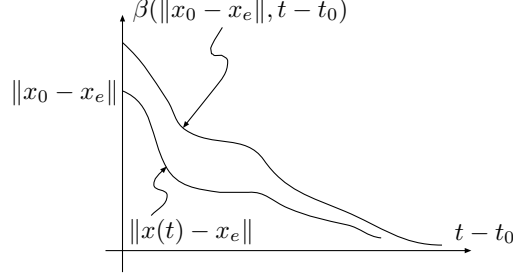


Figura 10 – Globale asintotica stabilità

In particolare per i sistemi autonomi $\dot{x} = f(x)$ le definizioni di stabilità e di stabilità asintotica implicano l'esistenza delle funzioni $\alpha \in \mathcal{K}$ e $\beta \in \mathcal{KL}$ di cui parla il lemma, in quanto in tal caso si ha uniformità.

Le funzioni di comparazione permettono anche di riformulare la definizione data di stabilità esponenziale.

Definizione 7. Un punto d'equilibrio x_e di $\dot{x} = f(t, x)$ è *uniformemente esponenzialmente stabile*⁶ se esistono due costanti $\mu, \lambda > 0$ tali che

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0)$$

è soddisfatta con una funzione $\mathcal{KL}$ del tipo

$$\beta(r, s) = \mu r e^{-\lambda s}$$

per ogni $x_0 \in B_{x_e, r} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_e\| \leq r\}$, e per ogni $t \geq t_0 \geq 0$. La costante λ è detta *rateo di convergenza*.

Se questa proprietà vale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$, x_e è *globalmente esponenzialmente stabile*. $\square$

La condizione della definizione è proprio quella data precedentemente, ossia

$$\|x(t) - x_e\| \leq \mu \|x_0 - x_e\| e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Possiamo ora estendere il teorema di Lyapunov ai sistemi non stazionari.

Teorema 2. [Teorema di Lyapunov] Sia x_e un punto d'equilibrio di $\dot{x} = f(t, x)$ con $f: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione $C^1([0, \infty) \times D)$, D dominio contenente x_e . Sia poi $V: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C^1([0, \infty) \times D)$ tale che

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x)$$

ossia $V(t, x)$ è definita positiva

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x)$$

ossia $\dot{V}(t, x)$ è decrescente

⁶ La stabilità esponenziale viene assunta essere uniforme rispetto a t_0 .

$\forall t \geq t_0$ e $\forall x \in D$, con $W_i(x) \in C^0(D)$ e definite positive. Allora x_e è uniformemente asintoticamente stabile. Se in particolare $D = \mathbb{R}^n$ e $W_1(x)$ è radialmente illimitata, allora x_e è globalmente uniformemente asintoticamente stabile. Se infine $W_3(x) = 0$ allora x_e è (semplicemente) uniformemente stabile. $\square$

Dunque x_e è uniformemente asintoticamente stabile se esiste una funzione di Lyapunov, ossia una funzione $V \in C^1$ definita positiva e decrescente.

Essendo poi $W_i(x)$ definite positive, esistono sempre delle funzioni $\alpha_i \in \mathcal{K}$, $i = 1, 2, 3$ definite su $[0, r)$ tali che⁷

$$\alpha_1(\|x - x_e\|) \leq W_1(x), \quad W_2(x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|), \quad W_3(x) \geq \alpha_3(\|x - x_e\|)$$

per cui le condizioni del teorema di Lyapunov possono essere riscritte in termini di funzioni di classe $\mathcal{K}$

$$\alpha_1(\|x - x_e\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|)$$

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) \leq -\alpha_3(\|x - x_e\|)$$

$\forall (t, x) \in [t_0, \infty) \times D$. L'uso delle funzioni di classe $\mathcal{K}$ facilita i calcoli.

Prima di dimostrare il teorema di Lyapunov enunciamo il seguente lemma, che non solo sarà usato nella dimostrazione del teorema ma che ha anche un suo interesse di per sé⁸.

Lemma 2. [Lemma del confronto] Si consideri l'equazione differenziale scalare

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

con f continua in t e localmente Lipschitz in x , per ogni istante $t \geq t_0$ e per ogni stato $x \in U$. Sia $[t_0, T)$, con T eventualmente infinito, il più grande intervallo di esistenza della soluzione $x(t)$ e si supponga che $x(t) \in U$, $\forall t \in [t_0, T)$. Sia $v(t)$ una funzione derivabile tale che

$$\dot{v} \leq f(t, v) \quad \text{e} \quad v(t_0) = v_0 \leq x_0$$

con $v(t) \in U$, $\forall t \in [t_0, T)$. Allora $v(t) \leq x(t)$ per ogni istante di tempo $t \in [t_0, T)$.

Se dunque $v(t)$ è derivabile e valgono le precedenti ipotesi, il lemma del confronto dice che se $x(t)$ è la soluzione di $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = 0$ e se $\dot{v}(t) \leq f(t, v)$, $v(t_0) = v_0 \leq x_0$, allora si ha sempre $v(t) \leq x(t)$. Dunque questo lemma compara le soluzioni dell'equazione differenziale di partenza con quelle ottenute sostituendo il segno di uguaglianza con il segno di minore o uguale. Questo lemma può essere applicato anche a funzioni v continue ma non derivabili aventi un limite superiore che soddisfa la disequazione differenziale⁹

⁷ Se $W: D \rightarrow \mathbb{R}$ è definita positiva su D , $x_e \in D$, allora esistono sempre delle funzioni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$ su $[0, r]$ tali che

$$\alpha_1(\|x - x_e\|) \leq W(x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|)$$

per ogni $x \in B_{x_e, r} \subset D$ e per qualche r , ossia in un intorno di x_e . Se poi $D = \mathbb{R}^n$ e $W(x)$ è radialmente illimitata, esistono delle funzioni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ per cui tale disuguaglianza vale per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. In particolare se $W(x) = x^T P x$, $P = P^T > 0$

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|_2^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|_2^2.$$

Una dimostrazione di questa affermazione si può trovare in [?], pag. 657.

⁸ Per una dimostrazione del lemma del confronto si veda [?], pag. 651.

⁹ Infatti più in generale si può considerare una funzione continua ma non derivabile il cui limite superiore sia tale che

$$D^+ v := \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} \leq f(t, v) \quad \text{e} \quad v(t_0) = v_0 \leq x_0$$

con $v(t) \in U$, $\forall t \in [t_0, T)$. Se $v(t)$ è derivabile rispetto a t il "lim sup" del rapporto incrementale coincide con la derivata usuale

$$D^+ v(t) = \dot{v}(t).$$

Esempio. Si supponga che

$$\dot{x} = -(1 + x^2)x, \quad x_0 = a.$$

Poiché $-(1 + x^2)x$ è localmente Lipschitz, esiste la soluzione $x(t)$ in $[t_0, t_1)$ per qualche t_1 . Volendo una limitazione per $x(t)$, si prenda $v = x^2$, per cui

$$\dot{v} = 2x\dot{x} = -2x^2 - 2x^4 \leq -2x^2 = -2v, \quad v_0 = a^2.$$

Applicando il lemma del confronto e poiché la soluzione dell'equazione

$$\dot{u} = -2u, \quad u_0 = a^2$$

è

$$u(t) = u_0 e^{-2(t-t_0)} = a^2 e^{-2(t-t_0)}$$

per il lemma del confronto si ha

$$x^2(t) = v(t) \leq u(t) = a^2 e^{-2(t-t_0)}$$

da cui

$$|x(t)| \leq a e^{-(t-t_0)}.$$

□

Un altro utile risultato è il seguente.

Lemma 3. Data l'equazione differenziale scalare

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = y_0$$

con $\alpha \in \mathcal{K}$ e localmente Lipschitz su $[0, a)$, la soluzione $y(t)$ è unica, definita per ogni $t \geq t_0$ e per ogni $y_0 \in [0, a)$, e data da

$$y(t) = \beta(y_0, t - t_0)$$

con $\beta \in \mathcal{KL}$ su $[0, a) \times [0, \infty)$.

□

Inoltre se

$$\frac{|v(t+h) - v(t)|}{h} \leq g(t, h), \quad \forall h \in (0, b]$$

e se

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} g(t, h) = g_0(t)$$

allora $D^+v(t) \leq g_0(t)$.

Il limite superiore di una sequenza $\{x_n\}$ di numeri reali è quel numero reale y tale che

a) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero N tale che $x_n < y + \varepsilon$ per $n > N$ (cioè alla fine tutti gli elementi della sequenza sono minori di $y + \varepsilon$);

b) fissato $\varepsilon > 0$ e fissato $m > 0$, esiste un intero $n > m$ tale che $x_n > y - \varepsilon$ (cioè esistono infiniti termini più grandi di $y - \varepsilon$).

Se $\{z_n\}$, $\{x_n\}$ sono tali che $z_n \leq x_n$, $\forall n \geq 0$, risulta che $\limsup_{n \rightarrow \infty} z_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. Da ciò segue che se

$$\frac{|v(t+h) - v(t)|}{h} \leq g(t, h), \quad \forall h \in (0, b] \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} g(t, h) = g_0(t)$$

allora $D^+v(t) \leq g_0(t)$.

L'introduzione del limite superiore è legata al fatto che per alcune funzioni non esiste il limite ma, allo stesso tempo, in corrispondenza a tale valore limite non assumono valori infiniti. Un esempio è la funzione $\sin \omega t$ per t tendente all'infinito. Per tali funzioni si introduce allora il concetto, più debole, di limite superiore. Nell'esempio della funzione $\sin \omega t$ il limite superiore per $t \rightarrow \infty$ è 1. Analoghi discorsi valgono per il limite inferiore $\liminf$.

Esempio. Data $\dot{y} = -ky$, $k > 0$, la soluzione è

$$y(t) = y_0 e^{-k(t-t_0)} = \beta(y_0, t - t_0).$$

Così pure, data $\dot{y} = -ky^2$, $k > 0$, la soluzione è

$$y(t) = \frac{y_0}{1 + ky_0(t - t_0)} = \beta(y_0, t - t_0). \quad \square$$

Diamo ora la dimostrazione del teorema di Lyapunov.

Dim. [Teorema di Lyapunov] Presi $r, \rho > 0$ tali che $B_{x_e, r} \subset D$ e

$$\rho < \min_{\|x - x_e\| = r} W_1(x)$$

si consideri l'insieme tempo variante

$$\Omega_{t, \rho} = \{x \in B_{x_e, r} \mid V(t, x) \leq \rho\}.$$

Poiché $W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x)$, si ha che per ogni istante $t \geq t_0$

$$\{x \in B_{x_e, r} \mid W_2(x) \leq \rho\} \subseteq \Omega_{t, \rho} \subseteq \{x \in B_{x_e, r} \mid W_1(x) \leq \rho\} \subset B_{x_e, r}$$

e sono nell'interno di $B_{x_e, r}$, in quanto $\rho < \min_{\|x - x_e\| = r} W_1(x)$.

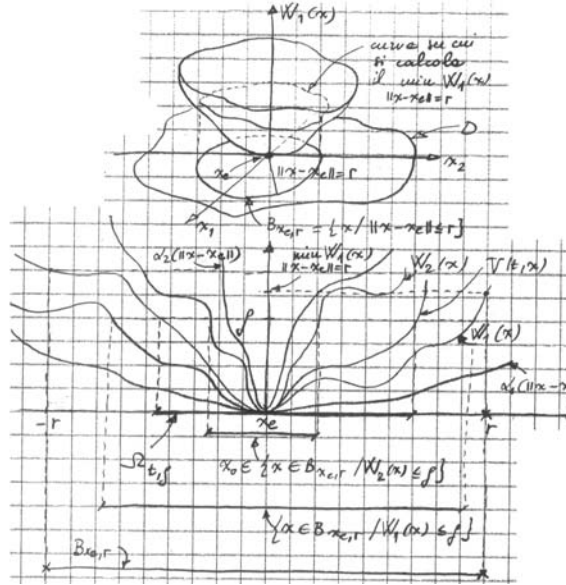


Figura 11

Ora per qualsiasi istante iniziale $t_0 \geq 0$ e per qualsiasi stato iniziale $x_0 \in \Omega_{t_0, x_0}$ la soluzione $x(t)$ che parte da (t_0, x_0) vi rimane per ogni istante di tempo $t \geq t_0$ in quanto $\dot{V}(t, x)$ è negativa in $D - \{x_e\}$. Sia

$$x_0 \in \{x \in B_{x_e, r} \mid W_2(x) \leq \rho\}.$$

Rimanendo $x(t)$ sempre in $B_{x_e, r}$ ed essendo ivi localmente Lipschitz, $x(t)$ è definita $\forall t \geq t_0$.

Ora dalla prima delle condizioni

$$\alpha_1(\|x - x_e\|) \leq W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|)$$

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x) \leq -\alpha_3(\|x - x_e\|).$$

si ricava

$$\|x - x_e\| \geq \alpha_2^{-1}(V(t, x))$$

per cui

$$\dot{V}(t, x) \leq -\alpha_3(\|x - x_e\|) \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V(t, x))) = -\alpha(V(t, x))$$

con $\alpha = \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1} \in \mathcal{K}$ su $[0, r]$.

Si supponrà che $\alpha \in \mathcal{K}$ sia anche localmente Lipschitz¹⁰ su $[0, r]$.

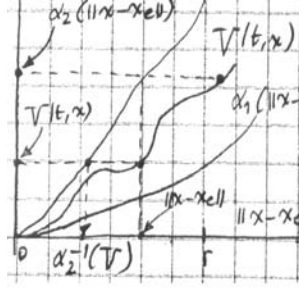


Figura 12

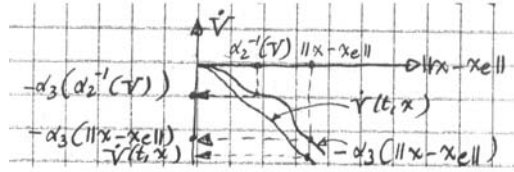


Figura 13

Si consideri ora l'equazione

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = y_0 = V(t_0, x_0)$$

in cui α è di classe $\mathcal{K}$ ed è localmente Lipschitz su $[0, r]$. Per un lemma dato precedentemente la soluzione $y(t)$ è unica e definita per ogni $t \geq t_0$ e per ogni $y_0 = V(t_0, x_0) \in [0, r]$, ed è data da

$$y(t) = \beta(V(t_0, x_0), t - t_0)$$

con $\beta \in \mathcal{KL}$ su $[0, r] \times [0, \infty)$.

¹⁰ Se α non fosse localmente Lipschitz si considera una funzione β che lo sia e tale che $\alpha(y) \geq \beta(y)$, sicché

$$\dot{V} \leq -\alpha(V) \leq -\beta(V).$$

Ad esempio se $\alpha(y) = \sqrt{y}$ è una funzione di $\mathcal{K}$ ma non è localmente Lipschitz in $y = 0$. Si prende allora

$$\beta(y) = \begin{cases} y & \text{se } y < 1 \\ \sqrt{y} & \text{se } y \geq 1 \end{cases} \in \mathcal{K} \text{ e localmente Lipschitz.}$$

Utilizzando quindi il lemma del confronto tra

$$\dot{V} \leq -\alpha(V), \quad V(t_0, x(t_0)) = y_0$$

e

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = y_0 = V(t_0, x_0)$$

e considerato il $\rho < r$, si deve avere

$$V(t, x(t)) \leq y(t) = \beta(V(t_0, x_0), t - t_0), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall y_0 = V(t_0, x_0) \in [0, \rho].$$

Dunque ogni soluzione $x(t)$ che parte in $\Omega_{t_0, \rho}$ (e, come visto, ivi rimane) soddisfa la disuguaglianza

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_e\| &\leq \alpha_1^{-1}(V(t, x(t))) \leq \alpha_1^{-1}(\beta(V(t_0, x_0), t - t_0)) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(\beta(\alpha_2(\|x_0 - x_e\|), t - t_0)) = \bar{\beta}(\|x_0\|, t - t_0) \end{aligned}$$

con $\bar{\beta} \in \mathcal{KL}$ in quanto $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$ e $\beta \in \mathcal{KL}$. Volendo questo $\forall x_0 \in \{x \in B_{x_e, r} \mid W_2(x) \leq \rho\}$, si ha la definizione di uniforme stabilità asintotica di x_e .

Da quanto dimostrato finora si vede che una stima della regione di attrazione di x_e è l'insieme

$$S_\rho = \{x \in B_{x_e, r} \mid W_2(x) \leq \rho\}.$$

Se $D = \mathbb{R}^n$ e $W_1(x)$ è radialmente illimitata allora x_e è globalmente uniformemente asintoticamente stabile. Infatti se $W_1(x)$ è radialmente illimitata allora anche $W_2(x)$ lo è, per cui S_ρ rimane sempre limitato per qualsiasi $\rho > 0$. Pertanto per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si può scegliere ρ grande abbastanza in modo tale che $x_0 \in S_\rho$.

Se poi $W_3(x) = 0$ ovviamente si può provare la semplice stabilità di x_e , che per quanto mostrato è uniforme. $\square$

Nel caso di $W_1(x)$ radialmente illimitata si dice che la $V(t, x)$ è una funzione di Lyapunov radialmente illimitata. Dalla dimostrazione si vede che una stima della regione di attrazione di x_e è l'insieme

$$S_\rho = \{x \in B_{x_e, r} \mid W_2(x) \leq \rho\}.$$

Sempre dalla dimostrazione si vede che il teorema di Lyapunov poteva essere enunciato riferendosi a funzioni di classe $\mathcal{K}$.

Corollario 1. [Teorema di Lyapunov] Sia x_e un punto d'equilibrio di $\dot{x} = f(t, x)$ con $f: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione $C^1([0, \infty) \times D)$, D dominio contenente x_e . Sia poi $V: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C^1([0, \infty) \times D)$ tale che

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x - x_e\|) &\leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|) \\ \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) &\leq -\alpha_3(\|x - x_e\|) \end{aligned}$$

$\forall t \geq t_0$ e $\forall x \in D$, con $\alpha_i \in \mathcal{K}$ su $[0, d]$. Allora x_e è uniformemente asintoticamente stabile. Se in particolare $\alpha_i \in \mathcal{K}$ su $[0, \infty)$, allora x_e è globalmente uniformemente asintoticamente stabile. Se infine $\alpha_3 = 0$ allora x_e è (semplicemente) uniformemente stabile. $\square$

Inoltre il teorema di Lyapunov vale in particolare per i sistema stazionari, per i quali la funzione candidata può essere presa indipendente dal tempo.

Corollario 2. [Teorema di Lyapunov per sistemi stazionari] Sia x_e un punto d'equilibrio di $\dot{x} = f(x)$ con $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione localmente Lipschitz su D , dominio contenente x_e . Sia poi $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C^1(D)$ tale che

$$\alpha_1(\|x - x_e\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|)$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_3(\|x - x_e\|)$$

$\forall x \in D$, con $\alpha_i \in \mathcal{K}$ su $[0, d)$. Allora x_e è uniformemente asintoticamente stabile. Se in particolare $\alpha_i \in \mathcal{K}$ su $[0, \infty)$, allora x_e è globalmente uniformemente asintoticamente stabile. Se infine $\alpha_3 = 0$ allora x_e è (semplicemente) uniformemente stabile. $\square$

Si osservi che poiché la funzione V è continua, se $W_1(x) \leq V(t, x)$, ovvero $\alpha_1 \leq V(t, x)$, ovvero $\alpha_1(\|x - x_e\|) \leq V(x)$, allora deve esistere una funzione $W_2(x)$, ovvero $\alpha_2(\|x - x_e\|)$, per la quale vale che $V(t, x) \leq W_2(x)$, ovvero $V(t, x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|)$, ovvero $V(x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|)$. Dunque la disuguaglianza a destra della prima relazione del teorema di Lyapunov e dei suoi corollari è in realtà ridondante, ma è utile in quanto fornisce un limite alle traiettorie del sistema, come visto nella dimostrazione del teorema.

Si noti che nel caso particolare in cui

$$\begin{aligned} k_1\|x - x_e\|^c &\leq W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \leq k_2\|x - x_e\|^c \\ \dot{V}(t, x) &\leq -W_3(x) \leq -k_3\|x - x_e\|^c \end{aligned}$$

con k_i, c costanti opportune, operando come nella dimostrazione del teorema di Lyapunov si ha

$$\|x - x_e\|^c \geq \frac{1}{k_2} V(t, x)$$

e quindi in virtù del lemma del confronto

$$\dot{V}(t, x) \leq -k_3\|x - x_e\|^c \leq -\frac{k_3}{k_2} V(t, x) \quad \Rightarrow \quad V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_e\| &\leq \left[\frac{V(t, x)}{k_1} \right]^{\frac{1}{c}} \left[\frac{V(t_0, x_0) e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)}}{k_1} \right]^{\frac{1}{c}} \leq \left[\frac{k_2}{k_1} \|x_0 - x_e\|^c e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} \right]^{\frac{1}{c}} \\ &= \|x_0 - x_e\| \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^{\frac{1}{c}} e^{-\frac{k_3}{ck_2}(t-t_0)} \end{aligned}$$

e dunque x_e è esponenzialmente stabile (globalmente se le ipotesi valgono globalmente).

Esempio. Sia $\dot{x} = -(1 + g(t))x^3$, con $g(t) \in C^0$ e $g(t) \geq 0 \forall t \geq t_0 = 0$. Per studiare $x_e = 0$ si prenda

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = -x^4(1 + g(t)) \leq -x^4 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t$$

Prese le funzioni $W_1(x) = W_2(x) = V(x)$, $W_3(x) = x^4$, si trova che $x_e = 0$ è globalmente uniformemente asintoticamente stabile. $\square$

Esempio. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - g(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2\end{aligned}$$

con $g(t) \in C^1$, $g(t) \in [0, k]$, $\dot{g}(t) \leq g(t)$, $\forall t \geq t_0 = 0$. Per studiare il punto di equilibrio $x_e=0$ si prenda la funzione candidata

$$V(t, x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(1 + g(t))x_2^2$$

ottenendo

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, x) &= -x_1^2 - g(t)x_1x_2 + (1 + g(t))x_1x_2 - (1 + g(t))x_2^2 + \frac{1}{2}\dot{g}(t)x_2^2 \\ &= -x_1^2 - (1 + g(t))x_2^2 + \frac{1}{2}\dot{g}(t)x_2^2 + x_1x_2 \\ &\leq -x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 - g(t)x_2^2 + \frac{1}{2}g(t)x_2^2 \\ &= -\frac{1}{2}(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}x^T P x = -W_3(x), \quad P = P^T > 0.\end{aligned}$$

Inoltre

$$W_1(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2}x^T x \leq V(t, x) \leq \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(1 + k)x_2^2 = \frac{1}{2}x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + k \end{pmatrix} x = W_2(x).$$

Ora essendo

$$\begin{aligned}\alpha_1(\|x - x_e\|) &= \frac{1}{2}\|x\|^2 \leq W_1(x), & W_2(x) &\leq \frac{1+k}{2}\|x\| = \alpha_2(\|x - x_e\|) \\ \alpha_3(\|x - x_e\|) &= \lambda_{\min}(P)\|x\|^2 = \|x\|^2 \leq W_3(x),\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|x\|^2 &\leq V(t, x) \leq \frac{1+k}{2}\|x\|^2 \\ \dot{V}(t, x) &\leq -\|x\|^2.\end{aligned}$$

Dunque $x_e = 0$ è *globalmente esponenzialmente stabile*, e applicando le formule viste

$$\|x\| \leq \sqrt{1+k} e^{-\frac{1}{2(1+k)}(t-t_0)} \|x_0\|.$$

□

Esempio. Si consideri un generico sistema lineare $\dot{x}(t) = A(t)x$, per il quale ovviamente $x_e = 0$. Sia $A(t) \in C^0$, $\forall t \geq t_0 = 0$. Si studi $x_e = 0$ considerando $V(t, x) = x^T P(t)x$. Si calcola allora

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, x) &= x^T P(t)A(t)x + x^T A^T(t)P(t)x + x^T \dot{P}(t)x \\ &= x^T \left[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) \right] x.\end{aligned}$$

Si supponga che esista una matrice $P(t)$ soluzione della seguente *equazione di Riccati*

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) = -Q(t)$$

con $Q(t) \in C^0$ simmetrica e definita positiva

$$Q(t) \geq k_3 I, \quad \forall t \geq t_0 = 0.$$

Dunque

$$\dot{V}(t) = -x^T Q(t)x \leq -k_3 \|x\|^2.$$

Inoltre

$$k_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq k_2 \|x\|^2, \quad k_1 = \lambda_{\min} P(t), \quad k_2 = \lambda_{\max} P(t)$$

e $V(t, x)$ è radialmente illimitata. Dunque $x_e = 0$ è *globalmente esponenzialmente stabile*. □

Una classe di funzioni scalari $V(x)$ la cui definitezza del segno può essere facilmente controllata è quella delle funzioni quadratiche omogenee

$$V(x) = (x - x_e)^T P (x - x_e) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} (x_i - x_{ei})(x_j - x_{ej})$$

con P matrice simmetrica reale; se P non fosse simmetrica basterebbe considerare la matrice $(P + P^T)/2$. In tal caso $V(x)$ è definita positiva se e solo se P ha valori positivi, il che è vero se e solo se i minori principali consecutivi di

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{13} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ossia

$$|p_{11}|, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad |P|$$

sono positivi (*condizione di Sylvester*). Poi $V(x)$ è semidefinita positiva se P ha autovalori maggiori o uguali a zero, il che è vero se e solo se tutti i suoi $2^n - 1$ minori principali sono maggiori o uguali a zero. Per indicare che P è definita positiva (semidefinita positiva) si scrive $P > 0$ ($P \geq 0$).

Si noti che $V(x)$ è definita negativa se $-V(x)$, e dunque $-P$, è definita positiva. Ciò avviene quando i minori principali consecutivi di $-P$ sono positivi, ossia quando quelli di P sono negativi se dispari e positivi se pari. Analogamente $V(x)$ è semidefinita negativa se $-V(x)$, e dunque $-P$, è semidefinita positiva. Questo si ha quando i $2^n - 1$ minori principali di P sono negativi se dispari e positivi se pari.

Esempio. Nel caso

$$V(x) = ax_1^2 + 2x_1x_3 + ax_2^2 + 4x_2x_3 + ax_3^2 = x^T \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} x$$

i minori principali consecutivi sono a , a^2 , $a^3 - 5a$. Inoltre i minori principali sono $2^3 - 1 = 7$

$$a, \quad a, \quad a, \quad \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}.$$

Dunque

- $P > 0$ per $a > \sqrt{5}$;
- $P \geq 0$ per $a \geq \sqrt{5}$;
- $P < 0$ per $a < 0$, $a^2 > 0$, $a^3 - 5a < 0$, ossia per $a < -\sqrt{5}$;
- $P \leq 0$ per $a \leq -\sqrt{5}$;
- P è indefinita per $a \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$. □

Il teorema di Lyapunov permette di stabilire delle proprietà senza risolvere l'equazione differenziale. D'altra parte non esiste un metodo sistematico *generale* per trovare una *funzione di Lyapunov*, ossia una funzione $V(x) \in C^1(D)$ con $V(x)$ definita positiva e $\dot{V}(x)$ definita o semidefinita negativa. Spesso si possono considerare funzioni simili a quella d'energia del sistema.

Esempio. Sia $\dot{x} = -g(x)$, con $g(x)$ localmente Lipschitz in $(a, -a)$ e $g(0) = 0$, $xg(x) > 0 \forall x \neq 0$ in $(-a, a)$. Ad esempio si consideri il caso della funzione in figura.

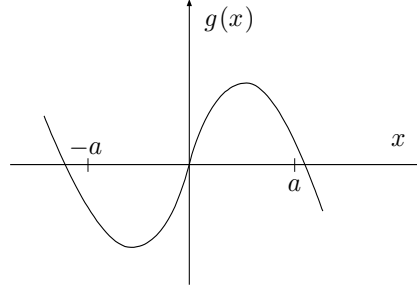


Figura 14

Il sistema ha $x_e = 0$ isolato e, nell'intervallo $(-a, a)$, se $x > 0$ risulta $\dot{x} = -g(x) < 0$ e dunque $x(t)$ decresce, mentre se $x < 0$ si ha $\dot{x} > 0$ e quindi $x(t)$ cresce. Dunque $x(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$ e x_e è stabile asintoticamente. Ed in effetti si consideri

$$V(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi$$

che è $C^1((-a, a))$ ed è $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ per $0 \neq x \in (-a, a)$; infatti se $x > 0$

$$V(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi > 0$$

e se $x < 0$

$$V(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi = \int_x^0 [-g(\xi)] d\xi > 0.$$

La sua derivata vale $\frac{\partial V}{\partial x} = g(x)$, che è continua. Dunque $V(x)$ è una funzione di Lyapunov candidata. Per vedere se è una funzione di Lyapunov si calcola la derivata lungo la traiettoria del sistema

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = g(x)[-g(x)] = -g^2(x) < 0 \quad \text{in } (-a, 0) \cup (0, a)$$

Dunque x_e è asintoticamente stabile. □

Esempio. Si consideri nuovamente la dinamica del pendolo

$$ml^2 \ddot{\vartheta} = -k\dot{\vartheta} - lmg \sin \vartheta \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{ml^2} x_2 - \frac{g}{l} \sin x_1. \end{aligned}$$

Se l'attrito è assente, ossia $k = 0$, si consideri la funzione energia

$$V(x) = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}ml^2 x_2^2 + mgl(1 - \cos x_1)$$

in cui

$$v = l\dot{\vartheta} = lx_2, \quad h = l(1 - \cos x_1).$$

In realtà si può prendere anche la funzione

$$V_1(x) = \frac{V(x)}{ml^2} = \frac{V(x)}{J} = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1)$$

con $V_1(0) = V(0) = 0$ e definita positiva per

$$1 - \cos x_1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \in (0, 2\pi).$$

La derivata di $V_1(x)$ lungo la traiettoria del sistema è

$$\dot{V}(x) = x_2 \dot{x}_2 + \frac{g}{l} \dot{x}_1 \sin x_1 = 0.$$

Essendo semidefinita negativa, $x_e = 0$ è semplicemente stabile. È asintoticamente stabile, ossia può esistere un'altra $V(x)$ tale che $\dot{V}(x) < 0$? No in quanto se $x(t_0) = x_0$, e quindi la traiettoria parte dalla linea di livello $V_1(x) = x_0$, poiché

$$\dot{V}_1(x) \equiv 0$$

e non più genericamente $\dot{V}_1(x) \leq 0$, si ha che la traiettoria rimane in tale linea di livello

$$\dot{V}_1(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad V(x) = \text{costante} = V(x(0)) = V(x_0).$$

Se invece l'attrito è presente, ossia $k \neq 0$, utilizzando la funzione $V_1(x)$ come funzione di Lyapunov candidata si ha

$$\dot{V}_1(x) = x_1 \dot{x}_2 + \frac{g}{l} \dot{x}_1 \sin x_1 = x_2 \left(-\frac{k}{ml^2} x_2 - \frac{g}{l} \sin x_1 \right) + \frac{g}{l} x_2 \sin x_1 = -\frac{k}{ml^2} x_2^2 \leq 0$$

la quale è semidefinita negativa in quanto si annulla nei punti $x_2 = 0$, ed x_1 generico. Dunque $x_e = 0$ è stabile. In realtà $x_e = 0$ è asintoticamente stabile ed in effetti basta considerare una funzione candidata un po' più complessa

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x + \frac{g}{l} (1 - \cos x_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + g(1 - \cos x_1)$$

con la quale si ha

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (x_1 p_{11} + x_2 p_{12}) x_2 + (x_1 p_{12} + x_2 p_{22}) \left(-\frac{k}{ml^2} x_2 - \frac{g}{l} \sin x_1 \right) + \frac{g}{l} x_2 \sin x_1 \\ &= \left(p_{11} - \frac{k}{ml^2} p_{12} \right) x_1 x_2 + \left(p_{12} - \frac{k}{ml^2} p_{22} \right) x_2^2 - \frac{g}{l} p_{12} x_1 \sin x_1 + \frac{g}{l} x_2 \sin x_1 (1 - p_{22}). \end{aligned}$$

Preso

$$p_{11} = \frac{k}{ml^2} p_{12}, \quad p_{22} = 1$$

si ha

$$\dot{V}(x) = \left(p_{12} - \frac{k}{ml^2} \right) x_2^2 - \frac{g}{l} p_{12} x_1 \sin x_1 < 0$$

per $p_{12} < \frac{k}{ml^2}$, in quanto $x_1 \sin x_1 > 0$ per $|x| < \pi$. Per vedere per quali valori $P > 0$ si noti che

$$P = \begin{pmatrix} \frac{k}{ml^2} p_{12} & p_{12} \\ p_{12} & 1 \end{pmatrix} > 0$$

per

$$\frac{k}{ml^2} p_{12} - p_{12}^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_{12} \in (0, \frac{k}{ml^2}).$$

Preso ad esempio $p_{12} = \frac{1}{2} \frac{k}{ml^2}$ si ha contemporaneamente $V > 0$ e $\dot{V} < 0$. Dunque x_e è stabile asintoticamente¹¹. $\square$

In tale esempio la $V(x)$ è stata “costruita all’indietro”. Una procedura che utilizza tale idea è il *metodo del gradiente variabile* di Schultz e Gibson (1962). Posto $\frac{\partial V}{\partial x} = g(x)$, si può scrivere

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = g^T(x) f(x)$$

per cui si può pensare di determinare $g(x)$ in modo tale che $\dot{V} < 0$ e sia al tempo stesso il gradiente di una funzione definita positiva $V(x)$.

Condizione necessaria e sufficiente perché

$$g(x) = \text{grad } V(x) = \frac{\partial V}{\partial x}^T$$

ossia sia un differenziale esatto, è che $\frac{\partial g}{\partial x}$ sia simmetrica ossia che $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$, $\forall i, j$. Imposta questa condizione, si impone che $g^T(x) f(x)$ sia definita negativa. Infine si calcola $V(x)$

$$V(x) = \int_0^x g^T(\xi) d\xi = \int_0^x \sum_{i=1}^n g_i(\xi) d\xi$$

Poiché

$$g^T(x) dx = g_1(x) dx_1 + \cdots + g_n(x) dx_n$$

è una forma differenziale esatta, l’integrazione è indipendente dal percorso scelto per andare da 0 a x per cui si può ad esempio calcolarlo percorrendo gli assi x_i

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(\xi_1, 0, \dots, 0) d\xi_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, \xi_2, 0, \dots, 0) d\xi_2 + \cdots + \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi_n) d\xi_n.$$

Si impone infine che $V(x)$ sia definita positiva.

Le funzioni $g_i(x)$ possono ad esempio essere poste pari a

$$g_i(x) = a_{i1}(x)x_1 + \cdots + a_{in}(x)x_n.$$

Esempio. Si consideri il sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3$$

che ha $x_e = 0$ isolato. Posto

$$g(x) = \begin{pmatrix} a_1(x)x_1 + a_2(x)x_2 \\ a_3(x)x_1 + a_4(x)x_2 \end{pmatrix}$$

con a_i genericamente funzioni di x , per la condizione di simmetria si ha

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial a_1}{\partial x_2} x_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 + a_2 = \frac{\partial a_3}{\partial x_1} x_1 + a_3 + \frac{\partial a_4}{\partial x_1} x_2 = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}.$$

¹¹ Per vedere che x_e è stabile asintoticamente bastava in realtà considerare il metodo indiretto di Lyapunov e l’approssimazione lineare

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{O}(x_1^2) \end{pmatrix} = Ax + \mathcal{O}(x^2)$$

e notare che $\sigma\{A\} \subset C^-$. Questo verrà mostrato nel seguito.

Inoltre

$$\dot{V} = (a_1x_1 + a_2x_2)x_2 + (a_3x_1 + a_4x_2)(-x_2 - x_1^3) = (a_1 - a_3 - a_4x_1^2)x_1x_2 - (a_4 - a_2)x_2^2 - a_3x_1^4.$$

Si può imporre $\dot{V} < 0$ scegliendo $a_1 - a_3 - a_4x_1^2 = 0$, per cui $a_1 = a_3 + a_4x_1^2$ e $a_4 > a_2$, $a_3 > 0$ con a_2, a_3, a_4 costanti. La condizione di simmetria diventa $a_2 = a_3$. Infine $g_1 = (a_2 + a_2x_1^2)x_1 + a_2x_2$, $g_2 = a_2x_1 + a_4x_2$, e

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^{x_1} (a_2 + a_2\xi_1^2)\xi_1 d\xi_1 + \int_0^{x_2} (a_2x_1 + a_4\xi_2) d\xi_2 \\ &= \frac{1}{2}a_2x_1^2 + \frac{1}{4}a_2x_1^4 + a_2x_1x_2 + \frac{1}{2}a_4x_2^2 \\ &= \frac{1}{2}a_2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{a_4}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}a_2x_1^4 \end{aligned}$$

definita positiva su tutto $\mathbb{R}^2$. Dunque $x_e = 0$ è stabile asintoticamente. $\square$

Esempio. Si consideri un sistema in forma più generale di quella dell'esempio precedente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 - h(x_1) \end{aligned}$$

$a > 0$, $h(x)$ localmente Lipschitz con $h(0) = 0$ e $xh(x) > 0$ per $x \in (-b, 0) \cup (0, c)$. Si noti che x_1^3 gode di tali proprietà.

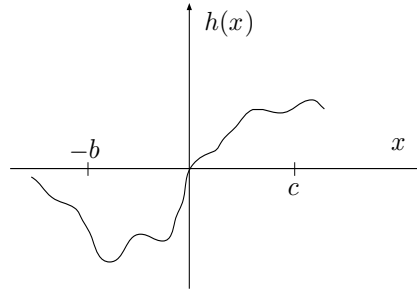


Figura 15

Inoltre si noti che l'equazione del pendolo è anch'esso in questa forma, con

$$a = \frac{k}{ml^2}, \quad h(x_1) = \frac{g}{l} \sin x_1.$$

Si ponga

$$g(x) = \begin{pmatrix} a_1(x)x_1 + a_2(x)x_2 \\ a_3(x)x_1 + a_4(x)x_2 \end{pmatrix}$$

e si imponga

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_2}x_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}x_2 + a_2 = \frac{\partial a_3}{\partial x_1}x_1 + a_3 + \frac{\partial a_4}{\partial x_1}x_2$$

e

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (a_1x_1 + a_2x_2)x_2 + (a_3x_1 + a_4x_2)(-h(x_1) - ax_2) \\ &= (a_1 - aa_3)x_1x_2 + (a_2 - aa_4)x_2^2 - a_3x_1h(x_1) - a_4x_2h(x_1) < 0. \end{aligned}$$

Ad esempio si può porre

$$(a_1 - aa_3)x_1 - a_4h(x_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1(x) = a_4 \frac{h(x_1)}{x_1} + aa_3$$

per cui

$$\dot{V} = -(aa_4 - a_2)x_2^2 - a_3x_1h(x_1) < 0$$

per $a_4 > \frac{a_2}{a}$, $a_3 > 0$ e a_2, a_3, a_4 costanti. La condizione di simmetria diventa $a_2 = a_3$. Pertanto

$$g_1(x) = aa_2x_1 + a_4h(x_1) + a_2x_2, \quad g_2(x) = a_2x_1 + a_4x_2.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^{x_1} (aa_2\xi_1 + a_4h(\xi_1)) d\xi_1 + \int_0^{x_2} (a_2x_1 + a_4\xi_2) d\xi_2 \\ &= \frac{1}{2}aa_2x_1^2 + a_4 \int_0^{x_1} h(\xi_1)d\xi_1 + a_2x_1x_2 + \frac{1}{2}a_4\xi_2^2 \\ &= \frac{1}{2}a_2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & \frac{a_4}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a_4 \int_0^{x_1} h(\xi_1)d\xi_1 \end{aligned}$$

e poiché $a\frac{a_4}{a_2} - 1 > 0$ risulta $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & \frac{a_4}{a_2} \end{pmatrix} > 0$. Inoltre in un precedente esempio si è visto che $\int_0^{x_1} h(\xi_1)d\xi_1$ è sempre positivo per $x_1 \in (-b, c)$. Essendo soddisfatte le condizioni del teorema di Lyapunov sul dominio $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (-b, c)\}$, $x_e = 0$ è asintoticamente stabile. $\square$

Altri esempi di funzioni simili alle funzioni energia sono le seguenti

- $V(x) = \|x\|^2$, per la quale se l'equazione

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

ha $f(t, x)$ Lipschitz in x su $[t_0, \infty] \times D$, D dominio contenente $x = 0$, con costante di Lipschitz L e con $f(t, 0) = 0$, e si suppone che la soluzione $x(t)$ sia definita $\forall t \geq t_0$ e che appartenga a D , allora¹²

$$|\dot{V}(x)| \leq 2L\|x\|_2^2 = 2Lx^T x$$

e che ciò consente di affermare che

$$\|x_0\|e^{-L(t-t_0)} \leq \|x\|_2 \leq \|x_0\|e^{L(t-t_0)}.$$

- $V(x) = \sin^2(\|x\|^2)$, che è localmente definita positiva.

Si possono anche considerare funzioni dipendenti dal tempo, che saranno utili nello studio di sistemi tempo varianti. Ad esempio

$$V(t, x) = (t+1)\|x\|^2, \quad V(t, x) = e^t x^T P x, \quad P = P^T > 0$$

che sono definite positive.

¹² Si vedano gli esercizi alla fine del Capitolo 1.

2.3 Regioni di attrazione e stabilità globale

La definizione di stabilità asintotica di un punto di equilibrio x_e afferma che per stati iniziali x_0 sufficientemente vicini al punto di equilibrio l'evoluzione $x(t)$ tende asintoticamente ad x_e . Non precisa però né quanto “vicino” deve essere x_0 ad x_e , né se “allontanandosi” da x_e tale proprietà continua a valere.

Si definisce *regione di attrazione*¹³ l'insieme degli stati iniziali x_0 a partire dai quali le soluzioni convergono ad x_e

$$R_a = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = x_e \right\}.$$

Spesso è difficile o impossibile determinare analiticamente l'esatta regione di attrazione di un certo x_e . Le funzioni di Lyapunov possono essere usate per fornire una stima *per difetto* delle regioni di attrazione. Infatti nella prova del teorema di Lyapunov si è visto che, in virtù delle ipotesi, se l'insieme definito dalla linea di livello $V(x) = c$ è dato da

$$\Omega_c = \{x \mid V(x) \leq c\}$$

è *limitato* ed è contenuto in D , allora se $x_0 \in \Omega_c$ risulta che $x(t) \in \Omega_c, \forall t \geq t_0$. Nell'ipotesi di stabilità asintotica di x_e , Ω_c è dunque una stima della regione di attrazione. Eventualmente tali stime possono essere allargate per fornire tutta la regione di attrazione.

Un caso particolare è quando la regione di attrazione è tutto $\mathbb{R}^n$. In tal caso se x_e è stabile asintoticamente per ogni stato iniziale x_0 la soluzione tende a x_e , e dunque indipendentemente da quando è grande $\|x_0 - x_e\|$. Questa è la definizione di punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

Per avere stabilità asintotica globale risulta necessario, per c grande, che Ω_c sia limitato. Infatti se non lo fosse la traiettoria potrebbe andare all'infinito. In generale non sempre è possibile che Ω_c sia limitato, data una certa funzione di Lyapunov. Ad esempio per la funzione candidata di Lyapunov

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2$$

le linee di livello $V(x) = c$ sono curve chiuse per c piccoli, e in corrispondenza Ω_c è limitato, mentre oltre un certo valore $\bar{c} = 1$ le linee di livello sono aperte, e in corrispondenza Ω_c è illimitato. Infatti

$$\frac{d}{dx_1} V(x) = \frac{2x_1(1 + x_1^2) - 2x_1^3}{(1 + x_1^2)^2} = \frac{2x_1}{(1 + x_1^2)^2}, \quad \frac{d^2}{dx_1^2} V(x) = 2 \frac{(1 + x_1^2)^2 - 4x_1^2(1 + x_1^2)}{(1 + x_1^2)^4} = 2 \frac{1 - 3x_1^2}{(1 + x_1^2)^3}$$

e il grafico della funzione $\frac{x_1^2}{1 + x_1^2}$ mostra che vi è un asintoto orizzontale in 1 per $x_1 \rightarrow \pm\infty$.

¹³ La regione di attrazione è anche detta regione di stabilità asintotica, o dominio di attrazione, o bacini di attrazione.

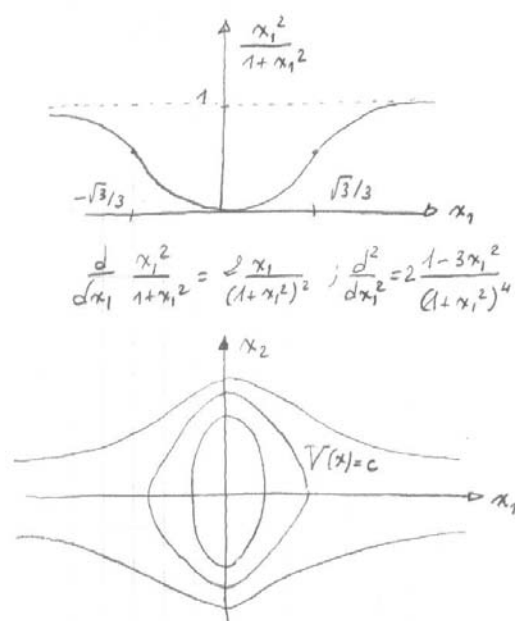


Figura 16

Quindi perché gli insiemi Ω_c siano sempre limitati occorrerà imporre la condizione aggiuntiva

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$$

ossia che $V(x)$ sia *radialmente illimitata*. Esistono alcuni risultati in proposito.

Teorema 3. [Teorema di Barbaskin-Krasovskii] Sia x_e un punto di equilibrio di $\dot{x} = f(x)$ con $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz. Sia poi $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C^1(\mathbb{R}^n)$ definita positiva e radialmente illimitata, con $\dot{V}(x)$ definita negativa. Allora x_e è globalmente asintoticamente stabile.

Dim. Basta mostrare che Ω_c è sempre limitato. Si applica poi la dimostrazione del teorema di Lyapunov. Poiché $V(x)$ è radialmente illimitata, per ogni $c > 0$ esiste un $r > 0$ per cui per $\|x - x_e\| > r$ risulta $V(x) > c$. Dunque

$$\Omega_c = \{x \in B_{x_e, r} \mid V(x) \leq c\} \subset B_{x_e, r} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_e\| \leq r\}$$

e Ω_c è limitato. □

Esempio. Il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -6 \frac{x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2 \frac{x_1+x_2}{(1+x_1^2)^2} \end{aligned}$$

ha $x_e = 0$ come punto di equilibrio. Si consideri poi

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$

come funzione candidata di Lyapunov. Si è già visto che non è radialmente illimitata. La derivata lungo le traiettorie del sistema vale

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) &= \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} & 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \\
 &= 2 \left[\frac{x_1}{(1+x_1^2)^2} \left(-6 \frac{x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \right) - 2x_2 \frac{x_1+x_2}{(1+x_1^2)^2} \right] \\
 &= \frac{4}{(1+x_1^2)^2} \left[x_1 \left(-3 \frac{x_1}{(1+x_1^2)^2} + x_2 \right) - x_2(x_1+x_2) \right] \\
 &= -\frac{4}{(1+x_1^2)^2} \left[\frac{3x_1^2}{(1+x_1^2)^2} + x_2^2 \right] < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0.
 \end{aligned}$$

Poiché $V(x)$ non è radialmente illimitata non si può dedurre che x_e è globalmente asintoticamente stabile. In effetti lo è solo localmente. Si consideri infatti $x_2 = \frac{1}{x_1}$. I due rami dell'iperbole dividono il piano in tre regioni. Si proverà che la traiettoria che parte da punti abbastanza "lontani" da x_e attraverserà tali rami per poi non ritornare più all'origine.

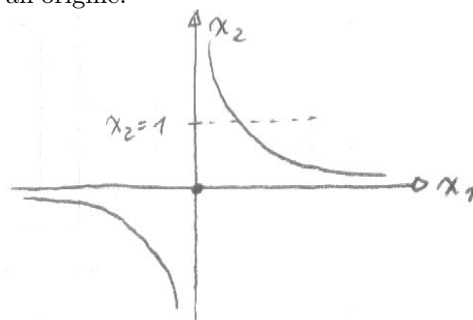


Figura 17

L'iperbole ha tangente con coefficiente angolare

$$m_1(x) = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{x_1^2}$$

mentre il coefficiente angolare della soluzione $x(t)$ dell'equazione differenziale vale

$$m_2(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{x_1 + x_2}{3x_1 - x_2(1+x_1^2)^2}.$$

Si studia dunque quando

$$\frac{x_1 + x_2}{3x_1 - x_2(1+x_1^2)^2} = m_2(x) > m_1(x) = -\frac{1}{x_1^2}.$$

In particolare per $x_2 = 1$ si ha

$$\frac{x_1 + 1}{3x_1 - (1+x_1^2)^2} > -\frac{1}{x_1^2}$$

ovvero

$$x_1^2 > \frac{-3x_1 + (1+x_1^2)^2}{x_1 + 1}$$

Consideriamo il primo quadrante, in cui $x_1 > 0$

$$(x_1 + 1)x_1^2 > -3x_1 + (1 + x_1^2)^2$$

e dunque

$$-x_1^4 + x_1^3 - x_1^2 + 3x_1 - 1 > 0.$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono $x_{1,1} = 0.3680$, $x_{1,2} = 1.4277$, oltre a due soluzioni immaginarie. Inoltre il primo membro è negativo per $0 < x_1 < x_{1,1}$ e per $x_1 > x_{1,2}$, mentre è positivo per $x_{1,1} < x_1 < x_{1,2}$. Questo significa che la disequazione $m_1(x) > m(x)$ è verificata solo per $x_{1,1} < x_1 < x_{1,2}$, mentre non è verificata per $0 < x_1 < x_{1,1}$ e per $x_1 > x_{1,2}$. Dunque per $0 < x_1 < x_{1,1}$ e $x_1 > x_{1,2}$ la pendenza dell'iperbole è maggiore di quella della soluzione $x(t)$, la quale dunque nel primo quadrante tenderà ad “uscire” dall'iperbole e cioè ad allontanarsi dall'origine, per poi non “rientrare” più. Per punti iniziali tali che $x_1 > x_{1,2}$ e $x_2 > 0$ la traiettoria si allontanerà dunque dall'origine, la quale non è un punto d'equilibrio globalmente asintoticamente stabile. $\square$

Esempio. Consideriamo nuovamente il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) - ax_2\end{aligned}$$

$a > 0$, $h(x)$ localmente Lipschitz con $h(0) = 0$ e $xh(x) > 0$ per $x \in (-b, 0) \cup (0, c)$. Tale sistema ha l'origine punto d'equilibrio isolato. Con il metodo del gradiente variabile si era trovato che una funzione di Lyapunov era

$$V(x) = \frac{1}{2}a_2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & \frac{a_4}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a_4 \int_0^{x_1} h(\xi_1) d\xi_1$$

la quale è definita positiva sul dominio $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (-b, c)\}$ poiché $a_2 > 0$, $a > 0$, $a\frac{a_4}{a_2} - 1 > 0$, $a_4 > 0$. Per essa si era visto inoltre che

$$\dot{V} = -a_3x_1h(x_1) - (aa_4 - a_2)x_2^2 < 0$$

$a_3 > 0$, e quindi si era arrivati alla conclusione che $x_e = 0$ è stabile asintoticamente. Questo risultato era ovviamente locale, valendo per il dominio D .

Supponiamo ora che la condizione $xh(x) > 0$ valga per ogni $x \neq 0$. In questo caso $V(x)$ è definita positiva su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è radialmente illimitata. Inoltre $\dot{V}$ è definita negativa su tutto $\mathbb{R}^2$. Pertanto $x_e = 0$ è globalmente asintoticamente stabile. $\square$

Perché x_e sia globalmente asintoticamente stabile occorre che sia *l'unico punto d'equilibrio del sistema*. Se ce ne fosse un altro $\bar{x}_e$, infatti, la traiettoria che parte in $\bar{x}_e$ rimarrebbe in $\bar{x}_e$ per ogni $t \geq t_0$ e non tenderebbe a $x_e = 0$. Dunque la stabilità asintotica globale non è studiata per sistemi con punti d'equilibrio multipli, come per esempio il pendolo.

Un altro utile risultato è il seguente.

Teorema 4. [Teorema di Krasovskii] Sia x_e d'equilibrio per il sistema $\dot{x} = f(x)$, con $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ compatto contenente x_e , localmente Lipschitz in D . Se $f \in C^1(D)$ e se esistono una costante $\alpha > 0$ ed una matrice $P = P^T > 0$ tale che

$$\sigma \left(P \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial f^T(x)}{\partial x} P \right) = \{ \lambda \mid \mathcal{R}(\lambda) < -\alpha \}, \quad \forall x \in D$$

allora $x_e = 0$ è asintoticamente stabile. Se poi $D = \mathbb{R}^n$, x_e è globalmente asintoticamente stabile.

Dim. Si consideri $V(x) = f^T(x)Pf(x)$, definita positiva¹⁴ e con

$$\dot{V}(x) = \dot{f}^T Pf + f^T P \dot{f} = f^T \left(\frac{\partial f^T}{\partial x} P + P \frac{\partial f}{\partial x} \right) f.$$

Ma poiché $\frac{\partial f^T}{\partial x} P + P \frac{\partial f}{\partial x}$ ha autovalori tutti a parte reale negativa, è una matrice definita negativa, e può porsi pari a $-Q(x)$, con $Q(x) > 0$, $\forall x \in D$. Dunque $\dot{V}(x) < 0$, ossia $\dot{V}$ è definita negativa¹⁵. Dunque x_e è stabile asintoticamente. Infine V è radialmente illimitata poiché

$$f = \int_0^x df = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x} dx \geq \lambda_{\min} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \int_0^x dx = \lambda_{\min} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) x$$

per cui

$$\|f\| \geq \left| \lambda_{\min} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right| \|x\|$$

in cui¹⁶

$$\left| \lambda_{\min} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right| > 0.$$

Dunque se $\|x\| \rightarrow \infty$ anche $\|f\| \rightarrow \infty$ e V è radialmente illimitata. □

Esempio. Il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_2^3 \end{aligned}$$

è tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{pmatrix}$$

per cui

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 - 6x_2^2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{pmatrix} = 2Q.$$

Gli autovalori di $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x}$ sono quelli di Q

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 + 3x_2^2 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda + 1 + 3x_2^2) - 1 = \lambda^2 + (4 + 3x_2^2)\lambda + 2 + 9x_2^2$$

e poiché i coefficienti di $\lambda^2 + a\lambda + b$ sono sempre positivi per ogni $x \in \mathbb{R}^2$, le soluzioni sono a parte reale strettamente minore di zero. Dunque esisterà un α che soddisfa il teorema e $x_e = 0$ è globalmente asintoticamente stabile. □

Il seguente teorema consente di determinare esattamente una regione di attrazione di x_e .

¹⁴ La funzione V è definita positiva nella variabile f . Lo è anche nella variabile x poiché, essendo $f \in C^1(D)$ e $f(x_e) = 0$, si può invertire in punti dell'intorno di x_e in modo univoco, e dunque i punti $y = f(x)$ e i punti $x = f^{-1}(y)$ sono in corrispondenza biunivoca.

¹⁵ Si noti che $\dot{V}(x_e) = 0$ poiché $f(x_e) = 0$.

¹⁶ Gli autovalori di $P \frac{\partial f}{\partial x}$ sono compresi tra l'autovalore minimo e quello massimo di $P \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x} P$, e dunque sono inferiori a una quantità negativa $-c$. Poiché $P > 0$, ossia gli autovalori sono positivi, quelli di $\frac{\partial f}{\partial x}$ saranno negativi, e quindi non nulli. Dunque $\left| \lambda_{\min} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right| > 0$.

Teorema 5. [Teorema di Zubov] Sia x_e un punto d'equilibrio di $\dot{x} = f(x)$ con $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ dominio contenente x_e , localmente Lipschitz in x su D . Se esiste una funzione $V: D \rightarrow \mathbb{R}$, $C^1(D)$ tale che

- $V(x_e) = 0$ e $V(x) \in (0, 1)$ per $x \neq x_e$ interno a D , mentre $V(x) = 1$ per $x \in \partial D$, ovvero $\lim_{\|x \rightarrow \infty\|} V(x) = 1$ se D è illimitato, e
- $V(x)$ è soluzione di $\dot{V}(x) = -W(x)(1 - V(x))\sqrt{1 + \|f(x)\|^2}$ per almeno una funzione $W(x)$ definita positiva,

allora D coincide con la regione di attrazione di x_e .

Se è possibile determinare una funzione $W(x)$ definita positiva ed una soluzione $V(x)$, i punti x per $V(x) = 1$ costituiscono la frontiera della regione di stabilità. Si noti che una $V(x)$ che soddisfa le ipotesi del teorema di Zubov è sicuramente funzione di Lyapunov, poiché è definita positiva, mentre $\dot{V}(x)$ è definita negativa, e la linea di livello $\Omega_{c=1}$ è la frontiera di stabilità, e dunque essa assicura la stabilità asintotica del punto d'equilibrio x_e .

Esempio. Il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

ha $x_e = 0$ stabile asintoticamente localmente. Ciò può essere visto prendendo la funzione candidata

$$V = \frac{1}{2}x^T x$$

per la quale si ha

$$\dot{V} = x_1(-x_1 + 2x_1^2x_2) + x_2(-x_2) = -(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1^3x_2 < 0$$

per x_1, x_2 sufficientemente piccoli.

Per applicare il teorema di Zubov occorre determinare una funzione $W(x)$ definita positiva ed una soluzione $V(x)$ dell'equazione $\dot{V}(x) = -W(x)(1 - V(x))\sqrt{1 + \|f(x)\|^2}$. Per semplificare l'equazione è comodo considerare la funzione

$$W(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{1 + \|f(x)\|^2}}$$

la quale è definita positiva per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Con tale scelta si ha

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}(-x_1 + 2x_1^2x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(-x_2) = -W(x)(1 - V)\sqrt{1 + \|f(x)\|^2} = -(x_1^2 + x_2^2)(1 - V).$$

Si verifica che

$$V = 1 - e^{-\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2(1-x_1x_2)}}$$

soddisfa questa equazione.

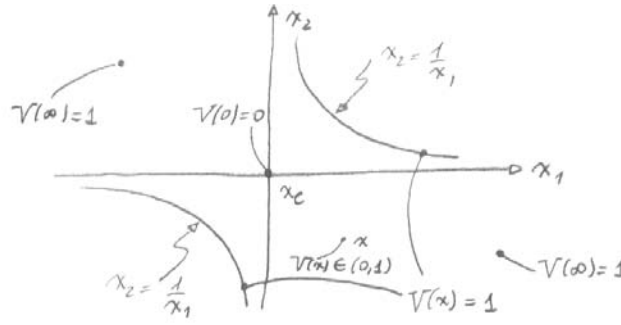


Figura 18

Inoltre V assume valore 1 per $x_1 x_2 = 1$, cioè per $x_2 = \frac{1}{x_1}$. Nella zona tra le due iperboli $x_2 = \pm \frac{1}{x_1}$ risulta poi $e^{-\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2(1-x_1 x_2)}} < 1$ in quanto $-\frac{x_2^2}{2} < 0$ e così pure $\frac{x_1^2}{2(1-x_1 x_2)} < 0$ in quanto $x_1 x_2 < 1$. Dunque l'esponentiale è minore di 1. Pertanto $V(x) \in (0, 1)$ e risulta $V(0) = 0$. Dunque la zona tra le due iperboli è la regione di stabilità dell'origine. $\square$

2.4 Teoremi di instabilità

Oltre a teoremi che affermano la stabilità o la stabilità asintotica di un punto d'equilibrio, vi sono teoremi che stabiliscono quando un punto d'equilibrio è instabile. Uno di essi è il teorema di Chetaev.

Sia $V: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, D dominio contenente x_e , una funzione $C^1(D)$ con $V(x_e) = 0$. La funzione $V(x)$ non deve necessariamente essere definita positiva. Per un qualsiasi $\varepsilon > 0$ si consideri uno stato iniziale x_0 tale che $\|x_0 - x_e\| < \varepsilon$ e tale che $V(x_0) > 0$. Considerato l'intorno sferico di raggio r

$$B_{x_e, r} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_e\| \leq r\}$$

con r sufficientemente piccolo perché $B_{x_e, r} \subset D$, si consideri l'insieme

$$U = \{x \in B_{x_e, r} \mid V(x) > 0\}.$$

Tale insieme U è non vuoto, in quanto contiene almeno x_0 . La frontiera di U è data dalla superficie $V(x) = 0$ e da $\|x - x_e\| = r$. Poiché $V(x_e) = 0$, x_e appartiene alla frontiera di U ed è interno a $B_{x_e, r}$.

Esempio. Sia

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2),$$

con $x_e = 0$ tale che $V(x_e) = 0$. Si noti che $x_1^2 - x_2^2 > 0$ per $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$ ossia per $x_1 > x_2$ nel primo quadrante, $x_1 < x_2$ nel terzo quadrante, $|x_1| > x_2$ nel secondo quadrante e $x_1 > |x_2|$ nel quarto quadrante.

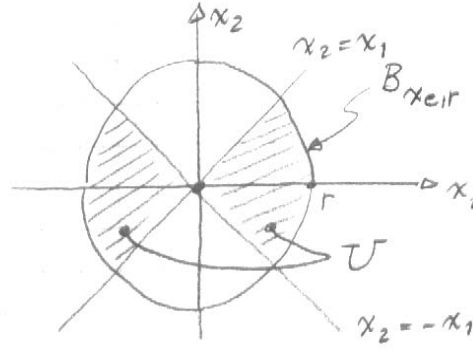


Figura 19

Dunque $V(x_0) > 0$ per x_0 arbitrariamente vicino all'origine.

Teorema 6. [Teorema di Chetaev] Sia x_e un punto di equilibrio di $\dot{x} = f(x)$. Sia $V: D \rightarrow \mathbb{R}$, D dominio contenente x_e , una funzione $C^1(D)$ tale che $V(x_e) = 0$ e $V(x_0) > 0$ per qualche x_0 arbitrariamente vicino a x_e , ossia tale che $\|x_0 - x_e\| < \varepsilon$ per $\varepsilon > 0$ qualsiasi. Se $\dot{V}(x) > 0$ in U , x_e è instabile.

Dim. Lo stato iniziale x_0 sia *interno* a U . Per ipotesi il valore di $V(x)$ in x_0 è positivo. Posto allora $V(x_0) = a > 0$, mostriamo che la traiettoria $x(t)$ che parte da tale generico punto iniziale x_0 deve lasciare U . Infatti fintantoché $x(t) \in U$ per ipotesi risulta $\dot{V}(x) > 0$, e quindi $V(x) \geq a$ ossia la funzione $V(x)$ cresce. Indicato con

$$\gamma = \min \{ \dot{V}(x) \mid x \in U \text{ e } V(x) \geq a \} > 0$$

il minimo valore assunto da $\dot{V}(x)$ fintantoché $x(t) \in U$, il quale esiste poiché $\dot{V}$ è una funzione continua e

$$\{x \mid x \in U \text{ e } V(x) \geq a\} = \{x \mid x \in B_{x_e, r} \text{ e } V(x) \geq a\}$$

è un insieme compatto, si ha

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_{t_0}^t \dot{V}(x(\xi)) d\xi \geq a + \int_{t_0}^t \gamma d\xi = a + \gamma(t - t_0).$$

Ma $V(x)$ è limitato su U , mentre per $t \rightarrow \infty$ risulta $V(x)$ non limitato. Dunque $x(t)$ deve lasciare U in tempo finito. Ora $x(t)$ non può lasciare U attraverso la superficie $V(x) = 0$, poiché ivi la funzione $V(x)$ sta crescendo ($V(x(t)) \geq a$), per cui deve lasciare U attraverso la sfera $\|x(t) - x_e\| = r$. Poiché ciò avviene per $\|x_0 - x_e\| < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, x_e è instabile. $\square$

Il teorema di Chetaev afferma in sostanza che se si riesce a trovare una funzione V che abbia $\dot{V}$ positiva laddove V è positiva, allora x_e è instabile. Si osservi inoltre che il teorema di Chetaev si riferisce a funzioni V di classe $C^1(D)$, *non necessariamente definite positive*. Se in particolare si considera una funzione V definita positiva, e se risulta che la sua derivata $\dot{V}$ è definita positiva in un intorno o comunque nell'insieme U , allora x_e è instabile.

Teorema 7. [Primo teorema di instabilità di Lyapunov] Se $V(x) \in C^1$ in un intorno di x_e ed ivi è tale che $V(x_e) = 0$ e $\dot{V}(x)$ è definita positiva, e $V(x)$ non è definita negativa o semidefinita negativa arbitrariamente vicino a x_e , allora x_e è instabile.

Dim. In base alle ipotesi deve esistere uno stato iniziale x_0 arbitrariamente vicino a x_e tale che $V(x_0) > 0$. Definito U , si è nell'ipotesi del teorema di Chetaev e x_e è instabile. $\square$

Teorema 8. [Secondo teorema di instabilità di Lyapunov] Se in un intorno D di x_e esiste una funzione $V \in C^1$ tale che $V(x_e) = 0$ e $\dot{V} = \lambda V + W(x)$ con $\lambda > 0$ e $W(x) \geq 0$ in D , se $V(x)$ non è definita negativa o semidefinita arbitrariamente vicino a x_e è instabile.

Dim. In base alle ipotesi deve esistere uno stato iniziale x_0 arbitrariamente vicino a x_e tale che $V(x_0) > 0$. Definito U , poiché $W(x) \geq 0$ in D e quindi in U , si ha $\dot{V} > 0$ in U . Per il teorema di Chetaev x_e è instabile. $\square$

Esempio. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + g_1(x) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + g_2(x)\end{aligned}$$

con

$$|g_i(x)| \leq k \|x\|_2^2, \quad i = 1, 2$$

in un intorno D di $x_e = 0$. Questa disuguaglianza implica $g_i(0) = 0$. Sia

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

con $V > 0$ per $x_2 = 0$. Si definisce l'insieme U dell'esempio precedente. Inoltre

$$\dot{V} = x_1^2 + x_1 g_1(x) + x_2^2 - x_2 g_2(x)$$

con

$$|x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)| \leq |x_1| |g_1(x)| + |x_2| |g_2(x)| \leq \|x\|_2 k \|x\|_2^2 + \|x\|_2 k \|x\|_2^2 = 2k \|x\|_2^3.$$

Si hanno due possibilità:

1. $x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)$ è positivo, per cui

$$x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x) \leq 2k \|x\|_2^3$$

e quindi

$$\dot{V} \leq \|x\|_2^2 (1 + 2k \|x\|_2)$$

ma tale relazione non può essere utilizzata per dedurre che $\dot{V}$ è positiva (laddove è positiva V);

2. $x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)$ è negativo, per cui

$$-(x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)) \leq 2k \|x\|_2^3$$

e dunque

$$x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x) \geq -2k \|x\|_2^3$$

sicché

$$\dot{V} \geq x_1^2 + x_2^2 - 2k \|x\|_2^3 = \|x\|_2^2 (1 - 2k \|x\|_2).$$

In questo secondo caso è possibile dedurre che $\dot{V}$ è positiva ove è positiva V . Infatti considerato l'intorno $B_{0,r} \subset D$, la quantità $(1 - 2k \|x\|_2)$ è positiva se $1 - 2kr > 0$, ossia se $r < \frac{1}{2k}$. Se dunque l'intorno dell'origine è abbastanza piccolo si ha che $\dot{V} > 0$. Per il teorema di Chetaev $x_e = 0$ è instabile. $\square$

2.5 Il principio di invarianza

Nel caso del pendolo con attrito

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l}\sin x_1\end{aligned}$$

utilizzando la funzione candidata di Lyapunov

$$V_1(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1)$$

si è trovato

$$\dot{V}_1 = -\frac{k}{ml^2}x_2^2 \leq 0$$

per cui si è potuto solo affermare, usando tale funzione, che $x_e = 0$ è stabile. Si è poi mostrato che in realtà è stabile asintoticamente, utilizzando un'altra funzione di Lyapunov. Si noti però che $\dot{V}_1$ è negativa sempre tranne che per $x_2 = 0$, ove si annulla. Ma perché risulti sempre $\dot{V}_1 = 0$, la traiettoria $x(t)$ del sistema deve essere confinata a $x_2 = 0$ e, considerate le equazioni dinamiche del pendolo, questo è possibile se e solo se

$$\dot{x}_2 = 0 = -\frac{k}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1)$$

ossia se e solo se $x_1 = 0$. Se invece $x_1 \in (-\pi, \pi)$, e nello stesso tempo è $x_2 = 0$, il sistema può mantenere $\dot{V}_1 = 0$ solo nell'origine. Pertanto $x(t)$ deve tendere a $x_e = 0$ per $t \rightarrow \infty$. Ciò è consistente con il fatto che a causa dell'attrito l'energia del sistema $V = ml^2 V_1$ decresce sempre quando il pendolo è in moto, ossia quando $\dot{V} = x_2 \neq 0$.

Più formalmente se in un dominio comprendente x_e si può trovare una funzione di Lyapunov con derivata, calcolata lungo le traiettorie del sistema, semidefinita negativa, e se è possibile stabilire, sfruttando le informazioni che provengono dalle informazioni del modello, che nessuna traiettoria può stare in punti dove $\dot{V} = 0$ ad eccezione di x_e , allora x_e è asintoticamente stabile. In questo consiste il teorema di invarianza di La Salle.

Premettiamo alcune definizioni. Se $x(t)$ è soluzione di

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0,$$

un punto $\bar{x}$ è un *punto limite positivo* di $x(t)$ se esiste una sequenza $\{t_n\}$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ e per cui $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = \bar{x}$. Si consideri l'insieme

$$L^+ = \{\bar{x} \mid \bar{x} \text{ è un punto limite positivo di } x(t)\}$$

detto *insieme limite positivo*.

Un insieme M è un *insieme invariante* rispetto a $\dot{x} = f(x)$ se $x_0 \in M$ implica che $x(t) \in M$ per qualsiasi $t \in \mathbb{R}$, ossia se una soluzione appartiene ad M ad un certo istante allora appartiene ad M per tutti i tempi passati e futuri.

Un insieme M è un *insieme positivamente invariante* rispetto a $\dot{x} = f(x)$ se $x_0 \in M$ implica che $x(t) \in M$ per ogni $t \geq t_0$.

Si dice poi che $x(t)$ si avvicina ad M per $t \rightarrow \infty$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un istante di tempo $T_\varepsilon > 0$ tale che

$$\inf_{\bar{x} \in M} \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \quad \forall t > T_\varepsilon$$

con $\inf_{\bar{x} \in M} \|x(t) - \bar{x}\|$ la distanza tra $x(t)$ ed M all'istante t (si usa l'estremo inferiore e non il minimo in quanto il punto x potrebbe non appartenere ad M ; ad esempio potrebbe essere $x \in \partial M$, e l'insieme M potrebbe essere aperto).

Se x_e è asintoticamente stabile, $\{x_e\}$ è l'insieme limite positivo di tutte le traiettorie che partono da punti x_0 nella regione di attrazione x_e . Un ciclo limite è invece l'insieme limite positivo di ogni soluzione che parte sufficientemente vicino al ciclo limite. La traiettoria $x(t)$ non si avvicina però a nessun punto in particolare del ciclo limite, ossia il fatto che $x(t)$ si avvicini ad M per $t \rightarrow \infty$ non implica che il $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ esista. Si comprende anche perché si considera la sequenza $\{t_n\}$ con $t_n \rightarrow \infty$, e non semplicemente $t \rightarrow \infty$.

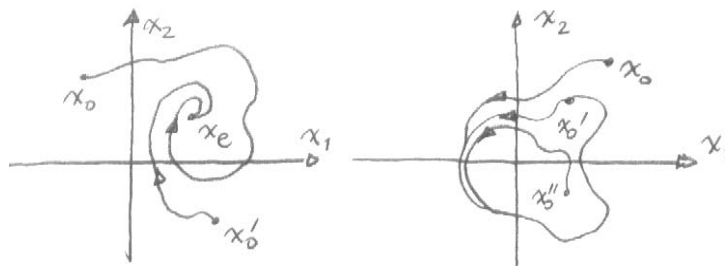


Figura 20

L'insieme $\{x_e\}$ e il ciclo limite sono poi insiemi invarianti. È invece un insieme positivamente invariante l'insieme

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$$

con $\dot{V}(x) \leq 0$ per ogni $x \in \Omega_c$ poiché, in base al teorema di Lyapunov, se $x(t)$ parte da Ω_c , vi ci rimane per ogni $t \geq t_0$.

Teorema 9. [La Salle] Sia $\Omega \subset D$ un compatto positivamente invariante rispetto a $\dot{x} = f(x)$. Sia $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C^1(D)$ con $V(x_e) = 0$ e $\dot{V}(x) \leq 0$ in Ω . Sia

$$E = \{x \in \Omega \mid \dot{V}(x) = 0\}.$$

l'insieme dei punti di Ω in cui $\dot{V}(x) = 0$. Se $\mathcal{E}$ è il più grande insieme invariante contenuto in E , allora ogni soluzione che parte in Ω si avvicina ad $\mathcal{E}$ per $t \rightarrow \infty$.

Dim. Sia $x(t)$ la soluzione di $\dot{x} = f(x)$, $x_0 \in \Omega$. Poiché $\dot{V} \leq 0$ in Ω , per il teorema di Lyapunov x_e è stabile e $x(t)$ è limitato, ossia $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon$. Inoltre $V(x(t))$ è una funzione non crescente in t . Infine, essendo $V(x)$ una funzione continua su un compatto Ω , ha in Ω un minimo a , che sarà assunto per tempi infiniti visto che $\dot{V} \leq 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = a.$$

L'insieme limite positivo L^+ risulta essere in Ω , poiché Ω è un insieme chiuso. Si potrebbe mostrare che se $x(t)$ è limitata e contenuta in D per ogni $t \geq t_0$, allora L^+ è non vuoto, è chiuso e limitato (compatto), è invariante, e tale che $x(t) \rightarrow L^+$ per $t \rightarrow \infty$.

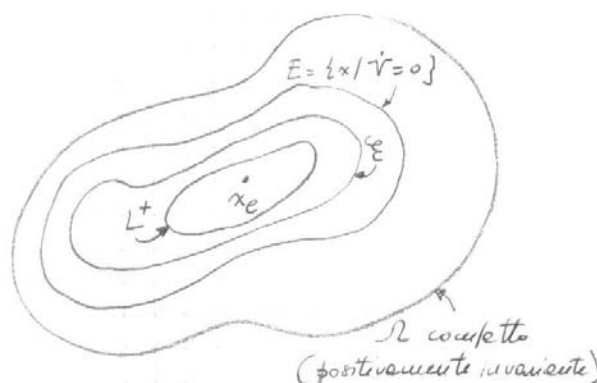


Figura 21

Considerato un generico punto limite positivo $\bar{x} \in L^+$, per definizione esiste una sequenza $\{t_n\}$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = \bar{x}.$$

Per la continuità di V

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = V(\bar{x}) = a = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)).$$

Dunque $V(\bar{x}) = a$, per ogni $\bar{x} \in L^+$. Dunque $\dot{V}(x) = 0$ in L^+ e quindi

$$\begin{array}{ccccc} L^+ & \subset & \mathcal{E} & \subset & E \subset \Omega. \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{poiché } \dot{V}=0 \text{ su } L^+ & & \text{poiché } \mathcal{E} \text{ è il più grande insieme invariante} \\ & & & & \text{contenuto in } E \text{ (e dunque anch'esso è} \\ & & & & \text{caratterizzato dal fatto che } \dot{V}=0 \text{ su } \mathcal{E}) \end{array}$$

Si è detto che si potrebbe mostrare che se $x(t)$ è limitato, come in questo caso, e se per ogni $t \geq t_0$ è contenuta D , come in questo caso poiché $x_0 \in \Omega$ è per ipotesi positivamente invariante, allora

$$x(t) \rightarrow L^+ \text{ per } t \rightarrow \infty.$$

Essendo $L^+ \subset \mathcal{E}$ risulta dunque che ogni soluzione che parte in Ω tende ad $\mathcal{E}$ per $t \rightarrow \infty$. □

Si noti che *il teorema di La Salle non richiede che $V(x)$ sia definita positiva*. Inoltre la costruzione del compatto Ω non è legata con la costruzione di $V(x)$, anche se spesso la costruzione di $V(x)$ assicura l'esistenza di Ω . Se in particolare $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$ è limitato e $\dot{V}(x) \leq 0$ in Ω_c , si può prendere $\Omega = \Omega_c$, e se $V(x)$ è definita positiva Ω_c è limitato per c sufficientemente piccolo; quest'ultima cosa non sempre è vera se $V(x)$ non è definita positiva, come ad esempio in $V(x) = x_1^2 - x_2^2$, in cui Ω_c è sempre illimitato per ogni c .

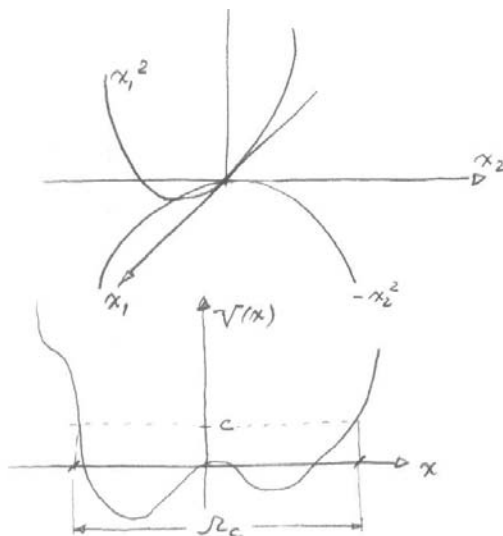


Figura 22

Se $V(x)$ è radialmente illimitata, ossia $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, allora per ogni c l'insieme Ω_c è limitato, anche se $V(x)$ non è definita positiva.

é più facile vedere se $V(x)$ è radialmente illimitata se $V(x)$ è definita positiva, in quanto basta studiare se va all'infinito lungo gli assi coordinati. Ciò non è sufficiente se $V(x)$ non è definita positiva. Ad esempio $V(x) = x_1^2 - x_2^2$ va all'infinito lungo gli assi x_1 e x_2 ma non quando $x_1 = x_2$.

L'interesse del teorema di La Salle è quando il più grande insieme invariante $\mathcal{E}$ contenuto in $E = \{x \mid \dot{V} = 0\}$ è costituito solo x_e . Per far ciò occorre mostrare che non possono identicamente restare in E altre soluzioni se non quella banale $x(t) = x_e$.

Esempio. Il sistema

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = -x_1$$

ha $x_e = 0$ punto d'equilibrio isolato. Considerata la funzione

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

risulta

$$\dot{V}(x) = x_1 x_2 - x_1^4 - x_1 x_2 = -x_1^4 \leq 0.$$

Quindi

$$E = \{x \mid x_1 = 0\}.$$

Poiché $x(t)$ tende al più grande insieme invariante contenuto in E , ossia per la traiettoria $x(t)$ è sempre $x_1 = 0$, si deve avere

$$x_1 \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 \equiv 0 = (x_2 - x_1^3)|_{x_1=0} = x_2.$$

Dunque

$$\mathcal{E} = \{x \mid x_1 = 0, x_2 = 0\}$$

ossia $x_e = 0$ è asintoticamente stabile. □

La Salle dimostrò il suo teorema nel 1960. Nel 1952 Barbaskin e Krasovskii avevano dimostrato dei casi particolari di tali teoremi, e nel 1959 Krasovskii li aveva generalizzati. Dunque sarebbe più corretto parlare di teorema di Krasovskii-La Salle. Le particolarizzazioni di Barbaskin e Krasovskii si riferiscono al caso in cui $V(x)$ è definita positiva.

Teorema 10. Sia x_e un punto di equilibrio di $\dot{x} = f(x)$. Sia $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C^1(D)$, definita positiva sul dominio D contenente x_e , con $\dot{V} \leq 0$ in D . Sia $E = \{x \mid \dot{V} = 0\}$ e non esistono soluzioni che possono stare identicamente in E se non la soluzione $x(t) = x_e$. Allora la x_e è asintoticamente stabile. Se poi $D = \mathbb{R}^n$ e V è radialmente illimitata, x_e è globalmente asintoticamente stabile.

é ovvio che se $\dot{V}$ è definita negativa si riottiene il teorema di Lyapunov e quello di Barbaskin-Krasovskii.

Esempio. Sia

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g(x_1) - h(x_2)\end{aligned}$$

con g, h funzioni localmente Lipschitz, nulle in $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ e tali che $x_1 = g(x_1) > 0$, $x_2 = h(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in (-a, 0) \cup (0, a)$. Per

$$g(x_1) = \frac{g}{l} \sin(x_1), \quad h(x_2) = \frac{k}{ml^2} x_2$$

si riottiene l'equazione del pendolo con attrito.

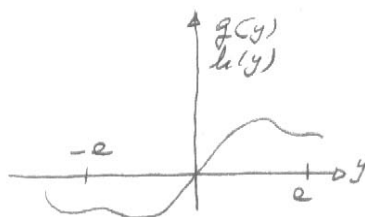


Figura 23

Si ha $x_e = 0$ isolato. Potrebbero esistere altri punti di equilibrio, dipendentemente dall'espressione di $g(x_1)$ e $h(x_2)$. Come funzione di Lyapunov candidata consideriamo una funzione del tipo energia

$$V(x) = \int_0^{x_1} g(\xi) d\xi + \frac{1}{2} x_2^2$$

definita positiva su D e di classe $C^1(D)$. Si trova che

$$\dot{V}(x) = g(x_1)x_2 + x_2(-g_1(x_1) - h(x_2)) = -x_2h(x_2)$$

che è semidefinita negativa su D . Dunque

$$E = \{x \mid \dot{V}(x) = 0\} = \{x_2 = 0\}.$$

Se la traiettoria deve appartenere identicamente ad E

$$x_2 \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = 0 = -g(x_1) - 0.$$

Quindi si trova $x_1 = 0$. Per il teorema di La Salle, o per il precedente teorema applicabile poiché l'unica traiettoria sempre in E è $x(t) = 0$, si deduce che x_e è asintoticamente stabile.

Se poi risulta

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \int_0^{x_1} g(\xi) d\xi = \infty$$

si ha che $V(x)$ è radialmente illimitata, e $x_e = 0$ è globalmente asintoticamente stabile. $\square$

Il teorema di La Salle estende il teorema di Lyapunov nei seguenti aspetti

- 1) non richiede che $\dot{V}$ sia definita negativa;
- 2) dà una stima della regione di attrazione che non è necessariamente della forma $\Omega_c = \{x \mid V \leq c\}$ (il teorema di La Salle parla di un generico compatto positivamente invariante Ω , ed Ω_c è un tipo particolare);
- 3) può essere usato quando ho un insieme di punti d'equilibrio (piuttosto che un punto d'equilibrio isolato);
- 4) $V(x)$ non deve essere necessariamente definita positiva.

Esempio. Sia

$$\dot{x}_1 = -x_1 + (x_2 - a)$$

$$\dot{x}_2 = \gamma x_1^2$$

con $\gamma > 0$. La retta $x_1 = 0$ è un insieme di punti d'equilibrio. Considerata

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)^2$$

con b da fissare, si ha

$$\dot{V}(x) = -x_1^2(x_2 - a) + \frac{1}{\gamma}(x_2 - b)\gamma x_1^2 = -(b - a)x_1^2.$$

Se $b > a$, $\dot{V} \leq 0$. Poiché $V(x)$ è radialmente illimitata, $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) \leq c\}$ è un compatto e, poiché $\dot{V} \leq 0$, è positivamente invariante. Applicando il teorema di La Salle con $\Omega = \Omega_c$, si ha

$$E = \{x_1 = 0\} = \mathcal{E}$$

poiché E è costituito da tutti punti d'equilibrio. Dunque per ogni x_0 , per $t \rightarrow \infty$ si ha $x(t)$ tende a tale insieme $\mathcal{E}$. $\square$

Esercizio. Sia dato un processo descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_1 x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2^5 + 2x_3^2$$

$$\dot{x}_3 = ax_3^3 - 2x_2 x_3 + bu$$

in cui $a \in \mathbb{R}$ e $b = 0$. Verificare che $x_e = 0$ è di equilibrio per il sistema. Studiare al variare di a la proprietà di stabilità dell'origine.

Considerata la funzione candidata di Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

si trova che

$$\dot{V} = x_1(-x_1^3 + x_1 x_2) + x_2(-x_1^2 - x_2^5 + 2x_3^2) + x_3(ax_3^3 - 2x_2 x_3 + bu) = -x_1^4 - x_2^6 + ax_3^4 + bux_3$$

e posto $b = 0$ si trova che

1. se $a > 0$ allora $x_e = 0$ è instabile per il teorema di Chetaev. Infatti in un suo intorno generico si ha $V > 0$ e $\dot{V} > 0$ in un sottoinsieme $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \dot{V} > 0\}$.
2. Se $a < 0$ allora $x_e = 0$ è asintoticamente stabile per il teorema di Lyapunov.
3. Se $a > 0$ allora $x_e = 0$ è stabile per il teorema di Lyapunov. Inoltre

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid V = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0, x_2 = 0\}$$

e il più grande sottoinsieme invariante $\mathcal{E}$ in E si calcola ponendo

$$\dot{x}_2 = 0 = -x_1^2 - x_2^5 + 2x_3^2 = 2x_3^2$$

e quindi

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$$

per cui per il teorema di La Salle $x_e = 0$ è asintoticamente stabile. $\square$

Esercizio. Considerato il sistema dell'esercizio precedente con $a > 0$ e $b \neq 0$, determinare u tale che $x_e = 0$ sia asintoticamente stabile. Si consiglia di utilizzare a tal fine una funzione candidata di Lyapunov e determinare u in modo tale che sia una funzione di Lyapunov.

Per quanto visto nell'esercizio precedente

$$\dot{V} = -x_1^4 - x_2^6 + ax_3^4 + bux_3$$

e quindi

$$u = \frac{1}{b}(-ax_3^3 - x_3)$$

fornisce

$$\dot{V} = -x_1^4 - x_2^6 - x_3^2$$

e per il teorema di Lyapunov $x_e = 0$ è asintoticamente stabile. $\square$

Esercizio. Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_1x_2^2 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= \gamma(-x_1^2x_2 + x_1x_2)\end{aligned}$$

e supposto che $\gamma > 0$ sia una costante, studiare la stabilità dell'origine. Supposto poi che $\gamma = \gamma(t) > 0$ con

$$\dot{\gamma}(t) = a\gamma(t),$$

con a una costante, studiare la stabilità dell'origine al variare del parametro a . Si può avere stabilità esponenziale?

Per rispondere a queste domande si consideri la funzione candidata di Lyapunov (si noti che $\gamma > 0$)

$$V = \frac{1}{2} \left(x_1^2 + \frac{1}{\gamma} x_2^2 \right)$$

per la quale si trova che

$$\dot{V} = -x_1^4 \leq 0.$$

Dunque

$$E = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid V = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$$

e il più grande sottoinsieme invariante $\mathcal{E}$ in E si calcola ponendo

$$\dot{x}_1 = 0 = -x_2^2$$

e quindi

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}.$$

Pertanto per il teorema di La Salle $x_e = 0$ è asintoticamente stabile.

Considerata infine la stessa funzione candidata di Lyapunov (si noti anche qui che $\gamma(t) > 0$) si ottiene

$$\dot{V} = -\left(x_1^4 + \frac{a}{2\gamma^2}x_2^2\right).$$

Escluso il caso $a = 0$, corrispondente a γ costante, studiato nel caso precedente, si ha che

- 1) se $a > 0$ allora $\dot{V} < 0$ ed x_e è asintoticamente stabile. Non si può però avere stabilità esponenziale dell'origine in quanto la parte lineare non risulta avere l'origine come punto di equilibrio asintoticamente stabile.
- 2) Se $a < 0$ allora

$$\dot{V} < -x_1^4 + \left|\frac{a}{2\gamma^2}\right|x_2^2$$

ed $x_e = 0$ è instabile per il teorema di Chetaev, in quanto in un suo intorno generico si ha $V > 0$ e $\dot{V} > 0$ in un sottoinsieme $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \dot{V} > 0\}$. $\square$

2.6 I sistemi lineari

2.6.1 Sistemi stazionari

Un sistema lineare stazionario $\dot{x} = f(x) = Ax$ ha sempre un punto d'equilibrio nell'origine. Se poi $\varrho(A) < n$ allora $\ker A \neq \{0\}$ e si ha un sottospazio di punti d'equilibrio. È noto che $x_e = 0$ è stabile se e solo se gli autovalori di A hanno parte reale minore o uguale a zero, se la molteplicità geometrica¹⁷

¹⁷ Mentre la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i , $i = 1, \dots, r$ è quella del polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{\mu_r},$$

la molteplicità geometrica associata a λ_i è la lunghezza m_i della più lunga catena di autovettori generalizzati

$$\begin{aligned} (A - \lambda_i I)^j u_i^j &= 0 & j = 1, \dots, m_i \\ (A - \lambda_i I)^{j-1} u_i^j &\neq 0 \end{aligned}$$

associabili a λ_i . Essa è poi pari alla dimensione del più grande sottoblocco J_{ij} della matrice di Jordan associata a λ_i

$$J = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} J_{i1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_{is_i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, r, \quad J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

ove $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono gli autovalori di A . Si ricorda che si ha sempre $m_i \leq \mu_i$ e che la trasformazione che pone A in forma di Jordan è la matrice T tale che

$$T^{-1} = \left(\dots \dots \underbrace{u_i^1 \ u_i^2 \ \dots \ u_i^{m_i}}_{1^a \text{ catena}} \ \dots \ \underbrace{u_i^1 \ u_i^2 \ \dots \ u_i^{r_i}}_{s_i^a \text{ catena}} \ \dots \dots \right).$$

Inoltre si ricorda che le s_i catene di autovettori associate a λ_i si possono ricavare imponendo

$$(A - \lambda_i I)u_i^j = u_i^{j-1}, \quad j = 1, \dots, m_i.$$

è unitaria, e minore di zero se la molteplicità geometrica è superiore a uno. È invece asintoticamente stabile (ed in più globalmente) se e solo se tali autovalori hanno tutti parte reale minore di zero.

Esempio. Si considerino il sistema S dato da

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

e i sistemi serie e parallelo descritti in figura.

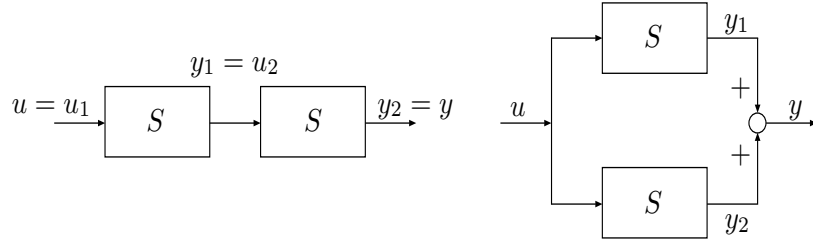


Figura 24 – Sistema serie e sistema parallelo

Nel caso serie la matrice dinamica è

$$A_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow TA_s T^{-1} = J_s = \begin{pmatrix} j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -j \end{pmatrix}$$

e dunque è instabile in quanto la molteplicità geometrica è pari a 2, mentre nel caso parallelo

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow TA_p T^{-1} = J_p = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \end{pmatrix}$$

si ha la stabilità in quanto la molteplicità geometrica è pari a 1. $\square$

Quando $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$ la matrice A è detta *di Hurwitz* o di stabilità. Per $\dot{x} = Ax$ l'equilibrio $x_e = 0$ è asintoticamente stabile se e solo se, fissata una qualsiasi matrice simmetrica Q definita positiva, l'equazione di Sylvester (o di Lyapunov)

$$PA + A^T P = -Q$$

nell'incognita P ammette soluzione unica, simmetrica e definita positiva. Infatti se l'equazione di Sylvester ha soluzione unica, simmetrica e definita positiva, considerata la funzione $V = x^T P x$ si ha $\dot{V} = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (PA + A^T P)x = -x^T Q x$, che è definita negativa. Dunque $x_e = 0$ è asintoticamente stabile. Se viceversa $x_e = 0$ è stabile asintoticamente, ossia $\sigma(A) \in \mathbb{C}^-$, considerata la matrice

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt,$$

che esiste perché l'integrando è sommabile in quanto $\sigma(A) \in \mathbb{C}^-$, si nota che

$$PA + A^T P = \int_0^\infty [e^{A^T t} Q e^{At} + A^T e^{A^T t} Q e^{At}] dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt} [e^{A^T t} Q e^{At}] dt = -Q$$

ossia si nota che è soluzione dell'equazione di Sylvester. Si noti che P è definita positiva

$$x^T P x = \int_0^\infty x^T e^{A^T t} Q e^{A t} x dt = \int_0^\infty z^T Q z dt > 0$$

poiché $Q > 0$ e $x = 0$ se e solo se $z = e^{A t} x = 0$, in quanto $e^{A t}$ è sempre non singolare. È infine l'unica soluzione possibile in quanto, date le matrici R, S, T di dimensioni opportune, l'equazione

$$X R - S X = T$$

nell'incognita X ha soluzione unica se R ed S non hanno autovalori comuni. Nel nostro caso $X = P$, $R = A$ e $S = -A^T$, $T = -Q$, con $\sigma(-A^T) \in \mathbb{C}^+$. L'unicità si può anche mostrare notando che se P e $\bar{P}$ sono due soluzioni distinte

$$P A + A^T P = -Q, \quad \bar{P} A + A^T \bar{P} = -Q \quad \Rightarrow \quad (P - \bar{P}) A + A^T (P - \bar{P}) = 0$$

da cui

$$e^{A t} [(P - \bar{P}) A + A^T (P - \bar{P})] e^{A^T t} = \frac{d}{dt} e^{A^T t} (P - \bar{P}) e^{A t} = 0$$

(si ricorda che $M e^{M t} = e^{M t} M$). Dunque $e^{A^T t} (P - \bar{P}) e^{A t}$ è costante per $\forall t$, sicché posto $t = 0$ e $t = \infty$ si ha

$$\begin{array}{ccc} P - \bar{P} & = & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ t=0 & & t \rightarrow \infty \end{array}$$

in quanto $\sigma(A) \in \mathbb{C}^-$. Dunque $P = \bar{P}$.

Si è detto che Q nell'equazione di Sylvester deve essere definita positiva. In realtà se la coppia (A, C) è osservabile

$$\rho \begin{pmatrix} C & C A & \dots & C A^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

Q può essere anche una matrice semidefinita positiva del tipo

$$Q = \gamma C^T C, \quad \gamma > 0.$$

Si ricorda che, essendo la matrice C di dimensioni $p \times n$, tale matrice Q ha rango p (ossia pari alla dimensione "interna"), e quindi non ha rango pieno, come dovrebbe essere per una matrice definita positiva.

Ora se esiste una matrice $P = P^T > 0$ tale che $P A + A^T P = -\gamma C^T C$, allora considerata la funzione $V = x^T P x$ si ha $\dot{V} = -x^T C^T C x \leq 0$. Per il teorema di La Salle si ha dunque

$$E = \left\{ x \mid \dot{V} = 0 \right\} = \left\{ x \mid C x = C e^{A t} x_0 = 0 \right\} = \left\{ x \mid C (I + A t + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots) x_0 = 0 \right\},$$

e ciò implica che $E = \mathcal{E} = \{x_0 = 0\}$. Alla stessa conclusione si arriva considerando $E = \{x \mid C x = 0\}$ e poi imponendo

$$C x = 0, \quad C \dot{x} = C A x = 0, \quad \dots \quad C x^{(n-1)} = C A^{n-1} x = 0$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} C & C A & \dots & C A^{n-1} \end{pmatrix} x = 0$$

e poiché la matrice che moltiplica x ha rango pieno per ipotesi si deduce che $\mathcal{E} = \{x = 0\}$. Per il teorema di La Salle $x_e = 0$ è asintoticamente stabile. Se viceversa x_e è asintoticamente stabile, ossia A è Hurwitz, si può prendere

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt$$

e ripetere le stesse considerazioni fatte per mostrare che $P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$ è soluzione definita positiva e unica dell'equazione di Sylvester.

L'equazione di Sylvester è un'equazione algebrica lineare risolubile con metodi numerici ovvero trasformando l'equazione stessa.

Esempio. Siano $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = I$. Posto $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ si ha

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2p_2 & -p_1 - p_2 + p_3 \\ -p_1 - p_2 + p_3 & -2p_2 - 2p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

L'equazione di Sylvester può essere usata per verificare se $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$ senza calcolare gli autovalori. Si prende infatti $Q = I > 0$ e si trova P se $P = P^T > 0$ allora A è Hurwitz, altrimenti no. In realtà è computazionalmente più efficiente calcolare gli autovalori di A . L'interesse dell'equazione di Sylvester è più nella determinazione di $P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$ (se $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$) e quindi di una funzione di Lyapunov.

2.6.2 Sistemi non stazionari

Nel caso di sistemi lineari non stazionari

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0$$

è noto¹⁸ che la soluzione può scriversi considerando la funzione di transizione dello stato $\Phi(t, t_0)$

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0.$$

Per essi valgono i seguenti risultati. In particolare essi affermano che per i sistemi lineari la stabilità asintotica uniforme di x_e è equivalente alla stabilità esponenziale¹⁹; questa proprietà è peculiare dei sistemi lineari, mentre in generale vale solo che la stabilità esponenziale implica quella asintotica.

¹⁸ Poi è noto che la matrice di transizione soddisfa l'equazione differenziale matriciale

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I$$

e gode della proprietà di semigrupp e $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, \tau)\Phi(\tau, t_0)$, $\tau \in [t_0, t]$. Inoltre $\Phi^{-1}(\tau, t) = \Phi(t, \tau)$, e una sua conseguenza è che

$$\frac{d}{dt} \Phi(\tau, t) = -\Phi(\tau, t)A(t).$$

¹⁹ Ciò ovviamente vale in particolare anche per i sistemi lineari stazionari.

Teorema 11. Il punto di equilibrio $x_e = 0$ di $\dot{x} = A(t)x$ è (globalmente) uniformemente asintoticamente stabile se e solo se

- 1) $\sup_{t_0 \geq 0} \left(\sup_{t \geq t_0} \|\Phi(t, t_0)\| \right) < \infty$, il che equivale alla stabilità di $x_e = 0$;
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, t_0)\| = 0$ uniformemente in t_0 , il che equivale alla attrattività di $x_e = 0$.

Dim. La dimostrazione discende direttamente dall'espressione della soluzione $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$, sicché²⁰

$$\|x(t) - x_e(t)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|x_0 - x_e\|.$$

La globalità deriva dal fatto che il sistema è lineare. $\square$

Teorema 12. Il punto di equilibrio $x_e = 0$ di $\dot{x} = A(t)x$ è (globalmente) esponenzialmente stabile se e solo se risulta

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq ke^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

per qualche $k, \lambda > 0$.

Dim. Anche questa dimostrazione discende direttamente dall'espressione della soluzione $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$. $\square$

Teorema 13. Il punto di equilibrio $x_e = 0$ di $\dot{x} = A(t)x$ è (globalmente) uniformemente asintoticamente stabile se e solo se è (globalmente) esponenzialmente stabile.

Dim. Infatti se $x_e = 0$ esponenzialmente stabile si ha che $\sup_{t_0 \geq 0} \left(\sup_{t \geq t_0} \|\Phi(t, t_0)\| \right) < \infty$ (stabilità) e $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, t_0)\|$ uniformemente in t_0 (attrattività).

Viceversa se x_e è uniformemente asintoticamente stabile esiste una funzione $\beta \in \mathcal{KL}$ tale che

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq t_0.$$

Dunque, per definizione di norma

$$\|\Phi(t, t_0)\| = \max_{\|x - x_e\|=1} \|\Phi(t, t_0)(x - x_e)\| \leq \max_{\|x - x_e\|=1} \beta(\|x - x_e\|, t - t_0) = \beta(1, t - t_0) \xrightarrow{t-t_0 \rightarrow \infty} 0$$

per cui per definizione di limite esiste un $T > 0$ tale che $\beta(1, T) \leq \frac{1}{e}$.

Per ogni $t \geq t_0$, sia N il più piccolo intero positivo tale che $t \leq t_0 + NT$, sicché $t - t_0 \leq NT$. Si divide $[t_0, t_0 + (N-1)T]$ in $N-1$ intervalli di ampiezza T . Dunque

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_0 + (N-1)T) \Phi(t_0 + (N-1)T, t_0 + (N-2)T) \dots \Phi(t_0 + T, t_0)$$

per cui

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, t_0)\| &\leq \left\| \Phi(t, t_0 + (N-1)T) \right\| \prod_{k=1}^{N-1} \left\| \Phi(t_0 + kT, t_0 + (k-1)T) \right\| \\ &\leq \beta(1, 0) \prod_{k=1}^{N-1} \frac{1}{e} = e \beta(1, 0) e^{-N} \leq e \beta(1, 0) e^{-(t-t_0)T} = ke^{-\lambda(t-t_0)} \end{aligned}$$

²⁰ $x_e = \Phi(t, t_0)x_e$.

con $k = e\beta(1, 0)$, $\lambda = \frac{1}{T}$ e

$$\|\Phi(t, t_0 + (N-1)T)\| \leq \beta(1, 0), \quad e^{-N} = e^{-\frac{NT}{T}} = e^{-\lambda NT} \leq e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

La globalità è dovuta al fatto che il sistema è lineare. $\square$

Si noti che per un sistema tempo variante *non si può dedurre la stabilità asintotica uniforme di x_e dalla posizione degli autovalori di $A(t)$* , che eventualmente potrebbero anche essere tutti a parte reale minore di zero $\forall t \geq 0$. Questo è illustrato dal seguente esempio.

Esempio. Sia

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + 3/2 \cos^2 t & 1 - 3/2 \sin t \cos t \\ -1 - 3/2 \sin t \cos t & -1 + 3/2 \sin^2 t \end{pmatrix}$$

Essa ha gli autovalori $\lambda = -\frac{1}{4} \mp j\frac{\sqrt{7}}{4}$ nel semipiano sinistro, ma $x_e = 0$ è instabile. Infatti si trova che

$$\Phi(t, 0) = \begin{pmatrix} e^{t/2} \cos t & e^{-t} \sin t \\ -e^{t/2} \sin t & e^{-t} \cos t \end{pmatrix}$$

e per $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ si ha $x(t) = \Phi(t, 0) x_0 = e^{t/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \rightarrow \infty$. $\square$

Il teorema precedente non è molto utile per stabilire che x_e è stabile asintoticamente, ma garantisce l'esistenza di una funzione di Lyapunov. Infatti vale il seguente risultato.

Teorema 14. [Converse Theorem nel caso lineare] Si consideri il sistema $\dot{x} = A(t)x$ con $A(t)$ continua e limitata, ossia tale che

$$\|A(t)\| \leq L, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si supponga che $x_e = 0$ sia un punto d'equilibrio uniformemente asintoticamente stabile. Se $Q(t)$ è una matrice continua, limitata, definita positiva e simmetrica

$$\begin{aligned} Q(t) &\in C^0 & 0 \leq c_3 I \leq Q(t) \leq c_4 I, \quad \forall t \geq t_0 \\ x^T Q(t) x &\geq 0, \quad \forall x \neq 0 \text{ con } x^T Q(t) x = 0 \Leftrightarrow x = 0 & Q(t) = Q^T(t) \end{aligned}$$

allora esiste una matrice $P(t)$ di classe C^1 , limitata, definita positiva e simmetrica soluzione dell'equazione di Riccati

$$\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + Q(t)$$

e $V = (x - x_e)^T P(t)(x - x_e)$ è una funzione di Lyapunov per il sistema, che soddisfa le condizioni del teorema di Lyapunov

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x - x_e\|) &\leq W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|) \\ \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} A(t) &= \dot{V}(t, x) \leq -W_3(x) \leq -\alpha_3(\|x - x_e\|) \end{aligned}$$

essendo $W_i(x) \in C^0$ e definite positive, $\alpha_i \in \mathcal{K}$. $\square$

Dim. Sia

$$P(t) = \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau$$

con $\Phi(\tau, t)x$ la soluzione di $\dot{x} = A(t)x$ con condizioni iniziali $(t, x(t) = x)$. Quindi

$$x^T P(t)x = \int_t^\infty x^T \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) x \, d\tau \leq \int_t^\infty c_4 \|\Phi(\tau, t)\|_2^2 \|x\|_2^2 \, d\tau.$$

Ma per il teorema precedente x_e è globalmente uniformemente asintoticamente stabile se e solo se $\|\Phi(\tau, t)\| \leq k e^{-\lambda(\tau-t)}$, $\forall \tau \geq t \geq 0$, sicché

$$x^T P(t)x \leq \int_t^\infty c_4 k^2 e^{-2\lambda(\tau-t)} \|x\|_2^2 \, d\tau = c_4 k^2 \|x\|_2^2 \frac{(-1)}{2\lambda} (0 - 1) = c_2 \|x\|_2^2, \quad c_2 = \frac{c_4 k^2}{2\lambda}.$$

Poiché $\|A(t)\| \leq L$, $\forall t$ allora $f(t, x) = A(t)x$ è Lipschitz. Dunque²¹

$$\left| \frac{d}{dt} x^T x \right| = |2x^T \dot{x}| \leq 2\|x\| \|A(t)x\| \leq 2\|x\|_2^2 L = 2Lx^T x$$

e quindi

$$-2Lx^T x \leq \frac{d}{dt} x^T x \leq 2Lx^T x$$

ossia, per $x \neq 0$

$$-2L \, dt \leq \frac{dx^T x}{x^T x} \leq 2L \, dt$$

da cui

$$e^{-2L(\tau-t)} \leq \frac{x^T(\tau)x(\tau)}{x^T x} \leq e^{2L(\tau-t)}.$$

Pertanto

$$\|x(\tau)\|_2^2 = \|\Phi(\tau, t)x\|_2^2 \geq \|x\|_2^2 e^{-2L(\tau-t)}$$

Dunque

$$\begin{aligned} x^T P(t)x &\geq \int_t^\infty x^T \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) x \, d\tau \geq \int_t^\infty c_3 \|\Phi(\tau, t)x\|_2^2 \, d\tau \\ &\geq \int_t^\infty c_3 e^{-2L(\tau-t)} \|x\|_2^2 \, d\tau = \frac{c_3}{2L} \|x\|_2^2 = c_1 \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

In definitiva

$$c_1 \|x\|_2^2 \leq x^T P(t)x \leq c_2 \|x\|_2^2$$

sicché $P(t)$ è definita positiva e limitata. Ovviamente è anche C^1 e simmetrica. Inoltre, considerando che

$$\Phi(t, t) = I, \quad \dot{\Phi}(\tau, t) = -\Phi(\tau, t)A(t)$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= -\Phi^T(t, t)Q(t)\Phi(t, t) + \int_t^\infty \dot{\Phi}^T(\tau, t)Q(\tau)\Phi(\tau, t) \, d\tau + \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t)Q(\tau)\dot{\Phi}(\tau, t) \, d\tau \\ &= -Q(t) - A^T(t) \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t)Q(\tau)\Phi(\tau, t) \, d\tau - \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t)Q(\tau)\Phi(\tau, t) \, d\tau A(t) \\ &= -Q(t) - A^T(t)P(t) - P(t)A(t). \end{aligned}$$

Infine in un precedente esempio si è mostrato che

$$\frac{d}{dt} x^T P(t)x \leq -c_3 \|x\|_2^2.$$

□

²¹ Si veda l'esercizio a pag. 41.

In particolare se $A(t) = A$ è costante si ritrova l'espressione di P già vista per i sistemi stazionari

$$P(t) = \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) Q \Phi(\tau, t) d\tau = \int_t^\infty e^{A^T(\tau-t)} Q e^{A(\tau-t)} d\tau = \int_0^\infty e^{A^T \xi} Q e^{A \xi} d\xi.$$

$\uparrow$
 $\xi = \tau - t$

2.7 Il metodo indiretto di Lyapunov

2.7.1 Sistemi stazionari

Il *metodo indiretto di Lyapunov* per lo studio di un punto d'equilibrio x_e per il sistema $\dot{x} = f(x)$ si basa sullo *studio della stabilità dell'origine di un opportuno sistema lineare*.

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, D dominio contenente x_e , con $f \in C^1(D)$. Il teorema della media²² assicura che per ogni coppia $x, \bar{x} \in D$, esiste un punto z_i appartenente al segmento $L(x, \bar{x})$ che unisce x e $\bar{x}$ per cui

$$f_i(x) - f_i(\bar{x}) = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|_{z_i} (x - \bar{x}).$$

Nel nostro caso $\bar{x} = x_e$ e $f_i(x_e) = 0$, per cui si ha

$$f_i(x) = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|_{z_i} (x - x_e) = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|_{x_e} (x - x_e) + \left[\left. \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|_{z_i} - \left. \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|_{x_e} \right] (x - x_e)$$

ovvero

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{z_1} \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x} \right|_{z_n} \end{pmatrix} (x - x_e) + \left[\begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{z_1} \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x} \right|_{z_n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x_e} \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x} \right|_{x_e} \end{pmatrix} \right] (x - x_e) \\ &= A(x - x_e) + g(x) \end{aligned}$$

con

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e}, \quad g(x) = \left[\begin{pmatrix} \vdots \\ \left. \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|_{z_i} \\ \vdots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vdots \\ \left. \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|_{x_e} \\ \vdots \end{pmatrix} \right] (x - x_e).$$

Le funzioni $g_i(x)$ sono tali che

$$|g_i(x)| = \|g_i(x)\| \leq \left\| \left. \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|_{z_i} - \left. \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|_{x_e} \right\| \|x - x_e\|$$

e quindi

$$\frac{\|g_i(x)\|}{\|x - x_e\|} \leq \left\| \left. \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|_{z_i} - \left. \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|_{x_e} \right\|$$

ove, per la continuità di $\frac{\partial f}{\partial x}$, il secondo membro tende a zero per $x \rightarrow x_e$. Ovviamente per $x \rightarrow x_e$ anche $z_i \rightarrow x_e$. Posto allora $\xi = x - x_e$ si ha il sistema

$$\dot{\xi} = \dot{x} = f(x) \Big|_{x=\xi+x_e} = A\xi + g(\xi + x_e) = A\xi + \bar{g}(\xi) = \bar{f}(\xi)$$

²² Il teorema della media si applica alle funzioni scalari $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

con

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow 0} \frac{\|\bar{g}(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0.$$

Pertanto in un intorno di $\xi = 0$ (ossia di x_e) il sistema $\dot{x} = f(x)$ è approssimabile dal sistema $\dot{\xi} = A\xi$. Il metodo indiretto di Lyapunov si basa sullo studio della stabilità dell'origine del tale sistema.

Teorema 15. [Metodo indiretto di Lyapunov] Sia x_e un punto d'equilibrio di $\dot{x} = f(x)$, con $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, D un intorno di x_e , $f \in C^1(D)$. Posto $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e}$, allora

- a) se $\xi_e = 0$ è asintoticamente stabile, ossia $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$, x_e è localmente asintoticamente stabile;
- b) se $\xi_e = 0$ è instabile, ossia esiste almeno un autovalore $\lambda \in \sigma(A)$ tale che $\Re(\lambda) > 0$, x_e è instabile.

Dim. Consideriamo i due casi dell'enunciato.

a) Se $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$ allora per qualsiasi $Q = Q^T > 0$ esiste una soluzione $P = P^T > 0$ dell'equazione $PA + A^T P = -Q$. Dunque presa $V = \xi^T P \xi$ si ha

$$\dot{V} = \xi^T P \bar{f}(\xi) + \bar{f}^T(\xi) P \xi = \xi^T P [A\xi + \bar{g}(\xi)] + [A\xi + \bar{g}(\xi)]^T P \xi = -\xi^T Q \xi + 2\xi^T P \bar{g}(\xi)$$

ove $\lim_{\|\xi\|_2 \rightarrow 0} \frac{\|\bar{g}(\xi)\|_2}{\|\xi\|_2} = 0$, ossia $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon$ tale che se $\|\xi\|_2 < \delta_\varepsilon$ risulta²³

$$\frac{\|\bar{g}(\xi)\|_2}{\|\xi\|_2} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \|\bar{g}(\xi)\|_2 < \varepsilon \|\xi\|_2.$$

Ma allora per ogni $\|\xi\|_2 < \delta_\varepsilon$ risulta²⁴

$$\dot{V} = -\xi^T Q \xi + 2\xi^T P \bar{g}(\xi) < -\lambda_{\min}^Q \|\xi\|_2^2 + 2\varepsilon \|P\|_2 \|\xi\|_2^2 = -(\lambda_{\min}^Q - 2\varepsilon \|P\|_2) \|\xi\|_2^2$$

avendo preso anche per $g(x)$ la norma euclidea $\|\cdot\|_2$. Se allora $2\varepsilon \|P\|_2 < \lambda_{\min}^Q$, ossia fissato $\varepsilon < \frac{\lambda_{\min}^Q}{2\|P\|_2}$, si ha $\dot{V}$ definita negativa e, per il teorema di Lyapunov, $\xi_e = 0$ è globalmente asintoticamente stabile e x_e è localmente asintoticamente stabile.

b) Se A ha almeno un autovalore in $\mathbb{C}^+$, si considera la trasformazione T tale che

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

con $\sigma(A_1), \sigma(A_2) \subset \mathbb{C}^-$. Ad esempio si pone A in forma di Jordan e poi si considera un'altra trasformazione che riordina opportunamente i blocchi di Jordan. Posto

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T\xi$$

si ha

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{g}(z)$$

²³ Si noti che non era qui necessario usare la norma euclidea, che sarà però necessaria in seguito.

²⁴ Si noti che vale la relazione

$$\lambda_{\min}^Q \|\xi\|_2^2 \leq \xi^T Q \xi \leq \lambda_{\max}^Q \|\xi\|_2^2$$

essendo $\lambda_{\min}^Q, \lambda_{\max}^Q$ rispettivamente il più piccolo ed il più grande autovalore di Q (essendo $Q > 0$ essi devono essere, per definizione, positivi).

con

$$\tilde{g}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_1(z) \\ \tilde{g}_2(z) \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_i(z) = T\tilde{g}_i(\xi)|_{\xi=T^{-1}z}, \quad i = 1, 2$$

ove per $\tilde{g}(z)$ vale sempre che per ogni $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon$ | se $\|z\|_2 < \delta_\varepsilon$

$$\|\tilde{g}(z)\|_2 < \varepsilon \|z\|_2.$$

Inoltre per $\forall Q_1, Q_2 > 0$ simmetriche, $\exists P_1, P_2 > 0$ simmetriche tali che

$$P_i A_i + A_i^T P_i = -Q_i$$

ovvero per $\forall Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = Q^T > 0$, $\exists P = \begin{pmatrix} -P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = P^T$ (non definita positiva) tale che

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P = -Q.$$

Volendo mostrare l'instabilità di $z_e = \begin{pmatrix} z_{e1} \\ z_{e2} \end{pmatrix} = 0$ mediante il teorema di Chetaev (che non richiede una funzione $V(z)$ definita positiva) si prenda

$$V(z) = z_1^T P_1 z_1 - z_2^T P_2 z_2 = -z^T P z.$$

Si considera l'insieme

$$U = \{z \in B_{0, \delta_\varepsilon} \mid V(z) > 0\}$$

e in U risulta

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -z^T (P\tilde{A} + \tilde{A}^T P)z - 2z^T P\tilde{g}(z) = z^T Qz - 2z^T P\tilde{g}(z) \geq \lambda_{\min}^Q \|z\|_2^2 - 2\varepsilon \|z\|_2^2 \|P\|_2 \\ &= (\lambda_{\min}^Q - 2\varepsilon \|P\|_2) \|z\|_2^2 \end{aligned}$$

ove si è considerato che $\lambda_{\min}^Q \|z\|_2^2 \leq z^T Qz$ (in cui è necessario usare la norma euclidea) e

$$2z^T P\tilde{g}(z) \leq 2\|z\|_2 \|P\|_2 \|\tilde{g}(z)\|_2 \leq 2\|z\|_2 \|P\|_2 \varepsilon \|z\|_2$$

e quindi

$$-2z^T P\tilde{g}(z) \geq 2\varepsilon \|z\|_2^2 \|P\|_2.$$

Dunque per

$$\varepsilon < \frac{\lambda_{\min}^Q}{2\|P\|_2}$$

risulta $\dot{V} > 0$; di conseguenza in U si ha $\dot{V} > 0$ e dunque, per il teorema di Chetaev, $z_e = 0$, ossia $\xi_e = 0$ ovvero x_e , è instabile. Tacitamente si è supposto che A non abbia autovalori sull'asse immaginario. In questo caso, supposto che gli m autovalori λ_i di A a parte reale maggiore di zero siano tali che $\Re(\lambda_i) > \delta > 0$, allora la matrice $\bar{A} = A - \frac{\delta}{2}I$ ha m autovalori a parte reale maggiore di zero e non ha autovalori sull'asse immaginario.

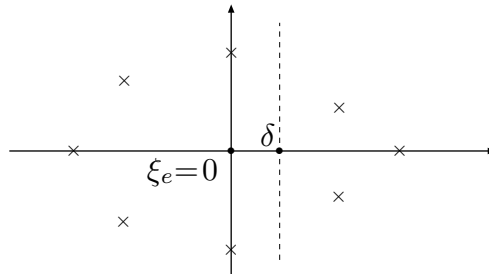


Figura 25 – Esempio di poli della matrice A

Pertanto

$$\dot{\xi} = A\xi + \bar{g}(\xi) - \frac{\delta}{2}\xi + \frac{\delta}{2}\xi = \bar{A}\xi + \frac{\delta}{2}\xi + \bar{g}(\xi)$$

e operando come prima una trasformazione di coordinate opportuna $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T\xi$ con T tale che

$$\tilde{A} = T\bar{A}T^{-1} = T\left(A - \frac{\delta}{2}I\right)T^{-1} = \begin{pmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

e $\sigma(A_1), \sigma(A_2) \subset \mathbb{C}^-$, si ha

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \frac{\delta}{2}z + \tilde{g}(z)$$

con $\tilde{g}(z)$ definita come prima e che gode delle medesime proprietà. Fissata $Q = Q^T > 0$ e calcolata $P = P^T$ esattamente come prima, e considerando la stessa funzione $V(z)$ di prima, positiva in U , si ha per $z \in U$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -z^T(P\tilde{A} + \tilde{A}^TP)z - 2z^TP\tilde{g}(z) - \delta z^TPz = z^TQz - 2z^TP\tilde{g}(z) + \delta V(z) \\ &\geq (\lambda_{\min}^Q - 2\varepsilon \|P\|_2) \|z\|_2^2. \end{aligned}$$

Ragionando come prima si conclude che x_e è instabile. $\square$

Si noti che se $A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_e}$ non ha autovalori a parte reale maggiore di zero, ma ha autovalori a parte reale nulla con molteplicità geometrica unitaria (stabilità semplice) o maggiore di uno (instabilità), poiché l'equazione di Sylvester non ammetterebbe soluzione, non può essere applicato il teorema precedente. Questo è detto *caso critico* e non può essere studiato mediante la linearizzazione. Si può allora ricorrere al metodo diretto di Lyapunov oppure al teorema della varietà centrale (vedi dopo).

Esempio. Sia $\dot{x} = ax^3$, con $x_e = 0$. Si ha $A = \frac{\partial f}{\partial x} = 3ax^2\Big|_{x_e=0} = 0$ per cui non si può studiare la stabilità di x_e con il metodo della linearizzazione. In realtà con $V = \frac{1}{2}x^2$ si trova che

$$\dot{V} = ax^4 \begin{cases} > 0 & \text{se } a > 0 \\ < 0 & \text{se } a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_e \text{ è instabile (teorema di Chetaev)} \\ x_e \text{ è stabile asintoticamente (teorema di Lyapunov)} \end{cases}$$

mentre per $a = 0$ si ha $\dot{x} = 0$ ossia x_e è stabile semplicemente. $\square$

Esempio. Si consideri nuovamente il pendolo con attrito

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2. \end{aligned}$$

Considerato $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si ha

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}\Big|_{x_1=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{g}{l}$$

e per le condizioni necessarie e sufficienti del criterio di Routh si vede che A è Hurwitz. Se non si ha attrito $p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{g}{l}$ per cui $\lambda = \mp j\sqrt{\frac{g}{l}}$, e non si può decidere sulla stabilità di x_e mediante la linearizzazione.

In realtà si è già visto, con il teorema di Lyapunov, che $x_e = 0$ è stabile se $k = 0$. Inoltre per $x_e = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ si ha

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \Big|_{x_1=\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda - \frac{g}{l}$$

e per il criterio di Routh x_e è instabile. $\square$

2.7.2 Sistemi non stazionari

L'esistenza di una funzione di Lyapunov per il sistema lineare ci permette ora di estendere al caso non stazionario il metodo indiretto di Lyapunov, basato sulla linearizzazione attorno a x_e . Si consideri il sistema $\dot{x} = f(t, x)$, con $f: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_e\|_2 < r\}$ con $f(t, x_e) = 0$. Supporremo che $\frac{\partial f}{\partial x}$ sia limitata e Lipschitz in D (uniformemente rispetto a t)

$$\left\| \frac{\partial f_i(t, x_1)}{\partial x} - \frac{\partial f_i(t, x_2)}{\partial x} \right\|_2 \leq L_1 \|x_1 - x_2\|_2, \quad i = 1 \dots n.$$

Per il teorema della media $f_i(t, x) - f_i(t, x_e) = \frac{\partial f_i}{\partial x} \Big|_{z_i} (x - x_e)$ con z_i un punto del segmento da x a x_e . Dunque come nel caso autonomo

$$f_i(t, x) = \frac{\partial f_i}{\partial x} \Big|_{z_i} (x - x_e) = \frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x} \Big|_{x_e} (x - x_e) + \left(\frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x} \Big|_{z_i} - \frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x} \Big|_{x_e} \right) (x - x_e)$$

e quindi, posto $\xi = x - x_e$,

$$A(t) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \Big|_{x_e}, \quad g(t, \xi) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1(t, x)}{\partial x} \Big|_{z_1} - \frac{\partial f_1(t, x)}{\partial x} \Big|_{x_e} \right) (x - x_e) \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n(t, x)}{\partial x} \Big|_{z_n} - \frac{\partial f_n(t, x)}{\partial x} \Big|_{x_e} \right) (x - x_e) \end{pmatrix} \Big|_{x=\xi+x_e}$$

si trova

$$\dot{\xi} = f(t, x) \Big|_{x=\xi+x_e} = A(t)\xi + g(t, \xi)$$

con

$$\begin{aligned} \|g(t, \xi)\|_2 &= \left[\sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \Big|_{z_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x} \Big|_{x_e} \right) \xi \right)^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x} \Big|_{z_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x} \Big|_{x_e} \right\|_2^2 \|\xi\|_2^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^n L_1^2 \|z_i - x_e\|_2^2 \|\xi\|_2^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^n L_1^2 \|x - x_e\|_2^2 \|\xi\|_2^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[n L_1^2 \|\xi\|_2^4 \right]^{1/2} = \sqrt{n} L_1 \|\xi\|_2^2 = L \|\xi\|_2^2 \end{aligned}$$

ove $L = \sqrt{n} L_1$ e dove si è considerato che $\|z_i - x_e\| \leq \|x - x_e\| = \|\xi\|$, in quanto z_i è un punto del segmento da x a x_e .

Possiamo ora enunciare il metodo indiretto di Lyapunov per sistemi non stazionari, basato sulla stabilità *esponenziale* dell'origine del sistema $\dot{\xi} = A(t)\xi$.

Teorema 16. [Metodo Indiretto di Lyapunov] Sia x_e un punto di equilibrio di $\dot{x} = f(t, x)$ con $f \in C^1$, $f: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_e\|_2 < r\}$ e $\frac{\partial f}{\partial x}$ sia limitata e Lipschitz in D (uniformemente rispetto a t). Il punto di equilibrio x_e è esponenzialmente stabile se e solo se $\xi_e = 0$ è esponenzialmente stabile per $\dot{\xi} = A(t)\xi$. $\square$

Dim. Si noti che $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_e}$ è continua e limitata. Sia $\xi_e = 0$ esponenzialmente stabile. In particolare sarà uniformemente asintoticamente stabile. Allora per qualsiasi $Q(t) = Q^T(t) > 0$ continua e limitata, esiste una matrice $P(t) = P^T(t) > 0$ di classe C^1 e limitata, per cui considerata la funzione candidata

$$V(t, x) = \xi^T P(t) \xi = (x - x_e)^T P(t) (x - x_e)$$

si trova che

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \xi^T P(t) f(t, x)|_{x=\xi+x_e} + f^T(t, x)|_{x=\xi+x_e} P(t) \xi + \xi^T \dot{P}(t) \xi \\ &= \xi^T \left[P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + \dot{P}(t) \right] \xi + 2\xi^T P(t) \tilde{g}(t, \xi) \\ &= -\xi^T Q(t) \xi + 2\xi^T P(t) \tilde{g}(t, \xi) \\ &\leq -\xi^T Q(t) \xi + 2\|\xi\|_2 \|P(t)\|_2 \|\tilde{g}\|_2 \\ &\leq -c_3 \|\xi\|_2^2 + 2\|\xi\|_2 c_2 L \|\xi\|_2^2 \\ &= -c_3 \|\xi\|_2^2 + 2c_2 L \|\xi\|_2^3 \\ &\leq -(c_3 - 2c_2 L \varrho) \|\xi\|_2^2 \end{aligned}$$

per $\|\xi\|_2 = \|x - x_e\|_2 < \varrho$. Quindi $\dot{V}$ è definita positiva per $\|x - x_e\| < \varrho < \min \left\{ r, \frac{c_3}{2c_2 L} \right\}$. Poiché $c_1 \|\xi\|_2^2 \leq W_1 \leq V(t, x) \leq W_2 \leq c_2 \|\xi\|_2^2$, allora x_e è globalmente asintoticamente stabile.

Si può viceversa dimostrare che se $\xi_e = 0$ è esponenzialmente stabile allora lo è x_e .

Vale infatti il seguente teorema nel caso di x_e punto d'equilibrio esponenzialmente stabile²⁵, che rappresenta l'estensione al caso non lineare dell'analogo teorema valido nel caso lineare (converse theorem nel caso lineare).

Teorema 17. [Converse Theorem per la stabilità esponenziale] Si consideri il sistema $\dot{x} = f(t, x)$, con $f \in C^1$, $f: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_e\| < r\}$, e con $\frac{\partial f}{\partial x}$ limitata in D (uniformemente rispetto a t). Si supponga che $x_e = 0$ sia un punto d'equilibrio esponenzialmente stabile, ossia che

$$\|x(t) - x_e\| \leq k \|x_0 - x_e\| e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x_0 \in D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_e\| < r_0\}$$

con k, λ ed r_0 delle costanti positive e con $r_0 < r/k$. Allora esiste una funzione $V: [0, \infty) \times D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{aligned} k_1 \|x - x_e\|^2 &\leq V(t, x) \leq k_2 \|x - x_e\|^2 \\ \dot{V}(t, x) &= \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) \leq -k_3 \|x - x_e\|^2 \\ \left\| \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right\| &\leq k_4 \|x - x_e\| \end{aligned}$$

per opportune costanti $k_1, \dots, k_4$ positive. Inoltre se $r = \infty$ e se l'origine è globalmente esponenzialmente stabile, allora $V(t, x)$ è definita per qualsiasi $x \in \mathbb{R}^n$ e le precedenti relazioni valgono per qualsiasi $x \in \mathbb{R}^n$. Infine se il sistema è stazionario V può essere scelta indipendente dal tempo.

²⁵ Per la dimostrazione si veda [?], pag. 150.

Nel caso che x_e sia un punto d'equilibrio uniformemente asintoticamente stabile vale il seguente teorema²⁶.

Teorema 18. [Converse Theorem per la stabilità asintotica uniforme] Si consideri il sistema $\dot{x} = f(t, x)$, con $f \in C^1$, $f: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_e\| < r\}$, e con $\frac{\partial f}{\partial x}$ limitata in D (uniformemente rispetto a t).

Si supponga che $x_e = 0$ sia un punto d'equilibrio uniformemente asintoticamente stabile, ossia che esista una funzione $\beta \in \mathcal{KL}$ tale che

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x_0 \in D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_e\| < r_0\}$$

con r_0 una costante positiva tale che $\beta(r_0, 0) < r$. Allora esiste una funzione $V: [0, \infty) \times D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x - x_e\|) &\leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|) \\ \dot{V}(t, x) &= \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) \leq -\alpha_3(\|x - x_e\|) \\ \left\| \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right\| &\leq \alpha_4(\|x - x_e\|) \end{aligned}$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_4 \in \mathcal{K}$ definite in $[0, r_0]$. Se il sistema è stazionario V può essere scelta indipendente dal tempo.

Sia x_e esponenzialmente stabile, ossia risulti

$$\|x(t) - x_e\| \leq k \|x_0 - x_e\| e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x_0 \in D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_e\| < r_0\}$$

con k, λ ed r_0 delle costanti positive, e proviamo che $\xi_e = 0$ è esponenzialmente stabile utilizzando il converse theorem enunciato nel caso di stabilità esponenziale di $\xi_e = 0$. Preso $\rho_0 < \min\{r_0, r/k\}$, per il converse theorem per la stabilità esponenziale esiste una $V(t, x)$ tale che

$$\begin{aligned} k_1 \|x - x_e\|^2 &\leq V(t, x) \leq k_2 \|x - x_e\|^2 \\ \dot{V}(t, x) &= \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) \leq -k_3 \|x - x_e\|^2 \\ \left\| \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right\| &\leq k_4 \|x - x_e\| \end{aligned}$$

per opportuni costanti $k_1, \dots, k_4$ positive. Utilizzando $\tilde{V}(t, \xi) = V(t, x)|_{x=\xi+x_e}$ come funzione candidata per studiare la stabilità di $\xi_e = 0$ per $\dot{\xi} = A(t)\xi$ si ha

$$\begin{aligned} k_1 \|\xi\|^2 &\leq \tilde{V}(t, \xi) \leq k_2 \|\xi\|^2 \\ \dot{\tilde{V}}(t, \xi) &= \frac{\partial \tilde{V}(t, \xi)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{V}(t, \xi)}{\partial \xi} A(t)\xi = \frac{\partial \tilde{V}(t, \xi)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{V}(t, \xi)}{\partial \xi} [A(t)\xi + g(t, \xi)] - \frac{\partial \tilde{V}(t, \xi)}{\partial \xi} g(t, \xi) \\ &\leq -k_3 \|\xi\|^2 + \left\| \frac{\partial \tilde{V}(t, \xi)}{\partial \xi} \right\| \|g(t, \xi)\|. \end{aligned}$$

In particolare utilizzando la norma euclidea e ricordando che $\|g(t, \xi)\|_2 \leq L \|\xi\|_2^2$ si ha

$$\dot{\tilde{V}}(t, \xi) \leq -k_3 \|\xi\|_2^2 + k_4 L \|\xi\|_2^3 = -(k_3 - k_4 L \|\xi\|_2) \|\xi\|_2^2 \leq -(k_3 - k_4 L \rho) \|\xi\|_2^2$$

per ogni $\|\xi\| < \rho$. Preso $\rho < \min\{\rho_0, k_3/k_4 L\}$, si ha che

$$\dot{\tilde{V}}(t, \xi) \leq -\bar{k}_3 \|\xi\|_2^2, \quad \bar{k}_3 > 0$$

per cui $\xi_e = 0$ è esponenzialmente stabile per il sistema lineare. $\square$

²⁶ Per la dimostrazione si veda [?], pag. 657.

Esempio. Sia $\dot{x} = -x^3$. Il punto di equilibrio da studiare è $x_e = 0$, con $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{x_e} = 0$, sicché $\dot{\xi} = 0$. Dunque $x_e = 0$ non è esponenzialmente stabile. $\square$

Esempio. Sia $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & \alpha(t) \\ -\alpha(t) & -1 \end{pmatrix} x$, $\alpha(t) \in C^0[0, \infty)$. Presa $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ si trova che $\dot{V} = x_1(-x_1 + \alpha(t)x_2) + x_2(-\alpha(t)x_1 - x_2) = -(x_1^2 + x_2^2) = -2V$ e dunque $x_e = 0$ è esponenzialmente stabile. $\square$

Esempio. Sia $\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1^3 + \alpha(t)x_2 \\ -\alpha(t)x_1 - 3x_2^3 \end{pmatrix}$, con $\alpha(t) \in C^0[0, \infty)$ e limitata. Presa $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ si determina $\dot{V} = -x_1^4 + \alpha(t)x_1x_2 - \alpha(t)x_1x_2 - x_2^4 = -(x_1^4 + x_2^4)$ per cui $x_e = 0$ è globalmente uniformemente asintoticamente stabile. Ma

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & \alpha(t) \\ -\alpha(t) & -3x_2^2 \end{pmatrix}$$

è limitata e localmente Lipschitz, e $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{x_e} = A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(t) \\ -\alpha(t) & 0 \end{pmatrix}$. Dunque, presa $V = \frac{1}{2}\xi_1^2 + \xi_2^2$ si ha che $\dot{V} = 0$, ossia V è costante lungo le traiettorie del sistema e quindi $\xi(t)$ non tende a $\xi_e = 0$, cioè $\xi_e = 0$ (e quindi $x_e = 0$) non è esponenzialmente stabile. $\square$

Esempio. Sia $\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1x_2 + 3t + 2 - 3x_1 - 2(t+1)x_2 \end{pmatrix}$. Si può verificare che $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ è soluzione poiché $\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t + 3t + 2 - 3t - 2t - 2 = 0 \end{pmatrix}$. Mostriamo che $x(t)$ tende a $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ per x_0 sufficientemente vicino a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per mostrarlo occorre far vedere che $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ non è soluzione asintoticamente stabile. Posto $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = x - \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 - t \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$ si ha

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} x_2 - 1 \\ 2x_1x_2 + 3t + 2 - 3x_1 - 2(t+1)x_2 \end{pmatrix}\bigg|_{\substack{x_1=\xi_1+t \\ x_2=\xi_2+1}} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ 2\xi_1\xi_2 - \xi_1 - 2\xi_2 \end{pmatrix}.$$

Per vedere che $\xi_e = 0$ è uniformemente asintoticamente stabile si calcola $A = \frac{\partial f}{\partial \xi}\big|_{\xi_e=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ che è Hurwitz, sicché $\xi_e = 0$ è uniformemente asintoticamente stabile e $x(t)$ tende a $\bar{x}(t)$. $\square$

2.8 Il teorema della varietà centrale

Nei casi critici del metodo indiretto di Lyapunov (linearizzazione) la stabilità di x_e può essere studiata analizzando un particolare sottosistema non lineare, il cui ordine è pari al numero di autovalori di $A = \frac{\partial f}{\partial x}\big|_{x_e}$ a parte reale nulla.

Nel seguito si utilizzerà il concetto di varietà. Una varietà può essere pensata come un insieme che *localmente* ha una struttura di spazio euclideo. Una varietà di dimensione k in $\mathbb{R}^n$, $k \in [1, n)$, è una superficie all'interno di $\mathbb{R}^n$, soluzione dell'equazione

$$\eta(x) = 0$$

ove $\eta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ è continua assieme alle sue derivate di ordine sufficientemente elevato. Un esempio di varietà unidimensionale in $\mathbb{R}^2$ è il cerchio unitario

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Un altro è la sfera unitaria, che è una varietà di dimensione $n-1$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

Più semplice ancora è la varietà di dimensione k data dal sottospazio lineare generato da $\{e_1, \dots, e_k\}$, essendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base che genera $\mathbb{R}^n$.

Il fatto che $\eta \in C^r$ (localmente), con r sufficientemente elevato, permette di applicare il teorema della funzione implicita²⁷ e dunque η può essere *localmente rappresentata mediante un grafo* del tipo

$$z = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \pi(x_{k+1}, \dots, x_n) = \pi(y), \quad y = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Una varietà $\{x \mid \eta(x) = 0\}$ è detta *varietà invariante* se

$$\eta(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta(x(t)) \equiv 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$$

con $[t_0, t_1]$ un qualsiasi intervallo in cui $x(t)$ è definita. Dunque una varietà è invariante se la traiettoria, che parte sulla varietà, vi rimane per tutto il tempo in cui è definita.

Sia ora $\dot{x} = f(x)$, con f funzione di classe C^2 . Posto $\xi = x - x_e$

$$\dot{\xi} = f(x)|_{x=\xi+x_e} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_e} (x - x_e) + f(x)|_{x=\xi+x_e} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_e} (x - x_e) = A\xi + \tilde{f}(\xi)$$

con

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_e}, \quad \tilde{f}(\xi) = f(x)|_{x=\xi+x_e} - A\xi \in C^2, \quad \tilde{f}(0) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}(0) = 0.$$

Consideriamo il caso critico in cui A ha k autovalori a parte reale nulla ed $m = n - k$ a parte reale negativa. Considerata la trasformazione T tale che

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 \text{ (} k \times k \text{)} & 0 \\ 0 & A_2 \text{ (} m \times m \text{)} \end{pmatrix}$$

con $\sigma(A_2) \subset \mathbb{C}^-$ ed A_1 con autovalori a parte reale nulla, e le nuove variabili $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = Tx$, $y \in \mathbb{R}^k$, $z \in \mathbb{R}^m$, il sistema $\dot{\xi} = A\xi + \tilde{f}(\xi)$ viene trasformato nella forma

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 y + g_1(y, z) \\ \dot{z} &= A_2 z + g_2(y, z). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Poiché $\tilde{f}(0) = 0$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}(0) = 0$ e $\tilde{f}(\xi) \in C^2$, si avrà che $g_1, g_2 \in C^2$ e

$$\begin{aligned} g_1(0, 0) &= 0, & \frac{\partial g_1}{\partial y} \Big|_{(0,0)} &= 0, & \frac{\partial g_1}{\partial z} \Big|_{(0,0)} &= 0 \\ g_2(0, 0) &= 0, & \frac{\partial g_2}{\partial y} \Big|_{(0,0)} &= 0, & \frac{\partial g_2}{\partial z} \Big|_{(0,0)} &= 0. \end{aligned}$$

²⁷ Se $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è $C^1(S)$, con S un aperto in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, e se (x_0, y_0) è un punto di S in cui $f(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}$ è non singolare, allora esistono degli intorno I_{x_0} di x_0 e I_{y_0} di y_0 tali che l'equazione $f(x, y) = 0$, per ogni $y \in I_{y_0}$, ha soluzione unica $x \in I_{x_0}$, data da $x = \pi(y)$ con $\pi \in C^1$ in y_0 .

Se ora $z = \pi(y)$ è una varietà invariante per il sistema (2.1), con $\pi \in C^k$, essa è detta *varietà centrale* se $\pi(0) = 0$, $\frac{\partial \pi}{\partial y}(0) = 0$.

Teorema 17. [Esistenza della varietà centrale] Se $g_1, g_2 \in C^2$ e sono tali che

$$g_i(0, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial g_i}{\partial y} \right|_{(0,0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial g_i}{\partial z} \right|_{(0,0)} = 0, \quad i = 1, 2,$$

e se tutti gli autovalori di A_1 hanno parte reale nulla e $\sigma(A_2) \subset \mathbb{C}^-$, allora esistono un $\delta > 0$ ed una funzione $\pi \in C^1$ definita per ogni y per cui $\|y\| < \delta$, tale che $z = \pi(y)$ è una varietà centrale per il sistema (2.1). $\square$

Tale teorema, di cui si omette la dimostrazione, afferma dunque che esiste una varietà centrale $z = \pi(y)$. Si osservi che il teorema afferma l'esistenza della varietà centrale ma *non dice che essa è unica*. In effetti un sistema può avere più varietà centrali.

Se ora (y_0, z_0) appartiene alla varietà centrale, ossia $z_0 = \pi(y_0)$, allora la soluzione $(y(t), z(t))$ vi rimane $\forall t \geq t_0$, ossia $z(t) = \pi(y(t))$ poiché essa per definizione è invariante. Ma allora il moto sulla varietà centrale è descritto dall'equazione (di ordine $k < n$)

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y, \pi(y))$$

che costituisce il cosiddetto *sistema ridotto*. Se viceversa $z_0 \neq \pi(y_0)$, la differenza

$$w = z(t) - \pi(y(t))$$

rappresenta quanto la traiettoria è lontana dalla varietà centrale. Considerate le variabili y e w si ha allora

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 y + g_1(y, w + \pi(y)) \\ \dot{w} &= A_2(w + \pi(y)) + g_2(y, w + \pi(y)) - \frac{\partial \pi(y)}{\partial y} [A_1 y + g_1(y, w + \pi(y))] \end{aligned}$$

e in queste nuove coordinate la varietà centrale è $w = 0$. Il moto sulla varietà centrale è caratterizzato da $w(t) \equiv 0$. Dunque ne segue che $\dot{w}(t) = 0$, sicché

$$A_2 \pi(y) + g_2(y, \pi(y)) = \frac{\partial \pi(y)}{\partial y} [A_1 y + g_1(y, \pi(y))]$$

e ogni traiettoria che giace sulla varietà centrale, per la quale si è visto che $z(t) = \pi(y(t))$, deve soddisfare questa equazione differenziale, con $\pi(0) = 0$, $\left. \frac{\partial \pi(y)}{\partial y} \right|_{(0)} = 0$. Dunque $\pi(y)$ deve soddisfare tale equazione.

Esempio. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -y^3 \\ \dot{z} &= -z. \end{aligned}$$

L'equazione differenziale è dunque

$$-\pi(y) = \frac{\partial \pi(y)}{\partial y} (-y^3) \quad \Rightarrow \quad \int_{\pi(0)}^{\pi} \frac{d\pi}{\pi} = \int_0^y \frac{1}{y^3} dy$$

per cui $\pi = \pi(0) e^{-\frac{1}{2y^2}}$. Si noti che può essere $\pi(0) = 0$ e dunque $\pi \equiv 0$ è una varietà centrale. Ma anche

$$\pi = \begin{cases} c e^{-\frac{1}{2y^2}} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

è soluzione per $\forall c \in \mathbb{R}$. Dunque vi sono infinite varietà centrali. $\square$

Si noti che se anche $g_1, g_2 \in C^\infty$ il sistema (2.1) ha una varietà centrale C^k con $k \geq 1$, che però non necessariamente è C^∞ .

Le caratteristiche della varietà centrale sono che passa per l'origine, ossia $(\pi(0) = 0)$ ed è tangente al sottoinsieme di punti per i quali $z = 0$, ossia $\frac{\partial \pi(y)}{\partial y} \Big|_{(0)} = 0$.

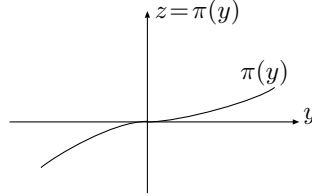


Figura 26 – Caratteristiche di una varietà centrale

Un'altra importante proprietà della varietà centrale è che qualsiasi traiettoria del sistema (2.1) che parta da punti sufficientemente vicini all'origine (ove essa è definita) converge alla varietà centrale per $t \rightarrow \infty$ con velocità esponenziale. Questo si esprime dicendo che la varietà centrale è *localmente attrattiva*.

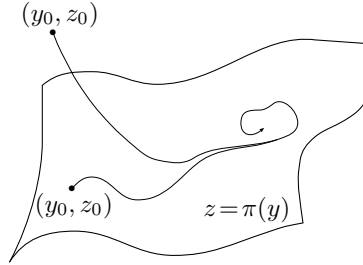


Figura 27 – Proprietà di locale attrattività della varietà centrale

Teorema 18. [Locale attrattività della varietà centrale] Sia $z = \pi(y)$ una varietà centrale per il sistema (2.1) e sia $(y(t), z(t))$ una sua soluzione. Esistono un intorno U dell'origine e delle costanti $M, k > 0$ tali che se $(y_0, z_0) \in U$ allora

$$\|z(t) - \pi(y(t))\| \leq M e^{-kt} \|z_0 - \pi(y_0)\|, \quad \forall t \geq t_0 = 0$$

purché $(y(t), z(t)) \in U$.

Se dunque si ha un punto di equilibrio $(y_e, z_e) \in U$, per il quale deve essere $(y(t) = y_e, z(t) = z_e) \forall t \geq t_0$, ovvero una orbita periodica $\Gamma \subset U$, perché non ci sia contraddizione con la proprietà di attrattività espressa da questo teorema si deve avere che tale punto d'equilibrio o tale orbita periodica debbono appartenere a tutte le varietà centrali.

Una volta nota una varietà centrale $z = \pi(y)$, il comportamento asintotico del sistema (2.1) vicino l'origine può essere studiato mediante il *principio di riduzione*, espresso dal seguente teorema.

Teorema 19. [Principio di riduzione] Se $g_1, g_2 \in C^2$ e

$$g_i(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial g_i}{\partial y} \Big|_{(0,0)} = 0, \quad \frac{\partial g_i}{\partial z} \Big|_{(0,0)} = 0, \quad i = 1, 2,$$

e se l'origine $y_e = 0$ del sistema ridotto

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y, \pi(y))$$

è (localmente) asintoticamente stabile (ovvero: instabile, stabile), l'origine $(y_e, z_e) = (0, 0)$ del sistema (2.1) è (localmente) asintoticamente stabile (ovvero: instabile, stabile). $\square$

L'applicazione di questo teorema implica la conoscenza della soluzione $\pi(y)$ di un'equazione, spesso non risolubile esattamente. Si può allora cercare una sua soluzione approssimata.

Teorema 20. [Soluzioni approssimate] Sia $\pi_k(y)$ una funzione C^1 con $\pi_k(0) = 0$, $\frac{\partial \pi_k}{\partial y} \Big|_{(0)} = 0$. Se

$$R_k(y) = A_2 \pi_k(y) + g_2(y, \pi_k(y)) - \frac{\partial \pi_k(y)}{\partial y} \left[A_1 y + g_1(y, \pi_k(y)) \right]$$

è un $\mathcal{O}(\|y\|^k)$ per un qualche $k > 1$, allora per $\|y\|$ sufficientemente piccoli

$$\pi(y) - \pi_k(y) = \mathcal{O}(\|y\|^k)$$

e il sistema ridotto si può rappresentare come

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y, \pi_k(y)) + \mathcal{O}(\|y\|^{k+1}). \quad \square$$

In particolare $\pi_k(y)$ può essere un polinomio di ordine k . Negli esempi che seguono il sistema ridotto è del tipo

$$\dot{y} = ay^k + \mathcal{O}(\|y\|^{k+1}), \quad k > 0$$

che è stabile asintoticamente se k è dispari ed $a < 0$, mentre è instabile se k è dispari ed $a > 0$ oppure se k è pari ed $a \neq 0$.

Infatti considerata la funzione $V = \frac{1}{2}y^2$, si noti che se $g(y) = \mathcal{O}(\|y\|^{k+1})$ allora

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|^{k+1}} = 0,$$

ossia per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $\|y\| < \delta_\varepsilon$ allora

$$\frac{\|g(y)\|}{\|y\|^{k+1}} < \varepsilon = \mu \quad \Leftrightarrow \quad \|g(y)\| < \mu \|y\|^{k+1}.$$

Nel nostro caso scalare: $|g(y)| < \mu|y|^{k+1}$. Si ha allora

$$\dot{V} = y\dot{y} = y(ay^k + g(y)) = ay^{k+1} + yg(y) < ay^{k+1} + \mu|y|^{k+2}.$$

Vicino l'origine il termine ay^{k+1} è quello che domina, sicché se $a < 0$ e k è dispari la $\dot{V}$ è definita negativa e $y_e = 0$ è asintoticamente stabile. Se $a > 0$ e k è dispari la $\dot{V}$ è positiva in un intorno piccolo a piacere dell'origine, che è instabile (Chetaev). Se poi k è pari vi è sempre un intorno dell'origine ($y \leq 0$ se $a > 0$ e $y \geq 0$ se $a < 0$) in cui $\dot{V} > 0$ e quindi sempre per Chetaev, $y_e = 0$ è instabile.

Esempio. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + ax_1^2 + bx_1x_2\end{aligned}$$

con $a \neq 0$. Si nota che

$$\begin{aligned}0 &= x_2 \\ 0 &= ax_1^2\end{aligned}$$

per cui $x_e = 0$ è l'unico punto d'equilibrio. Lo studio mediante il metodo diretto di Lyapunov potrebbe essere complicato. Se ad esempio si prende $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ si ha $\dot{V} = x_1x_2 - x_2^2 + ax_1^2x_2 + bx_2^3$, e non si riesce a determinare se è definita negativa.

Si può allora considerare il metodo indiretto di Lyapunov. Ma

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ha autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$. Si ha dunque un caso critico, che non può essere studiato mediante tale metodo.

Utilizziamo pertanto il principio di riduzione. Per trasformare A nella forma di Jordan

$$A_J = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

si calcolano gli autovettori

$$\begin{aligned}(A - \lambda_1 I)u_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} u_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (A - \lambda_2 I)u_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e si considera la trasformazione T tale che $T^{-1} = (u_1 \ u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e si trova che

$$A_J = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

(si noti che non occorre fare i calcoli – ossia calcolare T e poi TAT^{-1} – in quanto dalla teoria si sa già che si ha questa struttura). Le nuove variabili sono

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

e dunque:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = ax_1^2 + bx_1x_2 = a(y+z)^2 - bz(y+z) = f_1(y, z) \\ \dot{z} &= x_2 - ax_1^2 - bx_1x_2 = -z - a(y+z)^2 + bz(y+z) = f_2(y, z)\end{aligned}$$

in quanto

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ -z \end{pmatrix}.$$

Per calcolare $\pi(y)$ occorre risolvere l'equazione

$$f_2(y, \pi(y)) - \frac{\partial \pi(y)}{\partial y} f_1(y, \pi(y)) = 0$$

ossia

$$\dot{z} \Big|_{z=\pi(y)} = \dot{\pi}(y) \Big|_{z=\pi(y)}$$

che nel nostro caso è

$$-\pi - a(y + \pi)^2 + b\pi(y + \pi) - \pi'(a(y + \pi)^2 - b\pi(y + \pi)) = 0$$

con $\pi(0) = 0$, $\pi'(0) = 0$. Una soluzione approssimata polinomiale di ordine k

$$\pi_k(y) = p_2 y^2 + \dots + p_k y^k$$

(si noti che $p_0, p_1 = 0$ poiché $\pi(0) = \pi'(0) = 0$) può essere calcolata sostituendo $\pi_k(y)$ nell'equazione differenziale e calcolando $p_2, \dots, p_k$ ponendo a zero i coefficienti con la stessa potenza in y . Per decidere poi la stabilità di $y_e = 0$ si sostituisce poi $\pi_k(y)$ nel sistema ridotto

$$\dot{y} = f_1(y, \pi_k(y)) = a(y + \pi_k)^2 - b\pi_k(y + \pi_k) = ay^2 + \mathcal{O}(|y|^3).$$

Essendo $p = 2$ pari ed $a \neq 0$ si deduce che $y_e = 0$, e quindi $(y_e, z_e) = (0, 0)$, è instabile. Si noti che non è stato necessario calcolare $p_2, \dots, p_k$.

A posteriori si vede facilmente che in effetti l'instabilità del punto d'equilibrio poteva essere dedotta utilizzando il teorema di Chetaev. Infatti, utilizzando ancora la funzione²⁸ $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, positiva in tutto $U = \mathbb{R}^2$ e per cui si era già calcolato $\dot{V} = x_1 x_2 - x_2^2 + ax_1^2 x_2 + bx_2^3$, si nota che lungo la retta $x_1 = x_2$

$$\dot{V}|_{x_1=x_2} = (a+b)x_2^3 = cx_2^3, \quad c = a+b$$

per cui se $c > 0$ è positiva per $x_2 > 0$, mentre se $c < 0$ è positiva per $x_2 < 0$. Dunque vi è sempre un sottoinsieme di punti di U in cui V e $\dot{V}$ sono contemporaneamente positive (una semiretta uscente dall'origine). Dunque $x_e = 0$ è effettivamente instabile.

Se lo scopo non era solo lo studio della stabilità del punto d'equilibrio, ma si voleva anche calcolare (ad esempio) p_2, p_3 e p_4 , si sarebbe avuto

$$\begin{aligned} & -(p_2 y^2 + p_3 y^3 + p_4 y^4) - a(y + p_2 y^2 + p_3 y^3 + p_4 y^4)^2 \\ & + b(p_2 y^2 + p_3 y^3 + p_4 y^4)(y + p_2 y^2 + p_3 y^3 + p_4 y^4) - (2p_2 y + 3p_3 y^2 + 4p_4 y^3) \left[a(y + p_2 y^2 + p_3 y^3 + p_4 y^4)^2 \right. \\ & \left. - b(p_2 y^2 + p_3 y^3 + p_4 y^4)(y + p_2 y^2 + p_3 y^3 + p_4 y^4) \right] = \mathcal{O}(|y|^4) \end{aligned}$$

ossia

$$(-p_2 - a)y^2 + (-p_3 + bp_2 - 4ap_2)y^3 + (-p_4 + bp_3 - 5ap_3 - 5ap_2^2 + 3bp_2^2)y^4 = \mathcal{O}(|y|^4)$$

e quindi

$$p_2 = -a, \quad p_3 = bp_2 - 4ap_2 = 4a^2 - ab, \quad p_4 = bp_3 - 5ap_3 - 5ap_2^2 + 3bp_2^2 = 12a^2b - ab^2 - 25a^3.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \pi_2(y) &= -ay^2 \\ \pi_3(y) &= -ay^2 + (4a^2 - ab)y^3 \\ \pi_4(y) &= -ay^2 + (4a^2 - ab)y^3 + (12a^2b - ab^2 - 25a^3)y^4. \end{aligned}$$

Iterando questo procedimento si possono calcolare approssimazioni di ordine arbitrariamente elevato. $\square$

²⁸ Si ricorda che in realtà il teorema di Chetaev non necessita che V sia definita positiva.

Esempio. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{y} &= yz \\ \dot{z} &= -z + ay^2.\end{aligned}$$

Esso è già in coordinate y, z e quindi non occorre fare nessun calcolo preliminare. Il sistema ridotto è

$$\dot{y} = y\pi(y)$$

e, contrariamente all'esempio precedente, per stabilire la stabilità di $y_e = 0$ occorre calcolare i coefficienti p_i dell'approssimazione polinomiale $\pi_k(y)$. Si ha l'equazione differenziale

$$-\pi_k + ay^2 - \pi'_k y \pi_k = 0$$

e quindi

$$-(p_2 y^2 + p_3 y^3 + p_4 y^4 + \dots) + ay^2 - y(2p_2 y + \dots)(p_2 y^2 + \dots) = (-p_2 + a)y^2 + (-p_3)y^3 + (-p_4 - 2p_2^2)y^4 + \dots = 0.$$

Si trova $p_2 = a$ e pertanto

$$\dot{y} = y\pi(y) = ay^3 + \mathcal{O}(|y|^4).$$

Essendo $p = 3$ dispari, $y_e = 0$ è stabile asintoticamente se $a < 0$, ed è instabile se $a > 0$. Dunque $(y_e, z_e) = (0, 0)$ è stabile asintoticamente se $a < 0$ ed è instabile se $a > 0$. $\square$

Esempio. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 - y_1^3 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 - y_2^3 + z^2 \\ \dot{z} &= -z + y_1^3 - 3y_1^5 + 3y_1^2 y_2\end{aligned}$$

é già in coordinate $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, z essendo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} -y_1^3 \\ -y_2^3 + z^2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = -1, \quad g_2 = y_1^3 - 3y_1^5 + 3y_1^2 y_2.$$

Si noti che $g_i \in C^2$ e che si annullano nell'origine assieme alle loro derivate prime in quanto sono di grado maggiore o uguale a 2. Il sistema ridotto è:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} y_2 - y_1^3 \\ -y_1 - y_2^3 + \pi^2(y) \end{pmatrix} = A_1 y + \mathcal{O}(\|y\|^2)$$

e dunque non è possibile stabilire la stabilità a meno di $y_e = 0$ studiando A_1 . Considerando allora la funzione di Lyapunov candidata

$$V = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = y_1 y_2 - y_1^4 - y_1 y_2 - y_2^4 + y_2 \pi^2(y) = -y_1^4 - y_2^4 + y_2 \pi^2(y)$$

e ricordando che un'approssimazione di $\pi(y)$ è

$$\pi_k(y) = p_{21} y_1^2 + p_{22} y_2^2 + p_{23} y_1 y_2 + \dots$$

si ha

$$\dot{V} = -y_1^4 - y_2^4 + \mathcal{O}(\|y\|^5)$$

negativa in un intorno dell'origine. Dunque $y_e = 0$ e quindi $(y_e, z_e) = (0, 0)$, sono asintoticamente stabili. $\square$

2.9 Teoremi di invarianza per sistemi non stazionari

Per i sistemi autonomi vale il *teorema di invarianza di La Salle*: la traiettoria del sistema tende al più grande insieme invariante $\mathcal{E}$ contenuto in

$$E = \left\{ x \in \Omega \mid \dot{V}(x) = 0 \right\}.$$

Per i sistemi non autonomi non vale tale risultato, anzi può non essere neppure chiaro come definire E , in quanto $\dot{V}(t, x)$ dipende sia da t che da x . Se però $\dot{V}(t, x) \leq -W_3(x) \leq 0$ allora $E = \{x \in \Omega \mid W_3(x) = 0\}$ è ben definito.

Definizione 8. Una funzione $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ è uniformemente continua su $[0, \infty)$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $|t_1 - t_2| < \delta_\varepsilon$ allora

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon$$

per ogni $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$. □

Si noti che rispetto alla definizione di continuità di una funzione²⁹, qui il δ dipende solo dal ε fissato ma non dal punto t in cui si studia la continuità della funzione. Inoltre si noti che l'uniforme continuità si definisce su un insieme, non in un punto, e lo stesso δ funziona per tutti i punti dell'insieme. Chiaramente se la funzione è uniformemente continua su un insieme S allora è continua su S , mentre il contrario in generale non è vero. Se però S è un compatto, la continuità e l'uniforme continuità su S sono equivalenti. In particolare se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è Lipschitz su $S \in \mathbb{R}^n$ allora $f(x)$ è uniformemente continua su W^{30} .

Enunciamo ora il seguente *lemma di Barbalat*.

Lemma 4. Sia $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua su $[t_0, +\infty)$ e tale che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \Phi(\tau) d\tau$$

esista e sia finito. Allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0.$$

Dim. Se per assurdo ciò non fosse vero esiste un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $T > 0$ si può prendere $t_T > T$ con $|\Phi(t_T)| \geq \varepsilon$. Per l'uniforme continuità di $\Phi(t)$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ (non dipendente da t) tale che per ogni $t \geq t_0$ e per ogni $\tau \in [0, \delta_\varepsilon]$ si ha

$$|\Phi(t + \tau) - \Phi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dunque

$$|\Phi(t)| = |\Phi(t) - \Phi(t_T) + \Phi(t_T)| \geq -|\Phi(t) - \Phi(t_T)| + |\Phi(t_T)| \geq -\frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \in [t_T, t_T + \delta_\varepsilon],$$

da cui

²⁹ Nella definizione di continuità di una funzione si richiede che $\lim_{t \rightarrow \bar{t}} \varphi(t) = \varphi(\bar{t})$, ovvero che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un $\delta_{\varepsilon, \bar{t}} > 0$ tale che se $|t - \bar{t}| < \delta_{\varepsilon, \bar{t}}$ allora $|\varphi(t) - \varphi(\bar{t})| < \varepsilon$.

³⁰ Si veda [?], pag. 91, Esercizio 2.17.

$$\left| \int_{t_T}^{t_T + \delta_\varepsilon} \Phi(t) dt \right| = \int_{t_T}^{t_T + \delta_\varepsilon} |\Phi(t)| dt \geq \frac{\varepsilon}{2} \delta_\varepsilon$$

↑
 $\Phi(t)$ mantiene lo stesso segno per $t \in [t_T, t_T + \delta_\varepsilon]$

ossia il $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \Phi(t) dt$ non può convergere ad un valore finito. Questa è una contraddizione per cui vale quanto affermato dall'enunciato. $\square$

Esempio. La funzione

$$\Phi(t) = e^{-t} \sin(e^{3t} - 1) - 3e^{2t} \cos(e^{3t} - 1)$$

ha un'integrale dato da

$$\int_0^t \Phi(\tau) d\tau = -e^{-t} \sin(e^{3t} - 1)$$

che tende a zero per t tendente all'infinito. La funzione $\Phi(t)$ è però divergente, a causa dell'esponenziale positivo, e non tende a zero. In effetti $\Phi(t)$ non è una funzione uniformemente continua.

Un interessante corollario del lemma di Barbalat richiede l'introduzione di alcune nozioni aggiuntive. La norma L_p di una funzione del tempo $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ del tempo viene definita come segue

$$\|\varphi\|_p = \begin{cases} \left(\int_0^\infty |\varphi(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} & \text{se } p \in [1, \infty) \\ \sup_{t \geq 0} |\varphi(t)| & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Si dice che $\varphi \in L_p$ se esiste la norma $\|\varphi\|_p$. In generale con $\|\varphi\|$ si intende la norma L_2 . Una funzione troncata è definita come

$$\varphi_\delta(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{per } t \leq \delta \\ 0 & \text{per } t > \delta. \end{cases}$$

Si possono definire gli spazi L_p estesi

$$L_{pe} = \{ \varphi \mid \forall \delta < \infty, \varphi_\delta \in L_p \}$$

come l'insieme delle funzioni troncate per tempi finiti che sono in L_p . Per esempio $e^t \notin L_\infty$, ma $e^t \in L_{\infty e}$. Se $\varphi \in L_{\infty e}$ allora

$$\|\varphi_\delta\|_\infty = \sup_{t \leq \delta} \|\varphi(t)\|.$$

Una funzione φ può appartenere ad L_1 e non essere limitata, cioè può non appartenere ad L_∞ . Se però $\varphi \in L_1 \cap L_\infty$ allora $\varphi \in L_p$, per ogni $p \in [1, \infty)$ ³¹. Inoltre se $\varphi \in L_p$ ciò non implica che $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$, né garantito che $\varphi \in L_\infty$, ossia che sia limitata. Vale però il lemma di Barbalat visto prima. Da esso ne consegue il seguente corollario.

Corollario 3. [Corollario del lemma di Barbalat] Se $\varphi \in L_p \cap L_\infty$, per qualche $p \in [1, \infty)$, e $\dot{\varphi} \in L_\infty$, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0.$$

Dim. Posto $\Phi = \|\varphi\|^p$, poiché $\varphi, \dot{\varphi}$ sono limitate allora Φ è uniformemente continua. Inoltre poiché $\varphi \in L_p$ allora

$$\int_0^\infty \|\varphi(\tau)\|^p d\tau = \int_0^\infty \Phi(\tau) d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \Phi(\tau) d\tau$$

esiste. Per il lemma di Barbalat si deduce che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi\|^p = 0$$

³¹ Si veda il libro di Desoer e Vidyasagar, 1975, pag 17.

e dunque che $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$. $\square$

Corollario 4. Se $\psi: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ è tale che

- 1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \psi^T(\tau) \psi(\tau) d\tau < \infty$;
- 2) $\|\psi(t)\| \leq k_1$, per ogni $t \geq t_0$;
- 3) $\left\| \frac{d\psi(t)}{dt} \right\| \leq k_2$, per ogni $t \geq t_0$;

con k_1, k_2 numeri reali positivi e finiti, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi(t)\| = 0.$$

Dim. Posto $\varphi(t) = \psi^T(t)\psi(t)$, le condizioni 2) e 3) implicano che $\varphi(t)$ e $\dot{\varphi}(t)$ sono limitate. Dunque $\varphi(t)$ è uniformemente continua. Si può allora applicare il lemma di Barbalat, per il quale $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t)\| = 0$. Di conseguenza $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi(t)\| = 0$. $\square$

Possiamo ora enunciare un interessante risultato.

Teorema 21. Sia $f(t, x)$ continua a tratti in t e localmente Lipschitz in x (uniformemente in t) su $[0, \infty) \times D$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_e\| < r\}$. Sia $V: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e tale che per ogni $t \geq 0$ e per ogni $x \in D$

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x)$$

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x)$$

con $W_1(x), W_2(x) \in C^0$ e definite positive, $W_3(x) \in C^0$ semidefinita positiva su D . Le soluzioni di $\dot{x} = f(t, x)$, con

$$x_0 \in \left\{ x \in B_{x_e, r} \mid W_2(x) \leq \rho < \min_{\|x - x_e\| = r} W_1(x) \right\}$$

sono limitate e tali che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_3(x(t)) = 0.$$

Se ciò vale globalmente e $W_1(x)$ è radialmente illimitata, questo vale $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Dim. Similmente alla dimostrazione del teorema di Lyapunov, si può mostrare che se

$$x_0 \in \{x \in B_{x_0, r} \mid W_2(x) < \rho\}$$

allora

$$x(t) \in \Omega_{t, \rho}, \quad \forall t \geq t_0$$

in quanto $\dot{V}(t, x) \leq 0$. Pertanto $\|x(t) - x_e\| \leq r$ per ogni $t \geq t_0$. Poiché $V(t, x(t))$ è monotonicamente non crescente ed è limitata inferiormente da zero, converge per t tendente all'infinito. Siccome

$$\int_{t_0}^t W_3(x(\tau)) d\tau \leq - \int_{t_0}^t \dot{V}(\tau, x(\tau)) d\tau = V(t_0, x_0) - V(t, x(t))$$

ne consegue che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t W_3(x(\tau)) d\tau$$

esiste ed è finito.

Poiché $\|x(t) - x_e\| < r$ per ogni $t \geq t_0$ ed $f(t, x)$ è localmente Lipschitz in x , ne segue che $x(t)$ è uniformemente continua in t su $[t_0, \infty)$. Di conseguenza $W_3(x(t))$ è uniformemente continua in t su $[t_0, \infty)$, in quanto $W_3(x)$ è uniformemente continua in x sul compatto $B_{x_e, r}$.

Per il lemma di Barbalat si conclude che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_3(x(t)) = 0.$$

Se poi tutte le assunzioni valgono globalmente e $W_1(x)$ è radialmente illimitata, per ogni x_0 si può scegliere un ρ abbastanza grande sicché $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid W_2(x) < \rho\}$. $\square$

Dunque $x(t)$ tende ad

$$E = \{x \in D \mid W_3(x) = 0\}$$

per t tendente all'infinito, e pertanto l'insieme limite positivo è contenuto in E . Nel caso stazionario l'insieme limite positivo era invariante, mentre caso dei sistemi non stazionari in generale ciò non è più vero³², per cui non possono essere dedotte ulteriori conclusioni sfruttando le equazioni del sistema, come si fa nel caso dei sistemi autonomi. Il teorema seguente mostra però che la stabilità asintotica uniforme può essere dedotta se, oltre ad essere $\dot{V}(t, x) \leq 0$, l'integrale di $\dot{V}(t, x)$ soddisfa una certa disuguaglianza.

Teorema 22. Sia $f(t, x)$ continua a tratti in t e localmente Lipschitz in x (uniformemente in t) su $[0, \infty) \times D$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_e\| < r\}$. Sia $x_e = 0$ un punto d'equilibrio per $\dot{x} = f(t, x)$ per $t = 0$. Sia $V: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e tale che per ogni $t \geq 0$ e per ogni $x \in D$

$$\begin{aligned} W_1(x) &\leq V(t, x) \leq W_2(x) \\ \dot{V}(t, x) &= \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) \leq 0 \\ \int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, x(\tau, t, x)) d\tau &\leq -\lambda V(t, x), \quad \lambda \in (0, 1) \end{aligned}$$

per qualche $\delta > 0$, con $W_1(x), W_2(x) \in C^0$ e definite positive, e con $x(\tau, t, x)$ la soluzione del sistema a partire da (t, x) . Allora $x_e = 0$ è uniformemente asintoticamente stabile.

Se tutte le assunzioni valgono globalmente e $W_1(x)$ è radialmente illimitata, $x_e = 0$ è globalmente uniformemente asintoticamente stabile.

Se poi

$$k_1 \|x - x_e\|^c \leq W_1(x), \quad W_2(x) \leq k_2 \|x - x_e\|^c, \quad k_1, k_2, c > 0$$

allora $x_e = 0$ è esponenzialmente stabile.

Dim. Similmente alla dimostrazione del teorema di Lyapunov, si può mostrare che se

$$x_0 \in \{x \in B_{x_0, r} \mid W_2(x) < \rho\}$$

$\rho < \min_{\|x - x_e\| = r} W_1(x)$, allora

$$x(t) \in \Omega_{t, \rho}, \quad \forall t \geq t_0$$

³² Per sistemi particolari, come i sistemi non stazionari periodici o quasi-periodici vale un tipo di invarianza.

in quanto $\dot{V}(t, x) \leq 0$. Ora per ogni $t \geq t_0$ si ha

$$V(t + \delta, x(t + \delta)) = V(t, x(t)) + \int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, x(\tau, t, x)) d\tau \leq V(t, x(t)) - \lambda V(t, x(t)) = (1 - \lambda)V(t, x(t)).$$

Inoltre poiché $\dot{V}(t, x) \leq 0$

$$V(\tau, x(\tau)) \leq V(t, x(t)), \quad \forall \tau \in [t, t + \delta].$$

Fissato allora $t \geq t_0$, sia $n > 0$ il più piccolo intero tale che $t \leq t_0 + n\delta$, e si divida l'intervallo $[t_0, t_0 + (n - 1)\delta]$ in $(n - 1)$ sotto intervalli uguali di lunghezza δ . Si noti che $\frac{t - t_0}{\delta} \leq n$. Allora

$$\begin{aligned} V(t, x(t)) &\leq V(t_0 + (n - 1)\delta, x(t_0 + (n - 1)\delta)) \\ &\leq (1 - \lambda)V(t_0 + (n - 2)\delta, x(t_0 + (n - 2)\delta)) \\ &\leq \dots \leq (1 - \lambda)^{n-1}V(t_0, x(t_0)) = \frac{1}{1 - \lambda}(1 - \lambda)^n V(t_0, x(t_0)) \\ &\leq \frac{1}{1 - \lambda}(1 - \lambda)^{\frac{t - t_0}{\delta}} V(t_0, x(t_0)) \\ &= \frac{V(t_0, x(t_0))}{1 - \lambda} e^{-b(t - t_0)} \\ &= \sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0) \end{aligned}$$

ove si è posto

$$(1 - \lambda)^{\frac{t - t_0}{\delta}} = e^{-b(t - t_0)} \Rightarrow b = -\frac{1}{\delta} \ln(1 - \lambda) = \frac{1}{\delta} \ln \frac{1}{1 - \lambda}$$

e

$$\sigma(r, s) = \frac{r}{1 - \lambda} e^{-bs} \in \mathcal{KL}.$$

Dunque

$$V(t, x(t)) \leq \sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0), \quad \forall V(t_0, x_0) \in [0, \rho].$$

La restante parte della dimostrazione è come quella del teorema di Lyapunov e suoi corollari. $\square$

Si noti che nel caso di sistemi lineari la condizione

$$\int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, x(\tau, t, x)) d\tau \leq -\lambda V(t, x), \quad \lambda \in (0, 1)$$

può anche essere scritta

$$\int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, x(\tau, t, x)) d\tau \leq -\lambda_1 \|x\|^2, \quad \lambda \in (0, 1)$$

come mostrato nell'esempio seguente.

Esempio. Si consideri la classe di sistemi lineari tempo varianti

$$\dot{x} = A(t)x$$

aventi la matrice $A(t)$ continua per ogni $t \geq 0$. Si supponga che esista una matrice $P(t) = P^T(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di classe C^1 tale che per ogni $t \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 &< c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I \\ \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) &= -C^T(t)C(t) \end{aligned}$$

con $C(t)$ continua in t .

Considerata la funzione candidata $V(t, x) = x^T P(t)x \leq c_2 \|x\|^2$, la cui derivata vale

$$\dot{V}(t, x) = x^T (P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + \dot{P}(t))x = -x^T C^T(t)C(t)x \leq 0$$

si può notare che

$$\int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, x(\tau, t, x)) d\tau = \int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, \Phi(\tau, t)x) d\tau = -x^T \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, t) d\tau x$$

essendo $x(\tau, t, x) = \Phi(\tau, t)x$ la soluzione del sistema lineare. Considerato il *Grammiano di osservabilità*

$$G_o(t, t+\delta) = \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, t) d\tau$$

si supponga che esista una costante $k < c_2$ tale che

$$G_o(t, t+\delta) = \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, t) d\tau \geq kI, \quad \forall t \geq 0$$

ossia si supponga che il sistema lineare tempo variante

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x \\ y &= C(t)x \end{aligned}$$

sia *uniformemente completamente osservabile*³³. Allora

$$\int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, x(\tau, t, x)) d\tau \leq -x^T G_o(t, t+\delta)x \leq -k \|x\|^2 \leq -\frac{k}{c_2} V(t, x).$$

³³ Il sistema lineare tempo variante

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x \\ y &= C(t)x \end{aligned}$$

con $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^m$, e $A(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $C(t) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ funzioni continue a tratti (e dunque appartenenti a $L_{\infty c}$), è *uniformemente completamente osservabile* se esistono delle costanti $k_1, k_2 > 0$ e $\delta > 0$ tali che il *grammiano di osservabilità* gode della proprietà

$$k_2 I \geq G_o(t, t+\delta) = \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, t) d\tau \geq k_1 I, \quad \forall t \geq t_0. \quad \square$$

Si noti che poiché $x(\tau) = \Phi(\tau, t)x(t)$, la precedente condizione si può anche scrivere

$$k_2 \|x(t)\|_2^2 \geq \int_t^{t+\delta} x^T(t)\Phi^T(\tau, t)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, t)x(t) d\tau = \int_t^{t+\delta} x^T(\tau)C^T(\tau)C(\tau)x(\tau) d\tau = \int_t^{t+\delta} \|y(\tau)\|_2^2 d\tau \geq k_1 \|x(t)\|_2^2, \quad \forall t \geq t_0.$$

L'aggettivo completo, che si riferisce al fatto che la condizione è soddisfatta per ogni $x(t)$, viene spesso omissso. Inoltre l'aggettivo uniforme si riferisce al fatto che la relazione è soddisfatta con le stesse costanti per ogni t . Uno specifico $x(t)$ è osservabile su uno specifico intervallo $[t, t+\delta]$ se

$$k_2 \|x(t)\|_2^2 \geq \int_t^{t+\delta} \|y(\tau)\|_2^2 d\tau \geq k_1 \|x(t)\|_2^2, \quad \forall t \geq t_0$$

è soddisfatta su tale intervallo, sicché $x(t)$ è ricostruibile dalla conoscenza della funzione $y(\cdot)$ utilizzando l'espressione

$$x(t) = G_o^{-1}(t, t+\delta) \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t)C^T(\tau)y(\tau) d\tau$$

in cui $y(\tau) = C(\tau)x(\tau) = C(\tau)\Phi(\tau, t)x(t)$.

D'altra parte se la condizione di uniforme completa osservabilità non è verificata, allora esiste un $x(t) \neq 0$ tale che la corrispondente uscita soddisfa

$$\int_t^{t+\delta} \|y(\tau)\|_2^2 d\tau = 0$$

sicché tale $x(t)$ è indistinguibile dallo stato zero.

Pertanto tutte le condizioni del teorema precedente sono soddisfatte globalmente con

$$W_i(x) = c_i \|x\|^2, \quad i = 1, 2, \quad \lambda = \frac{k}{c_2} < 1$$

e quindi l'origine è stabile globalmente esponenzialmente. $\square$

Quest'ultimo esempio mostra che l'origine di un sistema lineare tempo variante, con $A(t)$ e $C(t)$ continue per ogni $t \geq 0$ e per il quale risulti $\dot{V} \leq -x^T C^T(t)C(t)x \leq 0$, è globalmente esponenzialmente stabile se la coppia $(A(t), C(t))$ è uniformemente completamente osservabile. Più precisamente vale il seguente risultato.

Teorema 23. [Stabilità esponenziale di un sistema lineare tempo variante] Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

- 1) $x_e = 0$ è un punto d'equilibrio esponenzialmente stabile per

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x \\ y &= C(t)x \end{aligned}$$

con la coppia $(A(t), C(t))$ uniformemente completamente osservabile;

- 2) per ogni $C(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ continua, con m arbitrario, tale che $(A(t), C(t))$ è uniformemente completamente osservabile, esiste una matrice $P(t) = P^T(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di classe C^1 tale che per ogni $t \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I \\ \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) &= -C^T(t)C(t) \end{aligned}$$

- 3) per qualche $C(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ continua, con m arbitrario, tale che $(A(t), C(t))$ è uniformemente completamente osservabile, esiste una matrice $P(t) = P^T(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di classe C^1 tale che per ogni $t \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I \\ \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) &= -C^T(t)C(t). \end{aligned}$$

Dim. La 1) implica la 2). Se si definisce

$$P(t) = \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau$$

si osserva che

$$\dot{P}(t) = -\Phi^T(t, t) C^T(t) C(t) \Phi(t, t) + \int_t^\infty \frac{d}{dt} \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau + \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \frac{d}{dt} \Phi(\tau, t) d\tau$$

ove $\Phi(t, t) = I$. Poi è noto che

$$\frac{d}{dt} \Phi(\tau, t) = -\Phi(\tau, t) A(t).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= -C^T(t)C(t) - \int_t^\infty A^T(t) \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau - \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) A(t) d\tau \\ &= -C^T(t)C(t) - A^T(t)P(t) - P(t)A(t). \end{aligned}$$

Essendo un'equazione differenziale lineare la soluzione è unica una volta fissata la condizione iniziale $P(0)$.

Per l'assunzione di uniforme completa osservabilità

$$k_2 I \geq G_o(t, t + \delta) = \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \geq k_1 I, \quad \forall t \geq t_0$$

e quindi $P(t) \geq k_1 I$. Inoltre, diviso l'intervallo di integrazione di $P(t)$ in intervalli di ampiezza δ e considerato l'intervallo $[t + \delta, t + 2\delta]$

$$\int_{t+\delta}^{t+2\delta} \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau = \Phi^T(t + \delta, t) \int_{t+\delta}^{t+2\delta} \Phi^T(\tau, t + \delta) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t + \delta) d\tau \Phi(t + \delta, t)$$

e poiché $x_e = 0$ è un punto d'equilibrio esponenzialmente stabile per $\dot{x} = A(t)x$ se e solo se $\|\Phi(t, t_0)\| \leq k e^{-\lambda(t-t_0)}$ per qualche $k, \lambda > 0$, si ha

$$\int_{t+\delta}^{t+2\delta} \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \leq \Phi^T(t + \delta, t) k_2 I \Phi(t + \delta, t) = k_2 I \|\Phi(t + \delta, t)\|^2 \leq k_2 k^2 e^{-2\lambda\delta} I$$

dove è stata usata l'uniforme completa osservabilità. Sommando su tutti gli intervalli

$$P(t) = \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \leq k_2 (1 + k^2 e^{-2\lambda\delta} + k^4 e^{-4\lambda\delta} + \dots) I = c_2 I.$$

La 2) implica la 3). Ovvio.

La 3) implica la 1). Considerata la funzione di Lyapunov $V(t, x) = x^T P(t)x$ e calcolando come nell'esempio precedente si ha

$$\int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, x(\tau, t, x)) d\tau \leq -x^T G_o(t, t + \delta)x \leq -k \|x\|^2 \leq -\frac{k}{c_2} V(t, x)$$

e si deduce la stabilità esponenziale globale di $x_e = 0$. $\square$

In un precedente esempio con lo stesso sistema lineare tempo variante, si era supposto che $P(t)$ soddisfacesse una condizione più forte, ossia che fosse soluzione dell'equazione di Riccati

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) = -Q(t)$$

con $Q(t) \in C^0$ simmetrica e definita positiva, e si era dedotta la stabilità globale esponenziale dell'origine. Il teorema ora visto permette di sostituire la definitezza positiva di $Q(t)$ con una condizione meno forte, quale la semidefinitezza positiva di $Q(t) = C^T(t)C(t)$. Serve però che sia soddisfatta la condizione $G_o(t, t + \delta) \geq kI$ per ogni $t \geq 0$, con $G_o(t, t + \delta)$ che il Grammiano di osservabilità della coppia $(A(t), C(t))$, e quindi tale condizione è implicata dalla osservabilità uniforme della coppia $(A(t), C(t))$. Questo è l'analogo di quanto detto a proposito dei sistemi lineari stazionari e del teorema di La Salle.

A completamento di quanto detto sulla osservabilità di un sistema lineare, enunciamo il seguente lemma, che afferma l'equivalenza tra l'uniforme completa osservabilità del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x \\ y &= C(t)x \end{aligned}$$

e quella del sistema con iniezione dell'uscita (output injection)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A(t) + K(t)C(t))x \\ y &= C(t)x \end{aligned}$$

ove $K(t)$ è continua a tratti e uniformemente limitata.

Lemma 5. [Uniforme completa osservabilità sotto iniezione dell'uscita] Si assuma che per ogni $\delta > 0$ esista un $k_\delta > 0$ tale che per ogni $t \geq t_0$

$$\int_t^{t+\delta} \|K(\tau)\|^2 d\tau \leq k_\delta.$$

Allora il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x \\ y &= C(t)x\end{aligned}$$

è uniformemente completamente osservabile se e solo se il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A(t) + K(t)C(t))x \\ y &= C(t)x\end{aligned}$$

è uniformemente completamente osservabile. Inoltre se il Grammiano di osservabilità del primo sistema soddisfa

$$k_2 I \geq G_o(t, t + \delta) = \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \geq k_1 I, \quad \forall t \geq t_0$$

allora quello del secondo soddisfa

$$\bar{k}_2 I \geq \bar{G}_o(t, t + \delta) = \int_t^{t+\delta} \bar{\Phi}^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \bar{\Phi}(\tau, t) d\tau \geq \bar{k}_1 I, \quad \forall t \geq t_0$$

con

$$\bar{k}_1 = \frac{k_1}{(1 + \sqrt{k_\delta k_2})^2}, \quad \bar{k}_2 = k_2 e^{k_\delta k_2}.$$

Dim. La prova consiste nella determinazione delle costanti che appaiono nella definizione di uniforme completa osservabilità, e può essere trovata in [?], pag. 332. $\square$

Il seguente risultato è spesso applicato nel progetto di controllori adattativi.

Teorema 24. Sia dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + \Gamma^T(t, x, \zeta)\zeta \\ \dot{\zeta} &= -\Lambda\Gamma(t, x, \zeta)Px\end{aligned}$$

ove $x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \in \mathbb{R}^p$, con condizioni iniziali (x_0, ζ_0) , e dove

- A è una matrice $n \times n$ Hurwitz;
- $\Gamma(t, x, \zeta)$ è una matrice $p \times n$ di funzioni di classe C^∞ uniformemente limitate per ogni (x, ζ) limitato;
- $P = P^T > 0$ è una matrice $n \times n$ soluzione dell'equazione $PA + A^T P = -Q$, in cui $Q = Q^T > 0$;
- $\Lambda = \Lambda^T > 0$ è una qualsiasi matrice $p \times p$ di guadagni.

Allora

- 1) il punto d'equilibrio $(x_e, \zeta_e) = (0, 0)$ è uniformemente stabile;
- 2) le soluzioni $(x(t), \zeta(t))$ sono uniformemente limitate per ogni $t \geq t_0$ ed ogni condizione iniziale $(x_0, \zeta_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$;

3) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ per ogni condizione iniziale $(x_0, \zeta_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

Se inoltre

- $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}$ è uniformemente limitata per ogni (x, ζ) limitato;
- esiste una funzione α di classe $\mathcal{K}$ tale che

$$\alpha(\|\zeta\|) \leq \zeta^T \Gamma(t, x_e, \zeta) \Gamma^T(t, x_e, \zeta) \zeta, \quad \forall t \geq t_0, \forall \zeta \in \mathbb{R}^p$$

allora

4) il punto d'equilibrio $(x_e, \zeta_e) = (0, 0)$ è globalmente uniformemente asintoticamente stabile.

Dim. Si consideri la seguente funzione candidata di Lyapunov radialmente illimitata³⁴

$$V = x^T P x + \zeta^T \Lambda^{-1} \zeta$$

la cui derivata rispetto al tempo vale

$$\dot{V} = x^T (PA + A^T P)x + 2x^T P \Gamma^T(t, x, \zeta) \zeta - 2\zeta^T \Lambda^{-1} \Lambda \Gamma(t, x, \zeta) P x = -x^T Q x.$$

Essendo semidefinita negativa, (x_e, ζ_e) è un punto d'equilibrio uniformemente stabile³⁵. Inoltre essendo V radialmente illimitata, le soluzioni $(x(t), \zeta(t))$ sono uniformemente limitate per ogni $t \geq t_0$ ed ogni condizione iniziale $(x_0, \zeta_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

Essendo ora $x(t)$, $\zeta(t)$ e $\Gamma(t, x, \zeta)$ limitate, risulta che $\dot{x} = Ax + \Gamma(t, x, \zeta)\zeta$ è anch'essa limitata. Pertanto $x(t)$ è uniformemente limitata. Ne consegue che anche $\Phi = x^T Q x$ è uniformemente limitata. Inoltre integrando la relazione $\dot{V} = -x^T Q x$ si ha

$$\int_{t_0}^t x^T(\tau) Q x(\tau) d\tau = - \int_{t_0}^t \dot{V}(\tau) d\tau = V(t_0) - V(t)$$

il che implica che esiste ed è finito il seguente limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t x^T(\tau) Q x(\tau) d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \Phi(\tau) d\tau = V(t_0) - V(\infty) < \infty$$

in quanto $V(t_0)$ è limitato e $V(t)$ è risultata non crescente. Per il lemma di Barbalat ne segue che $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0$, e quindi che $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ per ogni condizione iniziale $(x_0, \zeta_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

Le condizioni aggiuntive per cui $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}$ è uniformemente limitata per ogni (x, ζ) limitato ed esiste una funzione α di classe $\mathcal{K}$ tale che

$$\alpha(\|\zeta - \zeta_e\|) \leq \zeta^T \Gamma^T(t, x_e, \zeta) \Gamma(t, x_e, \zeta) \zeta$$

garantiscono poi che il punto d'equilibrio (x_e, ζ_e) sia globalmente uniformemente asintoticamente stabile.

Infatti vale il seguente risultato.

³⁴ Se $(x_e, \zeta_e) \neq (0, 0)$ gli stessi argomenti varranno per la funzione $V = (x - x_e)^T P (x - x_e) + (\zeta - \zeta_e)^T \Lambda^{-1} (\zeta - \zeta_e)$.

³⁵ Si noti che non vale il teorema di La Salle in quanto il sistema non è stazionario.

Definizione 9. Sia K_0 un intorno compatto di $x_e = 0$ e sia $E \subset K_0$. Una funzione scalare $\varphi(t, x): [t_0, \infty) \times K_0 \rightarrow \mathbb{R}$ è definitivamente non nulla in E se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due numeri reali positivi β, δ per cui

$$|\varphi(t, x)| > \beta$$

per ogni $t \in [t_0, \infty)$ e per ogni $x \in K_0 - B_{x_e, \varepsilon}$ per cui $d(x, E) < \delta$, ove $d(x, E) := \inf_{y \in E} d(x, y)$ e $d(x, y)$ indica la distanza euclidea tra x ed y . $\square$

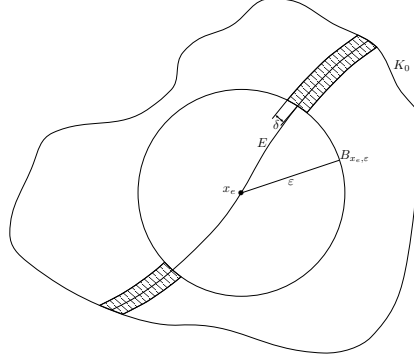


Figura 28 – Funzione definitivamente non nulla

Il seguente teorema permette di inferire la stabilità asintotica di un punto d'equilibrio di un sistema tempo variante quando la derivata della funzione candidata di Lyapunov $\dot{V}(t, x)$ risulta semidefinita negativa, purché appropriate condizioni aggiuntive vengono verificate. In particolare si noti che tale risultato vale quando la funzione $f(t, x)$ è limitata e se esiste una funzione ausiliare $w(t, x)$ la cui derivata rispetto al tempo risulta definitivamente non nulla nell'insieme E in cui si può annullare $\dot{V}(t, x)$. La funzione di tale funzione ausiliaria è quella di “stimare” come $\dot{V}(t, x)$ tende a zero.

Teorema 25. [Teorema di Matrosov] Sia $x_e = 0$ un punto d'equilibrio di $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, con $\|f(t, x)\| \leq k_1$ per ogni $(t, x) \in [t_0, \infty) \times U$, U intorno aperto connesso di x_e . Esista una funzione candidata di Lyapunov $V(t, x)$ (dunque di classe C^1) tale che

$$\alpha_1(\|x - x_e\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$$

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x) \leq 0, \quad \forall (t, x) \in [t_0, \infty) \times U$$

con $W_3(x)$ funzione continua da U ad $\mathbb{R}$. Esista poi un funzione $w(t, x): [t_0, \infty) \times U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , tale che $|w(t, x)| \leq k_2$, $k_2 > 0$, e con $\dot{w}(t, x) = \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} f(t, x)$ definitivamente non nulla in

$$E = \{x \in U \mid W_3(x) = 0\}.$$

Allora $x_e = 0$ è uniformemente asintoticamente stabile e una stima della regione di attrazione è data da

$$\{x \in U \mid V(t, x) \leq \alpha_1(r)\}$$

con $r > 0$ tale che la sfera chiusa $B_{x_e, r} \subset U$.

Dim. Una dimostrazione del teorema di Matrosov si può trovare in [?], pag. 263. $\square$

Alla luce del teorema di Matrosov, si considerino l'insieme

$$E = \{(x, \zeta) \mid x^T Q x = 0\} = \{(x, \zeta) \mid x = 0\}$$

e la funzione

$$w(t, x, \zeta) = x^T \Gamma^T(t, x, \zeta) \zeta.$$

Quest'ultima è di classe C^1 ed ha derivata rispetto al tempo

$$\dot{w}(t, x, \zeta) = x^T A^T \Gamma^T(t, x, \zeta) \zeta + \zeta^T \Gamma(t, x, \zeta) \Gamma^T(t, x, \zeta) \zeta + x^T \dot{\Gamma}^T(t, x, \zeta) \zeta - x^T \Gamma^T(t, x, \zeta) \Lambda \Gamma(t, x, \zeta) P x.$$

Poiché $\zeta^T \Gamma^T(t, x_e, \zeta) \Gamma(t, x_e, \zeta) \zeta \geq \alpha(\|\zeta - \zeta_e\|)$, $\alpha \in \mathcal{K}$, risulta che $\dot{w}(t, x, \zeta)$ è definitivamente non nulla in E . Valendo allora il teorema di Matrosov in un qualsiasi insieme aperto connesso di (x_e, ζ_e) , deve risultare che il punto d'equilibrio $(x_e, \zeta_e) = (0, 0)$ è uniformemente asintoticamente stabile. Essendo poi $V(t, x)$ radialmente illimitata, questo vale globalmente. $\square$

Se

$$\Gamma^T(t, x, \zeta) = b\gamma^T(t, cx) = b\gamma^T(t, y)$$

con b, c^T vettori reali $n \times 1$, tali che la terna (A, b, c) soddisfa la condizione di essere strettamente reale, il lemma di Kalman-Yacubovich-Popov³⁶ permette la seguente particolarizzazione del teorema ??.

Teorema 25. Considerato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\gamma^T(t, y)\zeta \\ \dot{\zeta} &= -\Lambda\gamma(t, y)y \\ y &= cx \end{aligned}$$

ove $x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \in \mathbb{R}^p$, con condizioni iniziali (x_0, ζ_0) , e dove

- la terna (A, b, c) soddisfa la condizione di essere strettamente reale

$$\operatorname{Re} \{c(j\omega I - A)^{-1}b\} > 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty);$$

- $\gamma(t, y)$ è un vettore $p \times 1$ di funzioni di classe C^∞ uniformemente limitate per ogni y limitato;
- $\Lambda = \Lambda^T > 0$ è una qualsiasi matrice $p \times p$ di guadagni.

Allora

- 1) il punto di equilibrio $(x_e, \zeta_e) = (0, 0)$ è uniformemente stabile;
- 2) le soluzioni $(x(t), \zeta(t))$ sono uniformemente limitate per ogni $t \geq t_0$ ed ogni condizione iniziale $(x_0, \zeta_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$;
- 3) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ per ogni condizione iniziale $(x_0, \zeta_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

Se inoltre

- $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ è uniformemente limitata per ogni y limitato;

³⁶ Tale lemma afferma che dati una matrice $n \times n$ Hurwitz A e due vettori colonna $n \times 1$ reali b e c^T , la terna (A, b, c) soddisfa la condizione di essere strettamente reale

$$\operatorname{Re} \{c(j\omega I - A)^{-1}b\} > 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty)$$

se e solo se per ogni matrice $Q = Q^T > 0$ $n \times n$ esistono una matrice $P = P^T > 0$, un vettore $n \times 1$ reale q ed un reale $\varepsilon > 0$ tali che

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= -qq^T - \varepsilon Q \\ Pb &= c^T. \end{aligned}$$

- esiste una funzione α di classe $\mathcal{K}$ tale che

$$\alpha(\|\zeta\|) \leq \zeta^T \gamma(t, cx_e) \gamma^T(t, cx_e) \zeta, \quad \forall t \geq t_0, \forall \zeta \in \mathbb{R}^p$$

allora

- 4) il punto d'equilibrio $(x_e, \zeta_e) = (0, 0)$ è globalmente uniformemente asintoticamente stabile.

Dim. Se P è soluzione di

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= -qq^T - \varepsilon Q \\ Pb &= c^T \end{aligned}$$

e se

$$\Gamma^T(t, x, \zeta) = b\gamma^T(t, cx) = b\gamma^T(t, y)$$

allora

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \Gamma^T(t, x, \zeta)\zeta = Ax + b\gamma^T(t, y) \\ \dot{\zeta} &= -\Lambda\Gamma(t, x, \zeta)Px = -\Lambda\gamma(t, y)b^T Px = -\Lambda\gamma(t, y)cx = -\Lambda\gamma(t, y)y \end{aligned}$$

allora il sistema considerato gode delle proprietà del teorema ??.

□

Nel caso speciale in cui $\Gamma(t, x, \zeta) = \Gamma(t)$ il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \Gamma^T(t)\zeta \\ \dot{\zeta} &= -\Lambda\Gamma(t)Px \end{aligned}$$

è lineare tempo variante. La condizione aggiuntiva è poi che $\dot{\Gamma}(t)$ è uniformemente limitata con

$$\alpha(\|\zeta\|) \leq \zeta^T \Gamma^T(t) \Gamma(t) \zeta, \quad \forall t \geq t_0, \forall \zeta \in \mathbb{R}^p.$$

Ricordando che per un sistema lineare tempo variante se l'origine è uniformemente asintoticamente stabile allora lo è globalmente esponenzialmente, il teorema ?? fornisce condizioni sufficienti perché il punto d'equilibrio $(x_e, \zeta_e) = (0, 0)$ sia globalmente esponenzialmente stabile. Lo stesso risultato vale però sotto condizioni più deboli, come illustrato dal teorema dell'eccitazione persistente. Prima di enunciarlo premettiamo alcune definizioni.

Definizione 9. Un segnale $w(t) \in \mathbb{R}^p$ si dice essere *persistentemente eccitante* se esistono delle costanti $k_1, k_2 > 0$ e $T > 0$ tali che

$$k_2 I \geq \int_t^{t+T} w(\tau) w^T(\tau) d\tau \geq k_1 I, \quad \forall t \geq t_0.$$

□

Si noti che mentre la matrice $w(\tau)w^T(\tau)$ è singolare per ogni τ , la condizione di persistente eccitazione richiede che il suo integrale su un intervallo finito di lunghezza T sia *definito positivo uniformemente*. Si noti inoltre che il limite superiore viene automaticamente soddisfatto se $w(t)$ è limitato.

La somma di due segnali persistentemente eccitanti non è necessariamente un segnale persistentemente eccitante, né un segnale in L_2 è necessariamente persistentemente eccitante. Però la somma di un segnale persistentemente eccitante ed di uno in L_2 è ancora un segnale persistentemente eccitante.

Lemma 5. Siano $w(t)$, $\nu(t)$ continue a tratti, con $w(t)$ eccitante persistentemente e

$$\int_0^\infty \|\nu(\tau)\|_2^2 d\tau \leq c < \infty$$

ossia $\nu \in L_2$. Allora anche $w(t) + \nu(t)$ è eccitante persistentemente.

Dim. Per la definizione di eccitazione persistente esistono delle costanti $k_1, k_2 > 0$ e $T > 0$ tali che

$$k_2 I \geq \int_t^{t+T} w(\tau) w^T(\tau) d\tau \geq k_1 I, \quad \forall t \geq t_0.$$

Ma allora, considerato un arbitrario vettore x con $\|x\|_2 = 1$, si ha

$$k_2 \geq \int_t^{t+T} x^T w(\tau) w^T(\tau) x d\tau = \int_t^{t+T} \left(w^T(\tau) x \right)^2 d\tau \geq k_1, \quad \forall t \geq t_0.$$

Inoltre³⁷ per l'ipotesi su $\nu(t)$

$$\int_0^\infty \left(\nu^T(\tau) x \right)^2 d\tau \leq \int_0^\infty \nu^T(\tau) \nu(\tau) d\tau = \int_0^\infty \|\nu(\tau)\|_2^2 d\tau \leq c < \infty.$$

Ora si consideri un istante $\delta = T(1+m)$, con $m \geq \frac{2c}{k_1}$ un intero. Si ha³⁸

$$\int_t^{t+\delta} \left((w(\tau) + \nu(\tau))^T x \right)^2 d\tau \geq \frac{1}{2} \int_t^{t+\delta} \left(w^T(\tau) x \right)^2 d\tau - \int_t^{t+\delta} \left(\nu^T(\tau) x \right)^2 d\tau \geq \frac{1}{2} (1+m) k_1 - c \geq \frac{1}{2} k_1$$

³⁷ Si ricorda innanzi tutto che se A è invertibile

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B)$$

in cui la seconda matrice è ottenuta dalla prima sottraendo dalla seconda riga la prima premoltiplicata per CA^{-1} . Analogamente se D è invertibile

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det D \det(A - BD^{-1}C)$$

avendo sottratto dalla prima riga la seconda premoltiplicata per BD^{-1} .

Si noti ora che se $\|x\|_2 = 1$, risulta che $(a^T x)^2 = a^T x x^T a \leq a^T a$, ossia $a^T(I - x x^T)a \geq 0$. Infatti posto $\tilde{a} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -x^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, sicché $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ x^T & 1 \end{pmatrix} \tilde{a}$, si ha

$$a^T(I - x x^T)a = \begin{pmatrix} a^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - x x^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{a}^T \begin{pmatrix} I & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - x x^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ x^T & 1 \end{pmatrix} \tilde{a} = \tilde{a}^T \begin{pmatrix} I & x \\ x^T & 1 \end{pmatrix} \tilde{a}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & x \\ x^T & 1 \end{pmatrix}$ è semidefinita positiva, come si può vedere applicando il criterio di Sylvester: tutti i minori principali di ordine minore o uguale a n (la lunghezza di x) hanno determinante pari ad 1, mentre quello di ordine $n+1$, ossia la matrice $\begin{pmatrix} I & x \\ x^T & 1 \end{pmatrix}$, ha determinante nullo, in quanto per quanto visto prima

$$0 = \det I \det(1 - x^T x) = \det A \det(D - CA^{-1}B) = \det D \det(A - BD^{-1}C) = \det 1 \det(I - x x^T) = \det(I - x x^T).$$

³⁸ Posto $a = w^T x$, $b = \nu^T x$ si ha $\left((w + \nu)^T x \right)^2 = (a + b)^2 \geq \frac{1}{2} a^2 - b^2$. Infatti portando al primo membro si ha sempre $\frac{1}{2} a^2 + 2ab + 2b^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} a + \sqrt{2} b \right)^2 \geq 0$. Analogamente $\left((w + \nu)^T x \right)^2 = (a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$. Infatti portando l'ultimo membro al primo si ha $-a^2 + 2ab - b^2 = -(a - b)^2 \leq 0$, che è sempre verificato.

ed analogamente

$$\int_t^{t+\delta} \left((w(\tau) + \nu(\tau))^T x \right)^2 d\tau \leq 2 \int_t^{t+\delta} \left(w^T(\tau) x \right)^2 d\tau + 2 \int_t^{t+\delta} \left(\nu^T(\tau) x \right)^2 d\tau \leq 2(1+m)k_2 + 2c.$$

Dunque

$$2(1+m)k_2 + 2c \geq \int_t^{t+\delta} \left((w(\tau) + \nu(\tau))^T x \right)^2 d\tau \geq \frac{1}{2}k_1$$

e quindi

$$(2(1+m)k_2 + 2c)I \geq \int_t^{t+\delta} (w(\tau) + \nu(\tau))(w(\tau) + \nu(\tau))^T d\tau \geq \frac{1}{2}k_1 I, \quad \forall t \geq t_0. \quad \square$$

Teorema 26. [Eccitazione Persistente] Sia dato il sistema lineare tempo-variante

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \Gamma^T(t)\zeta \\ \dot{\zeta} &= -\Lambda\Gamma(t)Px \end{aligned}$$

ove $x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \in \mathbb{R}^p$, con condizioni iniziali (x_0, ζ_0) , e dove

- A è una matrice $n \times n$ Hurwitz;
- $\|\Gamma(t)\|$ e $\|\dot{\Gamma}(t)\|$ sono uniformemente limitate e vale la condizione di persistenza di eccitazione, ossia esistono due reali $k > 0$, $T > 0$ tali che

$$\int_t^{t+T} \Gamma^T(\tau)\Gamma(\tau) d\tau \geq kI > 0, \quad \forall t \geq t_0;$$

- $P = P^T > 0$ è una matrice $n \times n$ soluzione dell'equazione $PA + A^T P = -Q$, in cui $Q = Q^T > 0$;
- $\Lambda = \Lambda^T > 0$ è una qualsiasi matrice $p \times p$ di guadagni.

Allora il punto d'equilibrio $(x_e, \zeta_e) = (0, 0)$ è globalmente esponenzialmente stabile.

Dim. Essendo $\Lambda > 0$ la si può scrivere come $\Lambda = L^T L$ e considerare le nuove coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ L^{-T}\zeta \end{pmatrix}$$

sicché, posto $\beta(t) = L\Gamma(t)$, il sistema si riscrive come

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \beta^T(t)\xi \\ \dot{\xi} &= -\beta(t)Px. \end{aligned}$$

La condizione di persistente eccitazione si riscrive poi

$$L \int_t^{t+T} \Gamma(\tau)\Gamma^T(\tau) d\tau L^T = \int_t^{t+T} \beta(\tau)\beta^T(\tau) d\tau \geq kLL^T \geq k_1 I > 0, \quad \forall t \geq t_0$$

per un k_1 opportuno. Le condizioni si riscrivono pertanto come per il sistema iniziale in cui si prenda $\Lambda = I$.

Si prenda dunque $A = I$ e si consideri la funzione candidata di Lyapunov radialmente illimitata

$$V = x^T P x + \zeta^T \zeta$$

la cui derivata rispetto al tempo vale

$$\dot{V} = x^T (PA + A^T P)x + 2x^T P \Gamma^T(t) \zeta - 2\zeta^T \Gamma(t) P x = -x^T Q x.$$

Per il teorema di Lyapunov il punto d'equilibrio $(x_e, \zeta_e) = (0, 0)$ è uniformemente stabile e $\|x(t)\|$, $\|\zeta(t)\|$ sono uniformemente limitate per ogni $t \geq t_0$. Essendo inoltre per ipotesi $\|\Gamma(t)\|$ uniformemente limitata, ne segue che anche

$$\|\dot{x}(t)\| = \|Ax + \Gamma^T(t)\zeta\| \leq \|A\| \|x(t)\| + \|\Gamma(t)\| \|\zeta(t)\|$$

è uniformemente limitata. Altra conseguenza del fatto che $\dot{V} \leq 0$ è che $V(t)$ è una funzione uniformemente limitata e non crescente per $t \geq t_0$, sicché

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t x^T(\tau) Q x(\tau) d\tau = - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \dot{V}(\tau) d\tau = V(t_0) - V(\infty) < \infty.$$

Siccome $Q > 0$, si può scrivere $Q = R^T R$ e dunque posto $\psi(t) = R x(t)$ si è mostrato finora che

- 1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \psi^T(\tau) \psi(\tau) d\tau < \infty$;
- 2) $\|\psi(t)\| \leq k_1$, per ogni $t \geq t_0$;
- 3) $\left\| \frac{d\psi(t)}{dt} \right\| \leq k_2$, per ogni $t \geq t_0$;

con k_1, k_2 numeri reali positivi e finiti. Siamo quindi nelle ipotesi del corollario ??, sicché

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi(t)\| = 0$$

ossia

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

in quanto R è invertibile.

Per mostrare che anche la norma di $\zeta(t)$ tende asintoticamente (e quindi esponenzialmente) per ogni condizione iniziale, occorre utilizzare il seguente fatto.

Fatto. Per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $T > 0$ fissati, per ogni condizione iniziale (x_0, ζ_0) esiste un $t > T$ tale che $\|\zeta(t)\| < \varepsilon$.

Dim. Per assurdo esista un istante t_1 tale che $\|\zeta(t)\| > \varepsilon$ per ogni $t \geq t_1$. Ricordando³⁹ che $\lambda_{\min}^P z^T z \leq z^T P z$, e preso in particolare $z = \Gamma^T(t)w$ con w un vettore $p \times 1$ con norma unitaria, dalla ipotesi assurda $\frac{\|\zeta(t)\|}{\varepsilon} \geq 1$ per $t \geq t_1$ e da quella di eccitazione permanente si ha che per $t \geq t_1$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \lambda_{\min}^P w^T \Gamma(\tau) \Gamma^T(\tau) w d\tau &= \lambda_{\min}^P w^T \int_t^{t+T} \Gamma(\tau) \Gamma^T(\tau) d\tau w = \lambda_{\min}^P k \\ &\leq \int_t^{t+T} w^T \Gamma(\tau) P \Gamma^T(\tau) w d\tau \leq \int_t^{t+T} \frac{\zeta^T(\tau)}{\|\zeta(\tau)\|} \Gamma(\tau) P \Gamma^T(\tau) \frac{\zeta(\tau)}{\|\zeta(\tau)\|} d\tau \\ &\leq \int_t^{t+T} \frac{\zeta^T(\tau)}{\varepsilon} \Gamma(\tau) P \Gamma^T(\tau) \frac{\zeta(\tau)}{\varepsilon} d\tau = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_t^{t+T} \zeta^T(\tau) \Gamma(\tau) P \Gamma^T(\tau) \zeta(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

³⁹ Nel seguito $\lambda_{\min}^P, \lambda_{\max}^P$ indicheranno gli autovalori più piccolo e più grande di P .

Pertanto

$$\int_t^{t+T} \zeta^T(\tau) \Gamma(\tau) P \Gamma^T(\tau) \zeta(\tau) d\tau \geq \lambda_{\min}^P k \varepsilon^2, \quad \forall t \geq t_1.$$

Sia poi k_Γ il limite di entrambe le norme $\|\Gamma(t)\|$, $\|\dot{\Gamma}(t)\|$, per ipotesi uniformemente limitate. Inoltre, poiché $V(t)$ è una funzione non crescente

$$\lambda_{\min}^P x^T x + \zeta^T \zeta \leq V \leq \lambda_{\max}^P x^T x + \zeta^T \zeta \leq \lambda_{\max}^P x_0^T x_0 + \zeta_0^T \zeta_0.$$

Essendo poi singolarmente $\lambda_{\min}^P x^T x \leq \lambda_{\min}^P x^T x + \zeta^T \zeta$, e $\zeta^T \zeta \leq \lambda_{\min}^P x^T x + \zeta^T \zeta$, si ricavano i limiti superiori

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}^P x_0^T x_0 + \zeta_0^T \zeta_0}{\lambda_{\min}^P}} = k_x, \quad \|\zeta(t)\| \leq \sqrt{\lambda_{\max}^P x_0^T x_0 + \zeta_0^T \zeta_0} = k_\zeta$$

essendo (x_0, ζ_0) le condizioni iniziali. Infine poiché si è mostrato che $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ per ogni condizione iniziale, questo equivale a dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un t_2 tale che

$$\|x(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_2.$$

Conseguenza di queste cose è che per ogni $t \geq t_2$ risulta

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+T} \left[x^T(\tau) P \Gamma^T(\tau) \Gamma(\tau) P - \zeta^T(\tau) \dot{\Gamma}(\tau) P - \zeta^T(\tau) \Gamma(\tau) P A \right] x(\tau) d\tau \\ & \leq [k_x (\lambda_{\max}^P)^2 k_\Gamma^2 + k_\zeta k_\Gamma \lambda_{\max}^P + k_\zeta k_\Gamma \lambda_{\max}^P \|A\|] \int_t^{t+T} \|x(\tau)\| d\tau \leq \frac{1}{2} k \lambda_{\min}^P \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Si ora consideri la funzione

$$\varphi(t, \zeta(t)) = \frac{1}{2} [\zeta^T(t+T) \zeta(t+T) - \zeta^T(t) \zeta(t)]$$

che è limitata in quanto tale è $\zeta(t)$. La sua derivata vale

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t, \zeta(t))}{dt} &= \zeta^T(t+T) \dot{\zeta}(t+T) - \zeta^T(t) \dot{\zeta}(t) = \int_t^{t+T} \frac{d(\zeta^T(\tau) \dot{\zeta}(\tau))}{d\tau} d\tau = - \int_t^{t+T} \frac{d(\zeta^T(\tau) \Gamma(\tau) P x(\tau))}{d\tau} d\tau \\ &= - \int_t^{t+T} [\dot{\zeta}^T(\tau) \Gamma(\tau) P x(\tau) + \zeta^T(\tau) \dot{\Gamma}(\tau) P x(\tau) + \zeta^T(\tau) \Gamma(\tau) P \dot{x}(\tau)] d\tau \\ &= \int_t^{t+T} [x^T(\tau) P \Gamma^T(\tau) \Gamma(\tau) P x(\tau) - \zeta^T(\tau) \dot{\Gamma}(\tau) P x(\tau) - \zeta^T(\tau) \Gamma(\tau) P A x(\tau) - \zeta^T(\tau) \Gamma(\tau) P \Gamma^T(\tau) \zeta(\tau)] d\tau \\ &= \int_t^{t+T} [x^T(\tau) P \Gamma^T(\tau) \Gamma(\tau) P - \zeta^T(\tau) \dot{\Gamma}(\tau) P - \zeta^T(\tau) \Gamma(\tau) P A] x(\tau) d\tau - \int_t^{t+T} \zeta^T(\tau) \Gamma(\tau) P \Gamma^T(\tau) \zeta(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ora, in base a quanto mostrato, per $t \geq \max\{t_1, t_2\}$ si ha

$$\frac{d\varphi(t, \zeta(t))}{dt} \leq -\frac{1}{2} k \lambda_{\min}^P \varepsilon^2$$

che contraddice la limitatezza di $\varphi(t, \zeta(t))$ per ogni $t \geq t_0$. Dunque l'ipotesi iniziale, che ciò esista un istante t_1 tale che $\|\zeta(t)\| > \varepsilon$ per ogni $t \geq t_1$, è assurda. Quindi dovrà essere vera la tesi. $\square$

Poiché si è mostrato che $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ per ogni condizione iniziale, questo equivale a dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un t_ε tale che

$$\|x(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\lambda_{\max}^P}}, \quad \forall t \geq t_\varepsilon.$$

In virtù del fatto appena visto esiste un istante di tempo $T_\varepsilon > t_\varepsilon$ tale che

$$\|\zeta(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Poiché (nella dimostrazione del fatto) si è visto che

$$\|\zeta(t)\| \leq \sqrt{\lambda_{\max}^P x_0^T x_0 + \zeta_0^T \zeta_0} = k_\zeta$$

e prese $x_0 = x(T_\varepsilon)$, $\zeta_0 = \zeta(T_\varepsilon)$, si ha

$$\|\zeta(t)\| \leq \sqrt{\lambda_{\max}^P x^T(T_\varepsilon) x(T_\varepsilon) + \zeta^T(T_\varepsilon) \zeta(T_\varepsilon)} \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq T_\varepsilon$$

il che implica che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\zeta(t)\| = 0$$

per ogni condizione iniziale. Dunque $(x_e, \zeta_e) = (0, 0)$ è attrattivo. Inoltre poiché $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t x^T(\tau) Q x(\tau) d\tau = V(t_0) - V(\infty) < \infty$ vale uniformemente rispetto a t_0 , anche $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\zeta(t)\| = 0$ valgono uniformemente rispetto a t_0 . Ne segue che $(x_e, \zeta_e) = (0, 0)$ è globalmente uniformemente asintoticamente stabile. Poiché il sistema di partenza è lineare, $(x_e, \zeta_e) = (0, 0)$ è anche globalmente esponenzialmente stabile. $\square$

2.10 Stabilità dei sistemi perturbati

Il sistema $\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)$ con $f: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzioni continue a tratti in t e localmente Lipschitz in x in $[0, \infty) \times D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ dominio contenente x_e , può pensarsi come la perturbazione di un modello nominale $\dot{x} = f(t, x)$, con $g(t, x)$ il risultato di errori di modellistica⁴⁰, invecchiamento, incertezze, disturbi. Su tale termine si potrebbe avere alcune informazioni, come un limite superiore su $\|g(t, x)\|$.

Se la perturbazione si annulla in x_e , ossia $g(t, x_e) = 0$, allora il sistema perturbato ha ancora x_e come punto di equilibrio e la stabilità di x_e può studiarsi in modo analogo a quello usato nel metodo indiretto di Lyapunov (quello della linearizzazione), con la differenza che qui $g(t, x)$ potrebbe essere più generale di quello visto nella linearizzazione.

Se viceversa $g(t, x_e) \neq 0$, x_e non è più di equilibrio per il sistema perturbato e non si può più studiare che il problema come una questione di stabilità di punti di equilibrio. Nuovi concetti, quali la stabilità ingresso-stato saranno necessari.

2.10.1 Perturbazioni che si annullano in x_e

Supponiamo che $g(t, x_e) = 0$. Considerato il sistema non perturbato $\dot{x} = f(t, x)$ supponiamo che esista una funzione di Lyapunov $V: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, di classe C^1 , tale che

$$k_1 \|x - x_e\|^c \leq V(t, x) \leq k_2 \|x - x_e\|^c$$

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) \leq -k_3 \|x - x_e\|^c$$

per ogni (t, x) , con $k_i, c > 0$, allora x_e è esponenzialmente stabile (eventualmente globalmente).

⁴⁰ Questo nel caso che non cambino l'ordine del sistema

Studiamo la stabilità di x_e per il sistema perturbato utilizzando la stessa funzione candidata $V(t, x)$. Lungo le traiettorie del sistema si trova che

$$\dot{V}(t, x) = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \right] + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \leq -k_3 \|x - x_e\|^c + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x).$$

Qui $\frac{\partial V}{\partial x} g(t, x)$ è l'effetto della perturbazione. Poiché non si conosce, almeno non completamente, la $g(t, x)$ non si sa se esso è tale da impedire che $\dot{V}(t, x)$ sia definita negativa. Supponiamo di sapere che $g(t, x)$ soddisfi un limite nella sua crescita

$$\|g(t, x)\| \leq L \|x - x_e\|^{c_1}, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x \in D, \quad \text{con } L \geq 0.$$

Ad esempio se $c_1 = 1$ la condizione si riduce a quella di Lipschitz. Se poi risulta che

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq k_4 \|x - x_e\|^{c_2}$$

con $c_1 + c_2 = c$ allora si può considerare una “analisi del caso peggiore”

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq -k_3 \|x - x_e\|^c + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \leq -k_3 \|x - x_e\|^c + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t, x)\| \\ &\leq -k_3 \|x - x_e\|^c + L k_4 \|x - x_e\|^c = -(k_3 - L k_4) \|x - x_e\|^c. \end{aligned}$$

Se L è abbastanza piccolo, ossia se la perturbazione “cresce poco”, sicché $L < \frac{k_3}{k_4}$ allora

$$\dot{V}(t, x) \leq -\bar{k}_3 \|x - x_e\|^c, \quad \bar{k}_3 = k_3 - L k_4 > 0$$

ed essendo inoltre $k_1 \|x - x_e\|^c \leq V(t, x) \leq k_2 \|x - x_e\|^c$ si conclude che x_e è esponenzialmente. Se tutto ciò vale globalmente, allora x_e è globalmente esponenzialmente stabile.

Quanto visto mostra che la stabilità esponenziale del punto d'equilibrio x_e del sistema nominale è robusta rispetto a perturbazioni $g(t, x)$ che verificano il vincolo imposto.

Esempio. Sia $\dot{x} = Ax + g(t, x)$ con A matrice Hurwitz e $g(t, x)$ Lipschitz in x , uniformemente in t , ossia $\|g(t, x)\|_2 \leq L \|x\|_2$, $\forall t \geq t_0$ e $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Fissata una matrice $Q = Q^T > 0$, sia $P = P^T > 0$ la soluzione unica di

$$PA + A^T P = -Q.$$

Dunque si può prendere $V = x^T P x$, che è tale che

$$\lambda_{\min}(P) \|x\|_2^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P) \|x\|_2^2$$

con

$$\dot{V}(x) = 2x^T P f(t, x) = 2x^T P A x = -x^T Q x \leq -\lambda_{\min}(Q) \|x\|^2$$

e

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|_2 = \|2x^T P\|_2 \leq 2\|P\|_2 \|x\|_2 = 2\lambda_{\max}(P) \|x\|_2.$$

Lungo le traiettorie del sistema perturbato

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x^T [Ax + g(t, x)] \leq -\lambda_{\min}(Q) \|x\|_2^2 + 2\lambda_{\max}(P) L \|x\|_2^2 \\ &= -[\lambda_{\min}(Q) - 2L\lambda_{\max}(P)] \|x\|_2^2 = -\bar{k}_3 \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

e se

$$L < \frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} = \frac{1}{2} \mu(Q)$$

allora $x_e = 0$ è globalmente esponenzialmente stabile. Si noti che $\mu(Q)$ è massimo per $Q = I^{41}$. $\square$

Esempio. Sia

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - 2x_2 + \beta x_2^3 \end{aligned}$$

$\beta \geq 0$ non nota. Questo sistema è del tipo

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta x_2^3 \end{pmatrix}$$

con $\sigma(A) = \{-1 \mp j\sqrt{3}\} \subset \mathbb{C}^-$. La soluzione di $PA + A^T P = -I$ è

$$P = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/8 \\ 1/8 & 5/16 \end{pmatrix}.$$

Essendo poi

$$\|g(x)\|_2 = \beta |x_2^3| \leq \beta c^2 |x_2| \leq \beta c^2 \|x\|_2 \quad \text{per } |x_2| \leq c$$

e poiché, presa $V = x^T P x$, si è visto che (vedi esempio precedente)

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq 2\lambda_{\max}(P) \|x\|_2 = 2 \cdot 1.51 \|x\|_2 = 3.02 \|x\|_2.$$

ove si è tenuto conto che $\sigma(P) = \{\simeq 1.51, \simeq 0.3\}$. Dunque:

$$\dot{V}(x) = -[\lambda_{\min}(Q) - 2L\lambda_{\max}(P)] \|x\|_2^2 = -(1 - 2\beta c^2 \cdot 1.51) \|x\|_2^2 = -(1 - 3.02 \beta c^2) \|x\|_2^2.$$

Se $\beta < \frac{1}{3.02c^2}$ allora $\dot{V}$ è definita negativa. Non conosciamo c . Per stimarlo sia

$$\Omega_\rho = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{5}{16}x_2^2 \leq \rho \right\}$$

⁴¹ Se $PA + A^T P = -Q$, anche $(kP)A + A^T(kP) = -kQ$, per cui $\mu(kQ) = \frac{\lambda_{\min}(kQ)}{\lambda_{\max}(kP)} = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} = \mu(Q)$. Se inoltre $\lambda_{\min}(\hat{Q}) = 1$, $\hat{Q} = \hat{Q}^T > 0$, allora le soluzioni

$$P_1 = \int_0^\infty e^{A^T t} I e^{At} dt, \quad P_2 = \int_0^\infty e^{A^T t} \hat{Q} e^{At} dt$$

delle equazioni di Sylvester sono tali che

$$P_1 - P_2 = \int_0^\infty e^{A^T t} (I - \hat{Q}) e^{At} dt \leq 0$$

in quanto $I - \hat{Q} \leq 0$. Dunque $P_2 \geq P_1$ e $\lambda_{\max}(P_2) \geq \lambda_{\max}(P_1)$, sicché

$$\frac{\mu(I)}{\mu(\hat{Q})} = \frac{\lambda_{\min}(I)}{\lambda_{\max}(P_1)} \frac{\lambda_{\max}(P_2)}{\lambda_{\max}(\hat{Q})} = \frac{\lambda_{\max}(P_2)}{\lambda_{\max}(P_1)} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \mu(I) \geq \mu(\hat{Q}).$$

Infine per ogni $Q = Q^T > 0$, si ponga $k = \frac{1}{\lambda_{\min}(Q)}$, $\hat{Q} = kQ$ (sicché $\lambda_{\min}(\hat{Q}) = 1$). Per quanto mostrato:

$$\mu(I) \geq \mu(\hat{Q}) = \mu(kQ) = \mu(Q).$$

e determiniamo il più grande valore di $|x_2|$ su $\partial\Omega_\rho$, ossia quando

$$\frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{5}{16}x_2^2 = \rho.$$

Derivando rispetto ad x_1 si ha

$$3x_1 + \frac{1}{4}x_2 = 0.$$

Dunque il massimo valore di x_2 si ottiene quando $V(x) = \rho$ interseca $x_1 = -\frac{1}{12}x_2$. Quindi

$$\frac{3}{2}\frac{x_2^2}{144} - \frac{1}{48}x_2^2 + \frac{5}{16}x_2^2 = \frac{87}{288}x_2^2 = \frac{29}{96}x_2^2 = \rho$$

ossia $V(x) = \rho$ il massimo valore di x_2^2 è $\frac{96}{29}\rho$. All'interno di Ω_ρ si ha $|x_2| \leq c = \sqrt{\frac{96}{29}\rho}$, e se allora

$$\beta < \frac{1}{3.02c^2} = \frac{1}{3.02\frac{96}{29}\rho} \simeq \frac{0.1}{\rho}$$

sicché $\dot{V}$ definita negativa su Ω_ρ e quindi $x_e = 0$ è esponenzialmente stabile con Ω_ρ la stima della regione di attrazione. Si vede che al diminuire di β la stima della regione di attrazione diventa più grande. $\square$

Supponiamo ora che esista una funzione di Lyapunov $V: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, di classe C^1 , tale che

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x)$$

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x)$$

per ogni (t, x) , con W_i continue e definite positive. Dunque x_e non è esponenzialmente stabile, bensì è più semplicemente uniformemente asintoticamente stabile.

Studiamo il punto d'equilibrio per il sistema perturbato. Si ha

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \right] + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \leq -W_3(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \\ &\leq -W_3(x) + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \right\| \end{aligned}$$

Vediamo quanto risulta $\left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \right\| < W_3(x)$. Un caso semplice da studiare è quando

$$W_3(x) \geq k_3\Phi^2(x), \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq k_4\Phi(x)$$

con $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua e definita positiva. Una funzione di Lyapunov per la quale

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -k_3\Phi^2(x)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq k_4\Phi(x)$$

è detta di tipo quadratico, che può esistere anche se x_e non è esponenzialmente stabile. Allora

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq -W_3(x) + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \right\| \leq -k_3\Phi^2(x) + k_4\Phi(x)\|g(t, x)\| \\ &= -k_3\Phi(x) \left[\Phi(x) - \frac{k_4}{k_3}\|g(t, x)\| \right] \end{aligned}$$

e se

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \Phi(x), \quad \gamma < \frac{k_4}{k_3}$$

allora $\dot{V}(t, x)$ è definita negativa e x_e è uniformemente asintoticamente stabile per il sistema perturbato.

Esempio. Sia $\dot{x} = -x^3 + g(t, x)$. Ovviamente $\dot{x} = -x^3$ ha $x_e = 0$ globalmente asintoticamente stabile. Poiché $x_e = 0$ è esponenzialmente stabile per $\dot{x} = f(t, x)$ se e solo se $\xi_e = 0$ è esponenzialmente stabile per $\dot{\xi} = A(t)\xi$, $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big|_{x_e=0}$, allora $x_e = 0$ non è esponenzialmente stabile per il sistema perturbato. Dunque non esisterà una $V(t, x)$ tale che

$$k_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq k_2 \|x\|^2, \quad \dot{V}(t, x) \leq -k_3 \|x\|^2, \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq k_4 \|x\|.$$

Però $V(t, x) = x^4$ è tale che

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 4x^3 \dot{x} = 4x^3 (-x^3) = -4x^6 = -k_3 \Phi^2(x) & k_3 &= 4, \Phi(x) = x^3 \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &= |4x^3| = k_3 \Phi(x) & k_4 &= 4 \end{aligned}$$

e se dunque

$$\|g(t, x)\| = |g(t, x)| \leq \gamma \Phi(x) = |x|^3, \quad \gamma < \frac{k_3}{k_4} = 1$$

allora $x_e = 0$ è uniformemente globalmente asintoticamente stabile per il sistema perturbato. $\square$

La differenza tra il caso di punto di equilibrio esponenzialmente stabile e punto di equilibrio uniformemente asintoticamente stabile è che in questo ultimo caso non si ha robustezza per perturbazioni di classe C^∞ con crescita in norma di tipo lineare e arbitrariamente piccole.

Esempio. Sia $\dot{x} = -x^3 + \gamma^2 x$. Mediante il metodo diretto di Lyapunov si vede che $x_e = 0$ è asintoticamente stabile per il sistema non perturbato $\dot{x} = -x^3$. Con il metodo indiretto si vede poi che x_e è instabile per il sistema perturbato, che ha una linearizzazione nell'intorno dell'origine data da $\dot{x} = \gamma^2 x$, comunque piccola sia la crescita di $g(x) = \gamma^2 x$. $\square$

2.10.2 Perturbazioni che non si annullano in x_e

Se $g(t, x_e) \neq 0$ (ovvero non si sa se $g(t, x_e) = 0$) allora x_e non è di equilibrio, o potrebbe non esserlo, per il sistema perturbato. Si può allora studiare se la soluzione $x(t)$ del sistema perturbato è tale che, se $g(t, x)$ è “piccolo”, sia limitata in norma per t sufficientemente grande.

Definizione 10. Si dice che la soluzione $x(t)$ di $\dot{x} = f(t, x)$ è *uniformemente ultimamente limitata* se esistono delle costanti $b, c > 0$ tali che $\forall \alpha \in (0, c)$, esiste un valore $T_\alpha > 0$ per cui se $\|x_0 - x_e\| < \alpha$ allora

$$\|x(t) - x_e\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T_\alpha.$$

Se ciò vale per α arbitrariamente grande si dice che $x(t)$ è *globalmente uniformemente ultimamente limitata*. La costante b è detta *limite ultimo*. Per i sistemi autonomi si può tralasciare l'aggettivo “uniforme”. $\square$

Teorema 27. Sia $f: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua a tratti in t e localmente Lipschitz in x , $D \subset \mathbb{R}^n$ dominio contenente x_e . Sia $V: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e tale che

$$\begin{aligned} W_1(x) &\leq V(t, x) \leq W_2(x) \\ \dot{V}(t, x) &\leq -W_3(x) \quad \forall x \mid \|x - x_e\| \geq \mu > 0 \end{aligned}$$

con W_i continue e definite positive in D . Fissato $B_{x_e, r} \subset D$, sia μ abbastanza piccolo perché

$$\eta = \max_{\|x - x_e\| \leq \mu} W_2(x) < \min_{\|x - x_e\| \leq r} W_1(x).$$

Si prenda $\rho \in \left(\eta, \min_{\|x - x_e\| \leq r} W_1(x) \right)$ e si consideri l'insieme

$$U = \{x \in B_{x_e, r} \mid W_2(x) \leq \rho\}.$$

Per $x_0 \in U$ esiste un istante $t_{1_{x_0, \mu}}$ finito ed una funzione $\beta \in \mathcal{KL}$ tale che la soluzione $x(t)$ di $\dot{x} = f(t, x)$ gode delle proprietà

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_e\| &\leq \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0) \quad \forall t \in [t_0, t_1) \\ x(t) &\in \{x \in B_{x_e, r} \mid W_1(x) \leq \eta\} \quad \forall t \geq t_1. \end{aligned}$$

Se $D = \mathbb{R}^n$ e $W_1(x)$ è radialmente illimitata ciò vale per ogni x e per ogni μ . □

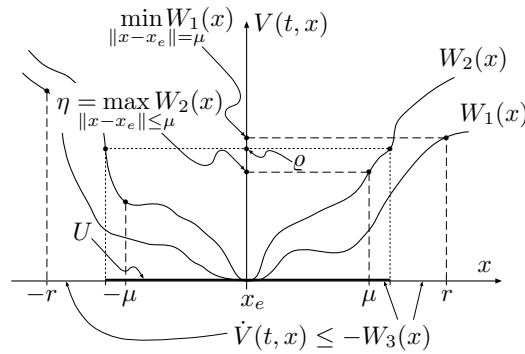


Figura 29 – Teorema della uniforme ultima limitatezza

Dim. La dimostrazione è più semplice considerando delle funzioni di classe $\mathcal{K}$ tali che

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x - x_e\|) &\leq W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|) \\ \dot{V}(t, x) &\leq -W_3(x) \leq -\alpha_3(\|x - x_e\|) \quad \forall x \mid \|x - x_e\| \geq \mu > 0. \end{aligned}$$

Fissato $r > \mu$ tale che $B_{x_e, r} \subset D$, resta individuata una linea di livello di $V(t, x)$ corrispondente al valore $\alpha_1(r)$. Linee di livello di valore più grande potrebbero essere esterne a $B_{x_e, r}$.

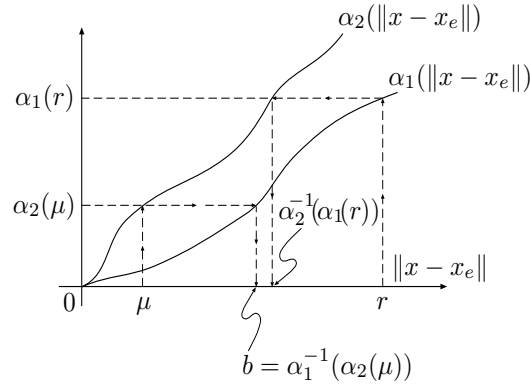


Figura 30 – Limite ultimo nel caso in cui $\alpha_1(\|x - x_e\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|)$

Si considerino dunque stati iniziali x_0 tali che

$$\|x_0 - x_e\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)).$$

In corrispondenza del valore $\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ si può considerare l'insieme

$$\Omega_{t, \alpha_2(\mu)} = \{x \in B_{x_e, r} \mid V(t, x) \leq \alpha_2(\mu)\}$$

il quale contiene $B_{x_e, \mu}$ ed è contenuto in $B_{x_e, b}$ con $b = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$.

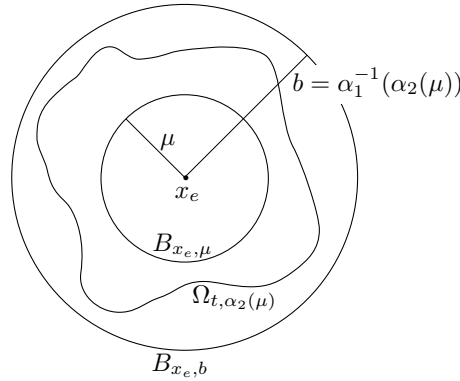


Figura 31

Esternamente ad $\Omega_{t, \alpha_2(\mu)}$, e quindi sulla frontiera di $B_{x_e, b}$ ed esternamente ad esso, $\dot{V}(t, x)$ è definita negativa e dunque $V(t, x)$ è decrescente. Analogamente alla dimostrazione del teorema di Lyapunov, sulla frontiera di $B_{x_e, b}$ ed esternamente ad esso risulterà

$$\dot{V}(t, x) \leq -\alpha(V(t, x)), \quad \alpha \in \mathcal{K}$$

e quindi

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0), \quad \beta \in \mathcal{KL}.$$

Pertanto le traiettorie che partono da $B_{x_e, \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))}$ entrano all'interno di $B_{x_e, b}$, $b = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$ in un tempo finito $t_{1x_0, \mu}$ e ivi resterà per tempi superiori, in quanto come detto sulla frontiera di $B_{x_e, b}$ risulta $\dot{V}(t, x)$ definita negativa. Dunque b è il limite ultimo della traiettoria.

Se poi $D = \mathbb{R}^n$ si può prendere $r \rightarrow \infty$, sicché $\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) \rightarrow \infty$ e x_0 può essere qualsiasi. $\square$

Dalla dimostrazione si vede che se

$$\alpha_1(\|x - x_e\|) \leq W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|)$$

con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$ in $[0, r]$, e se

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad \|x_0 - x_e\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$$

allora per il limite ultimo vale l'espressione

$$b = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)).$$

Si osservi che essendo $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \in \mathcal{K}$, risulta $\lim_{\mu \rightarrow 0} b = 0$.

Inoltre risultando

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_e\| &\leq \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0) && \text{per } t \in [t_0, t_1] \\ \|x(t) - x_e\| &\leq b = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) && \text{per } t \geq t_1 \end{aligned}$$

ne segue che in particolare si può anche scrivere

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0) + \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0.$$

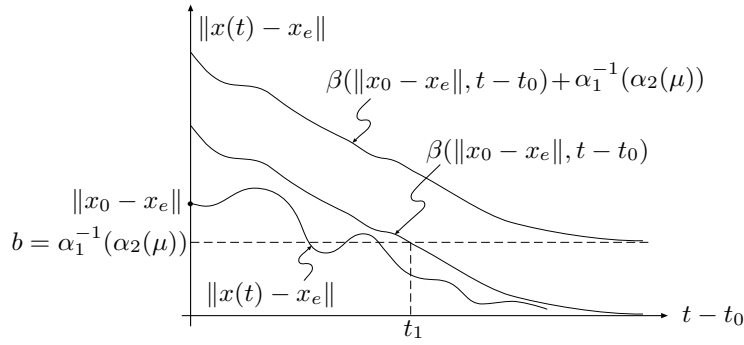


Figura 32 – Limitatezza della traiettoria

In particolare se

$$\begin{aligned} k_1 \|x - x_e\|^c &= \alpha_1(\|x - x_e\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|) = k_2 \|x - x_e\|^c \\ \dot{V}(t, x) &\leq -\alpha_3(\|x - x_e\|) = -k_3 \|x - x_e\|^c, && \forall x \mid \|x - x_e\| \geq \mu \end{aligned}$$

con $k_i, c > 0$, analogamente ai calcoli precedentemente visti, se μ e $\|x_0 - x_e\|$ sono minori di

$$\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) = \sqrt[c]{\frac{k_1}{k_2}} r$$

allora

$$\dot{V}(t, x) \leq -k_3 \|x - x_e\|^c \leq -\frac{k_3}{k_2} V(t, x)$$

e per il lemma del confronto

$$V(t, x) \leq V(t_0, x_0) e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\|x(t) - x_e\| &\leq \sqrt[c]{\frac{V(t, x)}{k_1}} \leq \sqrt[c]{\frac{V(t_0, x_0)}{k_1}} e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} \leq \sqrt[c]{\frac{k_2}{k_1}} \|x_0 - x_e\| e^{-\frac{k_3}{k_2 c}(t-t_0)} & \text{per } t \in [t_0, t_1) \\ \|x(t) - x_e\| &\leq b = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) = \alpha_1^{-1}(k_2 \mu^c) = \sqrt[c]{\frac{k_2}{k_1}} \mu & \text{per } t \geq t_1\end{aligned}$$

e in particolare

$$\|x(t) - x_e\| \leq \sqrt[c]{\frac{k_2}{k_1}} \left(\|x_0 - x_e\| e^{-\frac{k_3}{k_2 c}(t-t_0)} + \mu \right) \quad \text{per } t \geq t_0.$$

Come osservato prima $\lim_{\mu \rightarrow 0} b = 0$. Si noti che in questo caso si può calcolare esplicitamente l'istante t_1 imponendo

$$\beta(\|x_0 - x_e\|, t_1 - t_0) = \sqrt[c]{\frac{k_2}{k_1}} \|x_0 - x_e\| e^{-\frac{k_3}{k_2 c}(t_1-t_0)} = \sqrt[c]{\frac{k_2}{k_1}} \mu = b$$

ottenendo così

$$t_1 = t_{1, x_0, \mu} = t_0 + \ln \left(\frac{\|x_0 - x_e\|}{\mu} \right)^{\frac{k_2 c}{k_3}}.$$

Torniamo all'esame del sistema perturbato $\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)$ e supponiamo che x_e sia esponenzialmente stabile per il sistema non perturbato $\dot{x} = f(t, x)$ e sia $V(t, x)$ la funzione di Lyapunov che prova tale stabilità

$$\begin{aligned}k_1 \|x - x_e\|^c &\leq V(t, x) \leq k_2 \|x - x_e\|^c \\ \dot{V}(t, x) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -k_3 \|x - x_e\|^c.\end{aligned}$$

Come detto fin dall'inizio, x_e non è in generale d'equilibrio per il sistema perturbato. Studiamo dunque le traiettorie del sistema perturbato usando $V(t, x)$ come funzione candidata di Lyapunov. Si ha

$$\dot{V}(t, x) = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \right] + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \leq -k_3 \|x - x_e\|^c + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t, x)\|.$$

Poiché le funzioni α_1, α_2 sono polinomiali di grado c , $\frac{\partial V}{\partial x}$ sarà polinomiale di grado $c-1$ e dunque

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq k_4 \|x - x_e\|^{c-1}.$$

Supporremo inoltre che la perturbazione sia limitata

$$\|g(t, x)\| \leq \delta$$

con δ opportuno, come precisato nel seguito. Dunque, preso $\vartheta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, x) &\leq -k_3 \|x - x_e\|^c + \delta k_4 \|x - x_e\|^{c-1} + \vartheta k_3 \|x - x_e\|^c - \vartheta k_3 \|x - x_e\|^c \\ &= -k_3 (1 - \vartheta) \|x - x_e\|^c + \left(\delta k_4 - \vartheta k_3 \|x - x_e\| \right) \|x - x_e\|^{c-1}\end{aligned}$$

ed essendo per $\|x - x_e\| \geq \frac{\delta k_4}{\vartheta k_3}$

$$\delta k_4 - \vartheta k_3 \|x - x_e\| \leq 0$$

si ha

$$\dot{V}(t, x) \leq -k_3 (1 - \vartheta) \|x - x_e\|^c \quad \text{per } \|x - x_e\| \geq \mu = \frac{\delta k_4}{\vartheta k_3}.$$

Se allora μ e $\|x_0 - x_e\|$ sono minori di $\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) = \alpha_2^{-1}(k_1 r^c) = \sqrt[c]{\frac{k_1}{k_2}} r$, risulta che

$$\|x(t) - x_e\| \leq \sqrt[c]{\frac{k_2}{k_1}} \|x_0 - x_e\| e^{-\frac{k_3}{k_2 c}(t-t_0)} + \sqrt[c]{\frac{k_2}{k_1}} \mu \quad \text{per } t \geq t_0.$$

Si noti che $b = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) = \sqrt[c]{\frac{k_2}{k_1}} \mu$. Si noti inoltre che il fatto di prendere un $\mu = \frac{\delta k_4}{\vartheta k_3}$ minore di $\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) = \sqrt[c]{\frac{k_1}{k_2}} r$ implica che la perturbazione $g(t, x)$ deve essere limitata in norma da un δ tale che

$$\delta < \sqrt[c]{\frac{k_1}{k_2}} \frac{k_3}{k_4} \vartheta r.$$

Questo risultato può essere visto come una proprietà di robustezza del sistema nominale (avente x_e stabile): perturbazioni arbitrariamente piccole, non comportano deviazioni grandi dall'origine.

Esempio. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - 2x_2 + \beta x_2^3 + d(t) \end{aligned}$$

con $\beta \geq 0$ incognito e $d(t)$ uniformemente limitata:

$$\|d(t)\| \leq \delta, \quad \forall t \geq 0.$$

Il sistema non perturbato è lineare

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} x = Ax$$

ed ha $x_e = 0$ esponenzialmente stabile. Si è già visto in un precedente esempio che per $Q = I$ l'equazione di Sylvester $PA + A^T = I$ ha soluzione

$$P = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/8 \\ 1/8 & 5/16 \end{pmatrix}$$

sicché si può considerare per il sistema perturbato la funzione candidata $V(x) = x^T P x$. Si noti che mentre βx_2^3 si annulla in $x_e = 0$, ciò non accade per $d(t)$, per cui questo secondo termine va trattato in maniera differente del primo. Lungo le traiettorie del sistema perturbato si ha

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= 2x^T P \left[Ax + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta x_2^3 + d(t) \end{pmatrix} \right] = -x^T Q x + 2x_1 \frac{1}{8} [(\beta x_2^3 + d(t))] + 2x_2 \frac{5}{16} [(\beta x_2^3 + d(t))] \\ &= -\|x\|_2^2 + \frac{1}{8} \beta x_2^2 (2x_1 x_2 + 5x_2^2) + \frac{1}{8} d(t) (2x_1 + 5x_2). \end{aligned}$$

Ora si noti che

$$\begin{aligned} (ax_1 + bx_2)^2 &\leq (a^2 + b^2)(x_1^2 + x_2^2) \quad \Rightarrow \quad |ax_1 + bx_2| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)} \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad (ax_2 - bx_1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dunque

$$|2x_1 + 5x_2| \leq \sqrt{4 + 25} \|x\|_2 = \sqrt{29} \|x\|_2$$

per cui

$$2x_1x_2 + 5x_2^2 \leq |2x_1 + 5x_2||x_2| \leq \sqrt{29} \|x\|_2 |x_2| \leq \sqrt{36} \|x\|_2 \|x\|_2 = 6\|x\|_2^2.$$

Pertanto per $|x_2| \leq c$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq -\|x\|_2^2 + \frac{1}{8}\beta c^2 6\|x\|_2^2 + \frac{1}{8}\delta\sqrt{29} \|x\|_2 = -\left(1 - \frac{3}{4}\beta c^2\right) \|x\|_2^2 + \delta\frac{\sqrt{29}}{8} \|x\|_2 \\ &= -k\|x\|_2^2 + \delta\frac{\sqrt{29}}{8} \|x\|_2. \end{aligned}$$

Supponiamo che $\beta < \frac{4}{3c^2}$ per cui $k = 1 - \frac{3}{4}\beta c^2 > 0$. Sommando e sottraendo $k\vartheta\|x\|_2^2$, $\vartheta \in (0, 1)$, si trova che

$$\dot{V}(t, x) \leq -k(1 - \vartheta)\|x\|_2^2 - k\vartheta\|x\|_2^2 + \delta\frac{\sqrt{29}}{8} \|x\|_2$$

con

$$-k\vartheta\|x\|_2^2 + \delta\frac{\sqrt{29}}{8} \|x\|_2 \leq 0 \quad \text{per} \quad \|x\|_2 \geq \frac{\sqrt{29}}{8} \frac{\delta}{k\vartheta}.$$

Dunque se

$$\|x_0 - x_e\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) = \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}} r$$

con $r \leq c$, e se

$$\frac{\sqrt{29}}{8} \frac{\delta}{k\vartheta} < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}} c$$

ossia

$$\delta < \frac{8}{\sqrt{29}} k\vartheta \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} c,$$

si ha

$$\dot{V}(t, x) \leq -k(1 - \vartheta)\|x\|_2^2 = -k_3\|x\|_2^2 \quad \text{per} \quad \|x\|_2 \geq \mu = \frac{\sqrt{29}}{8} \frac{\delta}{k\vartheta}.$$

Ad essa si aggiunga che

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|_2^2 = k_1\|x\|_2^2 \leq V = x^T P x \leq k_2\|x\|_2^2 = \lambda_{\max}(P)\|x\|_2^2$$

per cui

$$b = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \mu = \frac{\sqrt{29}}{8} \frac{\delta}{k\vartheta} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} = \frac{\sqrt{29}}{8} \frac{\delta}{k\vartheta} \sqrt{\frac{1.51}{0.3}}. \quad \square$$

Se x_e non è esponenzialmente stabile ma è uniformemente asintoticamente stabile, per il sistema nominale esiste una funzione $V(t, x)$ tale che⁴²

$$\alpha_1(\|x - x_e\|) \leq W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x - x_e) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|)$$

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x) \leq -\alpha_3(\|x - x_e\|)$$

ed inoltre se⁴³

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq \alpha_4(\|x - x_e\|)$$

⁴² In effetti vale un teorema di “inversione” (converse theorem), per il quale se x_e è uniformemente asintoticamente stabile esiste una funzione $V(t, x)$ che gode delle suddette proprietà.

⁴³ Ciò è assicurato dal converse theorem, si veda la nota precedente.

con $\alpha_i \in \mathcal{K}$. Allora per il sistema perturbato si ha

$$\dot{V}(t, x) = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \right] + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \leq -\alpha_3(\|x - x_e\|) + \alpha_4(\|x - x_e\|) \|g(t, x)\|.$$

Se la perturbazione è tale che

$$\|g(t, x)\| \leq \delta$$

con δ opportuno, come specificato nel seguito, allora

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\alpha_3(\|x - x_e\|) + \delta\alpha_4(\|x - x_e\|) + \vartheta\alpha_3(\|x - x_e\|) - \vartheta\alpha_3(\|x - x_e\|) \\ &= -(1 - \vartheta)\alpha_3(\|x - x_e\|) + \delta\alpha_4(\|x - x_e\|) - \vartheta\alpha_3(\|x - x_e\|). \end{aligned}$$

Si nota che perché sia

$$\delta\alpha_4(\|x - x_e\|) - \vartheta\alpha_3(\|x - x_e\|) \leq 0$$

deve risultare in particolare

$$\alpha_3(\|x - x_e\|) \geq \frac{\delta}{\vartheta} \alpha_4(r)$$

in quanto $\alpha_4 \in \mathcal{K}$ è una funzione strettamente crescente, ossia deve essere

$$\|x - x_e\| \geq \mu = \alpha_3^{-1} \left(\frac{\delta}{\vartheta} \alpha_4(r) \right)$$

sicché

$$\dot{V} - (1 - \vartheta)\alpha_3(\|x - x_e\|) \quad \text{per } \|x - x_e\| \geq \mu = \alpha_3^{-1} \left(\frac{\delta}{\vartheta} \alpha_4(r) \right).$$

Pertanto se μ e $\|x_0 - x_e\|$ sono minori di $\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ si ha $b = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$ e

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0) + \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) \quad \forall t \geq t_0.$$

Infine perché sia

$$\alpha_3^{-1} \left(\frac{\delta}{\vartheta} \alpha_4(r) \right) = \mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$$

la perturbazione deve essere limitata in norma da

$$\delta < \vartheta \frac{\alpha_3(\alpha_2^{-1}\alpha_1(r))}{\alpha_4(r)}, \quad \vartheta \in (0, 1).$$

La differenza con il caso in cui x_e era esponenzialmente stabile per il sistema non perturbato è che nel caso di esponenzialmente stabile si richiedeva

$$\|g(t, x)\| \leq \delta < \sqrt[\varepsilon]{\frac{k_1}{k_2} \frac{k_3}{k_4}} \vartheta r, \quad \vartheta \in (0, 1)$$

che tende all'infinito per $r \rightarrow \infty$. Quindi se le ipotesi valgono globalmente, per tutti i disturbi uniformemente limitati la $x(t)$ del sistema perturbato è uniformemente limitata. Nel caso in cui x_e è uniformemente asintoticamente stabile per il sistema perturbato si richiede che

$$\|g(t, x)\| \leq \delta < \vartheta \frac{\alpha_3(\alpha_2^{-1}\alpha_1(r))}{\alpha_4(r)}, \quad \vartheta \in (0, 1)$$

e la funzione a destra non tende (in generale) all'infinito per $r \rightarrow \infty$ e dunque non si può concludere in generale che la $x(t)$ del sistema perturbato (da disturbi uniformemente limitati) è uniformemente limitata. Per taluni sistemi ciò, in particolare, può essere vero, ma non in generale. Ad esempio il sistema

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+x^2}$$

ha $x_e = 0$ globalmente uniformemente asintoticamente stabile, ma perturbandolo con una perturbazione uniformemente limitata

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+x^2} + \delta, \quad \delta > 0$$

risulta $x(t) \rightarrow \infty$ se $\delta > 1/2$. Infatti considerata

$$V(x) = x^4 = \alpha_1(\|x - x_e\|) = \alpha_2(\|x - x_e\|) = \|x - x_e\|^4$$

per il sistema non perturbato si ha

$$\dot{V} = -\frac{4x^4}{1+x^2} = -\alpha_3(\|x - x_e\|) \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ è (globalmente) uniformemente asintoticamente stabile}$$

Si vede che

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| = \|4x^3\| = 4|x|^3 = \alpha_4(\|x - x_e\|).$$

Si nota che $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \in \mathcal{K}_\infty$. Inoltre anche $\alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$ poiché $\frac{4r^4}{1+r^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$ ed è sempre crescente:

$$\frac{d}{dr} \frac{4r^4}{1+r^2} = 4 \frac{4r^3(1+r^2) - r^4 2r}{1+r^2} > 0$$

sempre verificato ($r = \|x - x_e\| > 0$). Ora

$$\vartheta \frac{\alpha_3(\alpha_2^{-1}\alpha_1(r))}{\alpha_4(r)} = \vartheta \frac{\alpha_3(r)}{\alpha_4(r)} = \vartheta \frac{4r^4}{4r^3(1+r^2)} = \vartheta \frac{r}{1+r^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

e se δ non è più piccolo di tale funzione, la $\|g(t, x)\| < \delta$ non viene più limitata. Ed in effetti poiché

$$|f(t, x)| = \left| \frac{-x}{1+x^2} \right| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x$$

(infatti vale sempre che $-(|x| - 1)^2 \leq 0$), si ha che se $\delta > \frac{1}{2}$

$$\dot{x} = \frac{-x}{1+x^2} + \delta > 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) \rightarrow \infty \quad \forall x_0.$$

Esempio. Riconsiderato il sistema

$$\dot{x} = -x^3 + \gamma^2 x, \quad \gamma \neq 0$$

di cui si è già visto che $x_e = 0$ è asintoticamente stabile per il sistema non perturbato ma è instabile per quello perturbato (la parte lineare ha l'autovalore $\gamma^2 > 0$), vediamo che con una limitazione opportuna sulla funzione $g(x) = \gamma^2 x$, del tipo $\|\gamma^2 x\| < \delta$ con δ opportuno, si ha che la $x(t)$ del sistema perturbato è ultimamente limitata. Infatti il sistema perturbato ha più punti di equilibrio

$$-x^3 + \gamma x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{e1} = 0, \quad x_{e2} = \gamma, \quad x_{e3} = -\gamma$$

che dipendono da γ , con

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{e2}} = (-3x^2 + \gamma^2)|_{-\gamma} = -2\gamma^2, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{e3}} = -2\gamma^2.$$

Quindi x_{e2}, x_{e3} sono asintoticamente stabile, mentre x_{e1} è instabile. $\square$

2.11 Stabilità ingresso stato (input-to-state stability – ISS)

Si consideri il sistema $\dot{x} = f(t, x, u)$ con $f: [0, \infty) \times D \times D_u \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua a tratti in t e localmente Lipschitz in x ed u , $D \subset \mathbb{R}^n$ dominio contenente $x_e = 0$, $D_u \subset \mathbb{R}^m$ dominio contenente u_e . Come nel caso di x_e , non è limitativo considerare $u_e = 0$, perché se ciò non fosse si potrebbe considerare una trasformazione $\mu = u - u_e$. L'ingresso $u(t)$ sia continuo a tratti e limitato $\forall t \geq t_0$.

Si supponrà che $\dot{x} = f(t, x, u_e)$ abbia il punto di equilibrio x_e uniformemente asintoticamente stabile. Allora $\dot{x} = f(t, x, u)$ può essere visto come la perturbazione di $\dot{x} = f(t, x, u_e)$

$$\dot{x} = f(t, x, u) = f(t, x, u_e) + \left[f(t, x, u) - f(t, x, u_e) \right] = F(t, x) + g(t, x)$$

$$F(t, x) = f(t, x, u_e)$$

$$g(t, x) = \bar{g}(t, x, u(t)) = f(t, x, u) - f(t, x, u_e)$$

e si possono applicare le tecniche viste per i sistemi perturbati. Per il sistema nominale esista una funzione $V(t, x)$ tale che

$$\alpha_1(\|x - x_e\|) \leq W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|)$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -W_3(x) \leq -\alpha_3(\|x - x_e\|)$$

ed inoltre⁴⁴

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq \alpha_4(\|x - x_e\|)$$

con $\alpha_i \in \mathcal{K}$. Allora per il sistema perturbato

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u_e) \right] + \frac{\partial V}{\partial x} [f(t, x, u) - f(t, x, u_e)] \\ &\leq -\alpha_3(\|x - x_e\|) + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t, x)\| \end{aligned}$$

in cui $g(t, x) = f(t, x, u) - f(t, x, u_e)$ ha il ruolo di perturbazione. Poiché $\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq \alpha_4(\|x - x_e\|)$ e se tale perturbazione soddisfa la condizione

$$\|g(t, x)\| = \|f(t, x, u) - f(t, x, u_e)\| \leq L\|u - u_e\|, \quad \text{con } L \geq 0$$

$\forall t \geq t_0$ e $\forall (x, u)$ in un intorno di (x_e, u_e) , allora preso $\vartheta \in (0, 1)$ si ha

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\alpha_3(\|x - x_e\|) + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t, x)\| \\ &\leq -\alpha_3(\|x - x_e\|) + \alpha_4(\|x - x_e\|) L\|u - u_e\| + \vartheta \alpha_3(\|x - x_e\|) - \vartheta \alpha_3(\|x - x_e\|) \\ &= -(1 - \vartheta) \alpha_3(\|x - x_e\|) + \alpha_4(\|x - x_e\|) L\|u - u_e\| - \vartheta \alpha_3(\|x - x_e\|). \end{aligned}$$

In $D = \{x \mid \|x - x_e\| < r\}$ risulta

$$\alpha_4(\|x - x_e\|) L\|u - u_e\| - \vartheta \alpha_3(\|x - x_e\|) \leq 0, \quad \forall t > t_0$$

in particolare quando

$$\alpha_4(r) L \sup_{t \geq t_0} \|u - u_e\| - \vartheta \alpha_3(\|x - x_e\|) \leq 0.$$

⁴⁴ Queste in realtà non sono ipotesi, in quanto vale un converse theorem per il quale se x_e è uniformemente asintoticamente stabile esiste una funzione $V(t, x)$ che gode delle suddette proprietà.

Dunque per

$$\|x - x_e\| \geq \mu = \alpha_3^{-1} \left(\frac{L}{\vartheta} \alpha_4(r) \sup_{t \geq t_0} \|u(t) - u_e\| \right)$$

si ha

$$\dot{V} \leq -(1 - \vartheta) \alpha_3(\|x - x_e\|).$$

In base ai risultati visti per i sistemi disturbati, se

$$\mu = \alpha_3^{-1} \left(\frac{L}{\vartheta} \sup_{t \geq t_0} \|u(t) - u_e\| \right) < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) \quad \text{e} \quad \|x_0 - x_e\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$$

ossia se

$$\sup_{t \geq t_0} \|u(t) - u_e\| < \frac{\vartheta \alpha_3(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)))}{L \alpha_4(r)} \quad \text{e} \quad \|x_0 - x_e\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$$

ossia per $\sup_{t \geq t_0} \|u(t) - u_e\|$ e $\|x_0 - x_e\|$ sufficientemente piccoli, si ha che le traiettorie del sistema sono uniformemente ultimamente limitate

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0) + \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$$

con limite ultimo

$$b = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)).$$

Pertanto per $\forall t \geq t_0$ risulta

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_e\| &\leq \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0) + \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) \\ &= \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0) + \alpha_1^{-1} \left(\alpha_2 \left(\alpha_3^{-1} \left(\frac{L}{\vartheta} \alpha_4(r) \sup_{t \geq t_0} \|u(t) - u_e\| \right) \right) \right) \\ &= \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0) + \rho \left(\sup_{\tau \geq t_0} \|u(\tau) - u_e\| \right) \end{aligned}$$

ove $\rho(\cdot) = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \left(\frac{L}{\vartheta} \alpha_4(r) (\cdot) - u_e \right) \in \mathcal{K}$. Questo motiva la seguente definizione di *stabilità ingresso-stato* (input-to-state stability).

Definizione 11. Il sistema $\dot{x} = f(t, x, u)$ è *localmente stabile ingresso-stato* se esistono una funzione $\beta \in \mathcal{KL}$, una funzione $\gamma \in \mathcal{K}$, delle costanti $k_1, k_2 > 0$ tali che

$$\begin{aligned} \forall x_0 \mid \|x_0 - x_e\| < k_1 \quad &\text{la soluzione } x(t) \text{ esiste e per } \forall t \geq t_0 \text{ risulta:} \\ \forall u \mid \sup_{t \geq t_0} \|u(t)\| < k_2 \quad &\Rightarrow \quad \|x(t) - x_e\| \leq \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0) + \gamma \left(\sup_{\tau \in [t_0, t]} \|u(\tau) - u_e\| \right) \end{aligned}$$

Il sistema è detto *stabile ingresso-stato* (ISS) se $D = \mathbb{R}^n$, $D_u = \mathbb{R}^m$ e quanto visto vale per ogni stato iniziale x_0 e per ogni funzione di ingresso $u(t)$ limitata. $\square$

Se un sistema $\dot{x} = f(t, x, u)$ è ISS allora se $u(t)$ è limitato allora anche $x(t)$ lo sarà, ed inoltre sarà ultimamente limitata con un limite ultimo funzione di $\sup_{t \geq t_0} \|u(t) - u_e\|$.

Si noti che poich 

$$\mu = \alpha_3^{-1} \left(\frac{L}{\vartheta} \sup_{t \geq t_0} \|u(t) - u_e\| \right) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \sup_{t \geq t_0} \|u(t) - u_e\| \rightarrow 0$$

in quanto μ è una funzione di classe $\mathcal{K}$ di $\sup_{t \geq t_0} \|u(t) - u_e\|$, allora risulta che se $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_e$ anche $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$. Per vederlo basta considerare che un generico istante $t_1 > t_0$ vale sempre

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta(\|x_1 - x_e\|, t - t_1) + \gamma \left(\sup_{\tau \in [t_1, t]} \|u(\tau) - u_e\| \right), \quad \forall t \geq t_1$$

con

$$\sup_{\tau \in [t_0, t]} \|u(\tau) - u_e\| \leq \sup_{\tau \in [t_1, t]} \|u(\tau) - u_e\|.$$

Dunque si comprende che μ , e dunque il limite ultimo $b = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) \rightarrow 0$ ossia $x(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$. Si noti inoltre che se $u(t) \equiv 0$ la definizione di ISS si riduce a

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta(\|x_0 - x_e\|, t - t_0)$$

ossia la ISS locale implica la uniforme asintotica stabilità di x_e per $\dot{x} = f(t, x, u_e)$, mentre la ISS implica la sua globale uniforme asintotica stabilità.

Teorema 28. Sia $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$, $D_u = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\| < r_m\}$, $f: [0, \infty) \times D \times D_u \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua a tratti in t e localmente Lipschitz in x ed u . Se $V: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 ed è tale che

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x - x_e\|) &\leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|) \\ \dot{V}(t, x) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) \leq -\alpha_3(\|x - x_e\|) \quad \forall \|x - x_e\| \geq \rho(\|u - u_e\|) > 0 \end{aligned}$$

per $\forall (t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times D_u$, $\alpha_i, \rho \in \mathcal{K}$, allora il sistema $\dot{x} = f(t, x, u)$ è localmente ISS. Se $D = \mathbb{R}^n$, $D_u \in \mathbb{R}^m$, $\alpha_1 \in \mathcal{K}_\infty$ allora il sistema $\dot{x} = f(t, x, u)$ è ISS.

Dim. In base ai passaggi svolti prima, se $\sup_{t \geq t_0} \|x(t) - x_e\| < \frac{\vartheta}{L} \frac{\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)))}{\alpha_4(r)}$, $\|x_0 - x_e\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ si ha

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_e\| &\leq \beta(\|x_0\|, t - t_0) + \rho \left(L \sup_{\tau \geq t_0} \|u(\tau) - u_e\| \right) \\ &= \beta(\|x_0\|, t - t_0) + \gamma \left(\sup_{\tau \geq t_0} \|u(\tau) - u_e\| \right) \\ &= \beta(\|x_0\|, t - t_0) + \gamma \left(\sup_{\tau \in [t_0, t]} \|u(\tau) - u_e\| \right), \quad \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

e dunque è localmente ISS.

Nel caso globale poiché $\alpha_1(\|x - x_e\|) \leq W_1(x)$, con $\alpha_1 \in \mathcal{K}_\infty$, sicché $W_1(x)$ è radialmente illimitata e vale il teorema dato per le perturbazioni che non si annullano per $x_e = 0$ per ogni x ed ogni μ . Da ciò segue la ISS. $\square$

Per i sistemi non stazionari questo teorema dà solo condizioni sufficienti, che sono però necessarie e sufficienti per i sistemi stazionari $\dot{x} = f(x, u)$.

Ritornando al sistema $\dot{x} = f(t, x, u)$, se $f \in C^1$ e $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial u}$ sono uniformemente limitati, se $\dot{x} = f(t, x, u_e)$ ha $x_e = 0$ uniformemente asintoticamente stabile allora $\dot{x} = f(t, x, u)$ è localmente ISS. Infatti sotto le ipotesi di $f \in C^1$ e $\frac{\partial f}{\partial x}$ limitato uniformemente e $x_e = 0$ uniformemente asintoticamente stabile

per $\dot{x} = f(t, x, u_e)$, esiste una funzione $V(t, x)$ tale che⁴⁵

$$\begin{aligned}\alpha_1(\|x - x_e\|) &\leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u_e) &\leq -\alpha_3(\|x - x_e\|) \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq \alpha_4(\|x - x_e\|)\end{aligned}$$

con $\alpha_i \in \mathcal{K}[0, r_0]$ e se il sistema è autonomo V non dipende da t . Poiché poi $\frac{\partial f}{\partial u}$ è limitato

$$\|f(t, x, u) - f(t, x, u_e)\| \leq L\|u - u_e\|, \quad L \geq 0$$

per ogni $t \geq t_0$ ed (x, u) in un intorno di (x_e, u_e) . Ripetendo nuovamente i soliti calcoli per $\dot{x} = f(t, x, u)$ si vede che

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) \leq -(1 - \vartheta)\alpha_3(\|x - x_e\|)$$

per $\|x - x_e\| \geq \rho(\|u - u_e\|)$ e dunque si ha la locale ISS.

Per un sistema autonomo $\dot{x} = f(x, u)$ basta supporre che $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial u}$ siano limitate e che x_e sia asintoticamente stabile per $\dot{x} = f(x, u_e)$ perché $\dot{x} = f(x, u)$ sia localmente ISS. Infatti la limitazione implica che $f \in C^1$ e si applica poi quanto visto prima.

Se poi $f(t, x, u) \in C^1$ ed è globalmente Lipschitz in (x, u) , uniformemente in t , e se $\dot{x} = f(t, x, u_e)$ ha $x_e = 0$ globalmente esponenzialmente stabile, allora $\dot{x} = f(t, x, u)$ è ISS. Infatti sotto tali ipotesi valgono globalmente le relazioni⁴⁶

$$\begin{aligned}\alpha_1(\|x - x_e\|) &\leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u_e) &\leq -\alpha_3(\|x - x_e\|) \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq \alpha_4(\|x - x_e\|).\end{aligned}$$

Inoltre poiché $f(t, x, u)$ è globalmente Lipschitz in (x, u) si può ancora scrivere

$$\|f(t, x, u) - f(t, x, u_e)\| \leq L\|u - u_e\|, \quad L \geq 0$$

Seguendo gli stessi ragionamenti e calcoli di prima si deduce la ISS.

Esempio. Sia

$$\dot{x} = -x^3 + u.$$

Se $u = 0$ allora $\dot{x} = f(t, x, u_e) = -x^3$ ha $x_e = 0$ globalmente asintoticamente stabile. Presa $V = \frac{1}{2}x^2$ si ha

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x(-x^3 + u) = -x^4 + xu = -(1 - \vartheta)x^4 + xu - \vartheta x^4 \\ &\leq -(1 - \vartheta)x^4 \quad \forall |x| \geq \sqrt[3]{\frac{\sup_{t \geq t_0} |u|}{\vartheta}}, \quad \vartheta \in (0, 1)\end{aligned}$$

per cui il sistema è ISS con $\gamma(a) = \sqrt[3]{\frac{a}{\vartheta}}$. □

⁴⁵ Ciò in virtù di un converse theorem.

⁴⁶ Questo in base ad un altro converse theorem.

Esempio. Sia

$$\dot{x} = f(x, u) = -x - 2x^3 + (1 + x^2)u^2.$$

Il sistema $\dot{x} = f(x, 0) = -x - 2x^3$ ha $x_e = 0$ globalmente esponenzialmente stabile poiché considerato il sistema lineare $\dot{\xi} = A(t)\xi$, che nel nostro caso è $\dot{x} = -x$, per esso $\xi_e = x_e = 0$ è globalmente esponenzialmente stabile⁴⁷. Si noti che $f(x, u)$ non è globalmente Lipschitz, per cui non si può dedurre (per ora) che $\dot{x} = f(x, u)$ è ISS. Si calcola però che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(V = \frac{1}{2}x^2 \right) = \dot{V} &= -x^2 - 2x^4 + x(1 + x^2)u^2 = -x^4 + (1 + x^2)(xu^2 - x^2) \\ &\leq -x^4 \quad \forall |x| \geq u^2 = \rho(\|u\|) > 0 \end{aligned}$$

e dunque $\alpha_1(\|x - x_e\|) \leq V \leq \alpha_2(\|x - x_e\|)$, $\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x - x_e\|)$ per $\|x\| \geq \rho(\|u\|) > 0$ con $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}r^2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\alpha_3 = r^4 \in \mathcal{K}$, per cui il sistema è ISS. $\square$

Esempio. Sia

$$\dot{x} = f(x, u) = -x + (1 + x^2)u.$$

Il sistema $\dot{x} = f(x, 0) = -x$ ha $x_e = 0$ globalmente esponenzialmente stabile⁴⁸; $f(x, u)$ non è globalmente Lipschitz in x e quindi non si può dedurre che $\dot{x} = f(x, u)$ è ISS. Ed in effetti non lo è, poiché per esempio con $u = 1$ il sistema $\dot{x} = -x + x^2 + 1$ con $x_0 = 0$ ha $x(t) \rightarrow \infty$; infatti se $x(t)$ è la soluzione e $v(t)$ è la soluzione di $\dot{v} = -v + 1 \leq -v + v^2 + 1$, per il lemma del confronto $v(t) \leq x(t)$. Ma $v(t) = e^{-t} + t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ e dunque anche $x(t) \rightarrow \infty$. Dunque non è ISS. È però localmente ISS, poiché $f(x, u) \in C^1$ e $\frac{\partial f}{\partial x} = -1 + 2xu$, e $\frac{\partial f}{\partial u} = 1 + x^2$ sono uniformemente limitate, ed infine $\dot{x} = f(x, 0) = -x$ ha $x_e = 0$ asintoticamente stabile (è globalmente esponenzialmente stabile).

Poiché

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2}x^2 = \dot{V} &= -x^2 + x(1 + x^2)u = -(1 - \vartheta)x^2 - \vartheta x^2 + x(1 + x^2)u \\ &\leq -(1 - \vartheta)x^2 - \vartheta x^2 + |x|(1 + r^2)|u| \\ &\leq -(1 - \vartheta)x^2 \quad \forall |x| \in \left[\frac{1 + r^2}{\vartheta} |u|, r \right] \end{aligned}$$

con $\vartheta \in (0, 1)$ allora il sistema è localmente ISS con $\gamma(a) = \frac{1 + r^2}{\vartheta}a$. Infatti, secondo la definizione, per $\|x_0\| < k_1 = r$ ed $u(t)$ tale che $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\| < k_2 = \frac{r\vartheta}{1 + r^2}$, $x(t)$ esiste con

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t - t_0) + \frac{1 + r^2}{\vartheta} \left(\sup_{\tau \in [t_0, t]} \|u(\tau)\| \right). \quad \square$$

Nel caso di sistemi interconnessi

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2) & x_1 &\in \mathbb{R}^{n_1}, \quad x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_2) \end{aligned}$$

con f_1 continua a tratti in t e localmente Lipschitz in $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, se $\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, 0)$ ha $x_1 = 0$ uniformemente asintoticamente stabile e $\dot{x}_2 = f_2(t, x_2)$ ha $x_2 = 0$ uniformemente asintoticamente stabile, è intuitivamente chiaro che se x_2 , visto come ingresso nella prima equazione, ha un comportamento adatto, allora il sistema interconnesso ha $x = 0$ uniformemente asintoticamente stabile. Infatti

⁴⁷ Si ricorda che questa è una condizione necessaria e sufficiente perché $x_e = 0$ sia globalmente esponenzialmente stabile.

⁴⁸ È un sistema lineare, per il quale l'esponenzialmente e la asintotica stabilità coincidono.

Lemma 6. Se $\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2)$, con x_2 considerato come ingresso, è localmente ISS e $x_2 = 0$ è uniformemente asintoticamente stabile per $\dot{x}_2 = f_2(t, x_2)$ allora $x_e = 0$ è uniformemente asintoticamente stabile per il sistema interconnesso (se il primo è ISS e il secondo è globalmente uniformemente asintoticamente stabile allora $x_e = 0$ è globalmente uniformemente asintoticamente stabile).

Nel caso di sistemi lineari stazionari $\dot{x} = Ax + Bu$, se $x_e = 0$ è asintoticamente stabile e se $u(t)$ è limitato, ossia $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\| < k_2$, poiché

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

si ha

$$\|x(t)\| < \|e^{A(t-t_0)}\| \|x_0\| + \left\| \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B d\tau \right\| k_2$$

ed essendo per ipotesi $\sigma(a) \subset C^-$ la norma dell'integrale è limitata, così come $\|e^{A(t-t_0)}\|$. Quindi

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq M e^{-c(t-t_0)} \|x_0\| + k_2 d \\ &= \beta(\|x_0\|, t - t_0) + \gamma \left(\sup_{\tau \in [t_0, t]} \|u(\tau)\| \right) \end{aligned}$$

per cui per un sistema lineare stazionario la stabilità asintotica di $x_e = 0$ implica la ISS del sistema (e viceversa; come già mostrato la ISS implica la globale asintotica stabilità).

Il teorema relativo alla ISS è dovuto a Sontag. Esso è nella cosiddetta “versione infinitesimale”. Esso si poteva enunciare anche dicendo che $\dot{x} = f(t, x, u)$ è localmente ISS se esiste una funzione $V \in C^1$ tale che

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x - x_e\|) &\leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|) \\ \dot{V}(t, x) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) \leq -\tilde{\alpha}_3(\|x - x_e\|) + \sigma(\|u - u_e\|) \end{aligned}$$

per ogni $(t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times D_u$, $\alpha_i, \tilde{\alpha}_3, \sigma \in \mathcal{K}$.

Questa formulazione è equivalente a quella data con

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) &\leq -\tilde{\alpha}_3(\|x - x_e\|) + \vartheta \tilde{\alpha}_3(\|x - x_e\|) - \vartheta \tilde{\alpha}_3(\|x - x_e\|) + \sigma(\|u - u_e\|) \\ &= -(1 - \vartheta) \tilde{\alpha}_3(\|x - x_e\|) + \sigma(\|u - u_e\|) - \vartheta \tilde{\alpha}_3(\|x\|) \quad \vartheta \in (0, 1) \\ &\leq \alpha_3(\|x - x_e\|) \quad \text{per } \|x\| \geq \tilde{\alpha}_3^{-1} \left(\frac{1}{\vartheta} \sigma(\|u - u_e\|) \right) \end{aligned}$$

ove

$$\alpha_3(\|x - x_e\|) = (1 - \vartheta) \tilde{\alpha}_3(\|x - x_e\|), \quad \gamma = \tilde{\alpha}_3^{-1} \circ \frac{\sigma}{\vartheta}.$$

Il sistema è poi ISS se $\alpha_1 \in \infty$, $D = \mathbb{R}^n$, $D_u = \mathbb{R}^m$.

Di tale teorema esiste anche una “versione integrale”, in cui si richiede che V sia solo continua. Il sistema $\dot{x} = f(t, x, u)$ è localmente ISS se esiste una funzione $V(t, x) \in C^0$ tale che

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x - x_e\|) &\leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|) \\ V(t_2, x(t_2)) - V(t_1, x(t_1)) &\leq - \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\alpha}_3(\|x(\tau) - x_e\|) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \sigma(\|u(\tau) - u_e\|) d\tau. \end{aligned}$$

é poi ISS se $\alpha_1 \in \mathcal{K}_\infty$, $D = \mathbb{R}^n$, $D_u = \mathbb{R}^m$.

Se il sistema è stazionario queste condizioni, come pure quelle del precedente teorema dato, sono necessarie e sufficienti.

2.12 I sistemi interconnessi

da correggere

Se un sistema può essere modellato come l'interconnessione di sottosistemi, si può pensare di analizzare la stabilità, ignorando le interconnessioni, e poi combinare le conclusioni per studiare la stabilità del sistema interconnesso. Questa idea viene qui usata per trovare funzioni di Lyapunov per sistemi interconnessi.

Si considerino gli m sistemi interconnessi

$$\dot{x}_i = f_i(t, x) + g_i(t, x), \quad i = 1, \dots, m, \quad x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

con $n = \sum_{i=1}^m n_i$, f_i, g_i di classe sufficientemente elevata per assicurare l'esistenza locale e l'unicità della soluzione per $x_0 \in D$, D dominio di interesse, e

$$f_i(t, 0) = 0, \quad g_i(t, 0) = 0,$$

ossia $x_e = 0$ è di equilibrio.

Il generico sottosistema i ha un punto d'equilibrio in $x_{ei} = 0$. Supponiamo che sia $V_i(t, x_i)$ una funzione di Lyapunov la cui derivata sia definita negativa lungo le traiettorie dei sistemi non interconnessi $\dot{x}_i = f_i(t, x_i)$, $i = 1, \dots, m$

$$\alpha_{i1}(\|x - x_e\|) \leq V_i(t, x) \leq \alpha_{i2}(\|x - x_e\|)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial x} f_i(t, x) \leq -\alpha_{i3}(\|x - x_e\|)$$

con $\alpha_{ij} \in \mathcal{K}$. Si consideri dunque la seguente funzione di Lyapunov

$$V(t, x) = \sum_{i=1}^m a_i V_i(t, x), \quad a_i > 0.$$

Essa è una funzione di Lyapunov per il sistema “non perturbato”

$$\dot{x} = f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ \vdots \\ f_m(t, x) \end{pmatrix}$$

in quanto

$$\sum_{i=1}^m a_i \alpha_{i1}(\|x - x_e\|) = \alpha_1(\|x - x_e\|) \leq V(t, x) = \sum_{i=1}^m a_i V_i(t, x) \leq \alpha_2(\|x - x_e\|) = \sum_{i=1}^m a_i \alpha_{i2}(\|x - x_e\|)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) = \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial x} f_i(t, x) \right) \leq - \sum_{i=1}^m a_i \alpha_{i3}(\|x - x_e\|) = -\alpha_3(\|x - x_e\|).$$

con $\alpha_j = \sum_{i=1}^m a_i \alpha_{ij} \in \mathcal{K}$, $j = 1, 2, 3$.

Utilizziamo ora la stessa funzione $V(t, x)$ per studiare la stabilità di $x_e = 0$ per il sistema “perturbato”

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ \vdots \\ f_m(t, x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t, x) \\ \vdots \\ g_m(t, x) \end{pmatrix} = f(t, x) + g(t, x)$$

in cui $g(t, x)$ può essere vista come la “perturbazione” dovuta alle interconnessioni. Lungo le traiettorie del sistema “perturbato” si ha

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) = \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(t, x) \right) + \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} g_i(t, x)$$

in cui

$$\frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} g_i(t, x)$$

è la combinazione lineare di termini in generale indefiniti. Questa è la situazione analoga a quella vista per i sistemi perturbati. Considerando un’analisi del caso peggiore e prendendo in esame funzioni di Lyapunov di tipo quadratico, ossia tali che per ogni $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ e per $i = 1, \dots, m$ risulti

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(t, x_i) &\leq -\alpha_i \Phi_i^2(x_i) \\ \left\| \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right\| &\leq \beta_i \Phi_i(x_i) \end{aligned}$$

$\alpha_i, \beta_i > 0$, $\Phi_i: \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni definite positive e continue, e supponendo che

$$\|g_i(t, x)\| \leq \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \Phi_j(x_j), \quad \gamma_{ij} \geq 0, \quad \forall (t, x) \in [0, \infty) \times D$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) &\leq -\sum_{i=1}^m a_i \alpha_i \Phi_i^2(x_i) + \sum_{i=1}^m a_i \left\| \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right\| \|g_i(t, x)\| \\ &\leq -\sum_{i=1}^m a_i \alpha_i \Phi_i^2(x_i) + \sum_{i=1}^m a_i \beta_i \Phi_i(x_i) \gamma_{ij} \Phi_j(x_j) \\ &= -\sum_{i=1}^m \left[a_i \alpha_i \Phi_i^2(x_i) - a_i \beta_i \gamma_{ij} \Phi_i(x_i) \Phi_j(x_j) \right] \\ &= -\begin{pmatrix} \Phi_1(x_1) & \cdots & \Phi_m(x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 \gamma_{11} & \cdots & -\beta_1 \gamma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_m \gamma_{m1} & \cdots & \alpha_m - \beta_m \gamma_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1) \\ \vdots \\ \Phi_m(x_m) \end{pmatrix} \\ &= -\Phi^T \Lambda S \Phi \\ &= -\Phi^T \frac{\Lambda S + S^T \Lambda}{2} \Phi \end{aligned}$$

con

$$\Lambda = \text{diag} \{a_1, \dots, a_m\}, \quad S = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 \gamma_{11} & \cdots & -\beta_1 \gamma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_m \gamma_{m1} & \cdots & \alpha_m - \beta_m \gamma_{mm} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1) \\ \vdots \\ \Phi_m(x_m) \end{pmatrix}.$$

Se Λ è tale che $\Lambda S + S^T \Lambda > 0$ allora $\dot{V}(t, x)$ è definita positiva, poiché $\Phi(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, in quanto le funzioni $\Phi_i(x_i)$ sono definite positive. Questa è ovviamente una *condizione sufficiente*.

Notando che si poteva anche scrivere

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \leq -\Phi^T \begin{pmatrix} \sqrt{a_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{a_m} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} \sqrt{a_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{a_m} \end{pmatrix} \Phi = \tilde{\Phi}^T S \tilde{\Phi}$$

con $\sqrt{\Lambda}$ la radice quadrata di $\Lambda > 0$,

$$\tilde{\Phi} = \sqrt{\Lambda} \Phi$$

e con le funzioni $\tilde{\Phi}_i(x_i) = \sqrt{a_i} \Phi_i(x_i)$ definite positive, la *condizione necessaria e sufficiente* è che i minori principali consecutivi di S siano positivi (condizione di Sylvester). Se tale condizione è soddisfatta x_e è globalmente uniformemente asintoticamente stabile.

Poiché i termini α_i danno un “contributo positivo” alla definitezza positiva, mentre quelli $-\beta_i \gamma_{ij}$ ne danno uno “negativo”, si comprende che la stabilità del sistema interconnesso dipende da “quanto stabili” siano i sottosistemi in rapporto al “grado di interconnessione”, dato da γ_{ij} .

Esempio. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - \frac{3}{2} x_1^2 x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + \frac{1}{2} x_1^2 x_2^2 \end{aligned}$$

in cui

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2^3 \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} x_1^2 x_2^3 \\ \frac{1}{2} x_1^2 x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Entrambi i sottosistemi “non perturbati” hanno l’origine asintoticamente stabile, in quanto

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2^3.$$

Inoltre se si considerano le funzioni

$$V_1 = \frac{1}{2} x_1^2, \quad V_2 = \frac{1}{4} x_2^4$$

si trova

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} f_1(x_1) = -x_1^2 = -\alpha_1 \Phi_1^2(x_1), \quad \frac{\partial V_2}{\partial x_2} f_2(x_2) = -x_2^6 = -\alpha_2 \Phi_2^2(x_2)$$

con

$$\alpha_1 = 1, \quad \Phi_1(x_1) = |x_1|, \quad \alpha_2 = 1, \quad \Phi_2(x_2) = |x_2|.$$

Si noti inoltre che

$$\left\| \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right\| = |x_1| = \beta_1 \Phi_1(x), \quad \left\| \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right\| = |x_2|^3 = \beta_2 \Phi_2(x_2)$$

con

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 1.$$

Si noti che prendendo $V_2 = \frac{1}{2} x_2^2$ si sarebbe avuto $\dot{V}_2 = -x_2^4$, sicché $\Phi_2 = |x_2|$, ma $\left\| \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right\| = |x_2| \neq \beta_2 \Phi_2(x_2)$.

Inoltre i termini di interconnessione sono tali che

$$\begin{aligned} \|g_1(x_1)\| &= \left\| -\frac{3}{2} x_1^2 x_2^3 \right\| = \frac{3}{2} x_1^2 |x_2|^3 \leq \frac{3}{2} c_1^2 \Phi_2(x_2) \quad \text{per } |x_1| \leq c_1 \\ \|g_2(x_2)\| &= \left\| \frac{1}{2} x_1^2 x_2^2 \right\| = \frac{1}{2} x_1^2 |x_2|^2 \leq \frac{1}{2} c_1 c_2^2 \Phi_1(x_1) \quad \text{per } |x_1| \leq c_1 \text{ e } |x_2| \leq c_2. \end{aligned}$$

Dunque in $D = \{x \mid |x_1| \leq c_1, |x_2| \leq c_2\}$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) &= -\Phi_1^2(x_1) - \Phi_2^2(x_2) + \frac{3}{2}c_1^2\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2) + \frac{1}{2}c_1c_2^2\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2) \\ &= -(\Phi_1(x_1) \quad \Phi_2(x_2)) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2}c_1^2 \\ -\frac{1}{2}c_1c_2^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1) \\ \Phi_2(x_2) \end{pmatrix} = -\Phi^T(x) S \Phi(x) \end{aligned}$$

e si deve avere (????)

$$1 - \frac{3}{4}c_1^3c_2^2 > 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{3}{4}c_1^3c_2^2 < 1.$$

Ciò è verificato ad esempio con $c_1 = c_2 = 1$. Assumiamo tali valori e stimiamo la regione di attrazione di $x_e = 0$. A tale scopo occorre conoscere la matrice di Lyapunov composta

$$V(x) = a_1V_1(x_1) + a_2V_2(x_2)$$

ossia la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

per cui $AS + S^T A > 0$. Prendendo $c_1 = c_2 = 1$ si ha

$$AS + S^T A = \begin{pmatrix} 2a_1 & -\left(\frac{3}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2\right) \\ -\left(\frac{3}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2\right) & 2a_2 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva per $a_i > 0$ (già verificato) e

$$4a_1a_2 - \frac{1}{4}(3a_1 + a_2)^2 > 0 \quad \text{ovvero} \quad -\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + 10\frac{a_2}{a_1} - 9 > 0$$

e quindi $1 < \frac{a_2}{a_1} < 9$.

Poiché si può sempre considerare la funzione $\frac{V}{a_1}$, non si perde di generalità considerare $a_1 = 1$ (per cui $1 < a_2 < 9$)

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}a_2x_2^4.$$

Una stima della regione di attrazione è l'insieme

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) \leq c\}$$

con c sufficientemente piccolo perché

$$\Omega_c \subset D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}.$$

Poiché la funzione $\varphi(x_1, x_2) = V(x) - c$ assume valori massimi per

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}a_2x_2^4 - c \right) = x_1 = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = a_2x_2^3 = 0$$

ed in corrispondenza

$$\varphi|_{x_1=0} = \frac{1}{4}a_2x_2^4 - c, \quad \varphi|_{x_2=0} = \frac{1}{2}x_1^2 - c$$

e quindi

$$x_2 = \mp \sqrt[4]{\frac{4c}{a_2}}, \quad x_1 = \mp \sqrt{2c},$$

si trova che $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \leq 1$ quando $\sqrt{2c} \leq 1$, ossia quando $c \leq \frac{1}{2}$, e $\sqrt[4]{\frac{4c}{a_2}} \leq 1$, ossia $c \leq \frac{a_2}{4}$.

In definitiva si deve prendere

$$c \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{a_2}{4} \right\}.$$

La massima stima Ω_c è allora per $a_2 = 2$ e $c = \frac{1}{2}$

$$\Omega_{\frac{1}{2}} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^4 \leq 1\}$$

in quanto si prende per c il valore massimo e la regione di convergenza è la più grande possibile, in quanto $x_2 = \mp \sqrt[4]{\frac{4c}{a_2}}$ assume valore massimo in modulo per a_2 più piccolo possibile. $\square$