Capitolo 4

La regolazione

4.1 La risposta a regime permanente di un sistema non lineare

La nozione intuitiva di risposta a regime permanente è quella particolare risposta a cui tende qualsiasi altra risposta del sistema al crescere del tempo. Per formalizzare questa nozione si consideri il sistema

$$\dot{x} = f(x,u)$$

con $f(0,0) = 0$, x lo stato definito in un intorno U dell'origine di $\mathbb{R}^n$ ed $u \in \mathbb{R}^m$ l'ingresso. Sia $x(t, x_0, u(\cdot))$ il valore dello stato at tempo $t > 0$ sotto l'effetto della *funzione* d'ingresso $u(\cdot)$, a partire dallo stato x_0. Sia poi $u^*(\cdot)$ una specifica funzione e si supponga che esista uno stato iniziale x^* tale che per ogni x_0 in un intorno U^* di x^* valga

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0, u^*(\cdot)) - x(t, x^*, u^*(\cdot))\| = 0.$$

In tal caso si chiama risposta a regime permanente del sistema all'ingresso specifico $u^*(\cdot)$ la risposta

$$x_{ss}(t) = x(t, x^*, u^*(\cdot)).$$

La nozione di risposta a regime permanente è specialmente interessante per sistemi con ingressi "persistenti", come nel caso di funzioni periodiche e limitate. In tali casi la risposta a regime permanente è essa stessa una funzione persistente del tempo le cui caratteristiche dipendono interamente dallo specifico ingresso e non dallo stato iniziale. Ingressi di questo genere possono pensarsi generati da un sistema dinamico del tipo

$$\begin{aligned} \dot{w} &= s(w) \\ u &= p(w) \end{aligned}$$

con lo stato w definito in un intorno W dell'origine in R^r, con $s(0) = 0$ e $p(0) = 0$. Per imporre che gli ingressi generati da tale sistema siano limitati è sufficiente che l'origine $w = 0$ sia stabile nel senso di Lyapunov e che le condizioni iniziali w_0 siano prese in un opportuno intorno $W_0 \subset W$ dell'origine. Per imporre poi che tali ingressi siano persistenti nel tempo, ossia non decadano a zero al crescere del tempo, è conveniente assumere che ogni punto $w \in W_0$ sia Poisson stabile.

Definizione 1. Un punto w_0 è Poisson stabile se il flusso[1] $\Phi^s_t(w_0)$ del campo vettore $s(w)$ è definito per ogni $t \in \mathbb{R}$ e, per ogni intorno I_0 di w_0 ed ogni reale $T > 0$, esistono un tempo $t_1 > T$ ed uno $t_2 < -T$ tali che

$$\Phi^s_{t_1}(w_0) \in I_0, \qquad \Phi^s_{t_2}(w_0) \in I_0. \qquad \square$$

[1] Ossia la soluzione dell'equazione $\dot{w} = s(w)$ a partire dal punto $w(0) = w_0$.

Si noti che in particolare I_0 può essere un intorno piccolo a piacere di w_0 e T può essere un istante di tempo arbitrariamente grande. Dunque un punto w_0 è Poisson stabile se la traiettoria $w(t)$ che si origina da w_0 passa arbitrariamente vicino a w_0 per tempi arbitrariamente grandi, in avanti o all'indietro nel tempo. Dunque se ogni punto $w_0 \in W_0$ è Poisson stabile nessuna traiettoria può decadere a zero per t tendente all'infinito.

Definizione 2. Il sistema
$$\begin{aligned} \dot{w} &= s(w) \\ u &= p(w) \end{aligned}$$
gode della proprietà di stabilità neutra se l'origine $w = 0$ è stabile nel senso di Lyapunov e se ogni punto di W in cui è definita la mappa s è Poisson stabile. □

Si noti che l'ipotesi di stabilità neutra implica che la matrice
$$S = \frac{\partial s}{\partial w}\Big|_{w=0}$$
caratterizzante l'approssimazione lineare del campo vettore $s(w)$ in $w = 0$ ha tutti gli autovalori sull'asse immaginario. Infatti S non può avere autovalori a parte reale maggiore di zero, in quanto altrimenti $w = 0$ sarebbe instabile, né averne a parte reale minore di zero, in quanto vi sarebbero alcune traiettorie convergenti a zero (infatti il sistema avrebbe una varietà invariante stabile nell'intorno dell'origine) e ciò sarebbe in contrasto con l'ipotesi di Poisson stabilità di ogni punto nell'intorno dell'origine. I sistemi le cui traiettorie sono periodiche sono ovviamente stabili neutralmente.

Proposizione 1. *Si assuma che il sistema*
$$\begin{aligned} \dot{w} &= s(w) \\ u &= p(w) \end{aligned}$$
sia stabile neutralmente e che l'origine $x = 0$ di $\dot{x} = f(x, 0)$ sia asintoticamente stabile in prima approssimazione. Allora esiste una mappa $x = \pi(w)$ definita in un intorno $W_0 \in W$ dell'origine, con $\pi(0) = 0$, che soddisfa
$$\frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) = f(\pi(w), p(w)), \qquad \forall w \in W_0.$$
Inoltre l'ingresso $u^*(t) = p(\Phi_t^s(w^*))$ produce una risposta a regime permanente ben definita
$$x_{ss}(t) = x(t, \pi(w^*), u^*(\cdot)).$$
□

Dim. Gli autovalori della matrice jacobiana nel punto di equilibrio $(x, w) = (0, 0)$ del sistema
$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, p(w)) = Ax + \phi(x, w) \\ \dot{w} &= s(w) = Sw + \psi(w) \end{aligned}$$
sono quelli di A, che sono a parte reale minore di zero, e di S, che sono a parte reale nulla. Per la teoria della varietà centrale, tale sistema ha localmente una varietà centrale $x = \pi(w)$ in $(x, w) = (0, 0)$, soluzione di
$$\frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) = f(\pi(w), p(w)).$$
Inoltre il sistema ridotto che descrive la dinamica sulla varietà centrale è proprio
$$\dot{w} = s(w)$$

per cui $(x, w) = (0, 0)$ è un punto di equilibrio (semplicemente) stabile. Per la proprietà di locale attrattività della varietà centrale, per ogni (x_0, w^*) in un intorno di $(0, 0)$ risulta

$$\|x(t) - \pi(w(t))\| \leq Ke^{-\alpha t} \|x_0 - \pi(w^*)\|, \qquad \forall t \geq 0$$

per appropriate costanti $K, \alpha > 0$. Si osservi che per definizione

$$x(t) = x(t, x_0, u^*(\cdot))$$

e poiché la varietà centrale $x = \pi(w)$ è invariante

$$x(t, \pi(w^*), u^*(\cdot)) = \pi(w(t)).$$

Come conseguenza

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t, x_0, u^*(\cdot)) - x(t, \pi(w^*), u^*(\cdot))\| = 0$$

ossia

$$x_{ss}(t) = x(t, \pi(w^*), u^*(\cdot))$$

è una risposta a regime permanente ben definita. $\square$

Si noti che, in base alla teoria della varietà centrale, se $f(x, p(w))$ e $s(w)$ sono di classe C^∞, il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, p(w)) \\ \dot{w} &= s(w) \end{aligned}$$

ha una varietà centrale $x = \pi(w)$ di classe C^k, $k < \infty$.

Esempio. Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1 u \end{aligned}$$

con u generato da

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= aw_2 \\ \dot{w}_2 &= -aw_1 \\ u &= w_1. \end{aligned}$$

Essendo gli ingressi generati di tipo sinusoidale, ovviamente quest'ultimo sistema è stabile neutralmente. Inoltre il sistema $\dot{x} = f(x, 0)$ ha l'origine asintoticamente stabile in prima approssimazione. Dunque esiste una mappa $x = \pi(w)$ soluzione di

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \pi_1(w)}{\partial w_1} & \dfrac{\partial \pi_1(w)}{\partial w_2} \\ \dfrac{\partial \pi_2(w)}{\partial w_1} & \dfrac{\partial \pi_2(w)}{\partial w_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aw_2 \\ -aw_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi_1(w) + w_1 \\ -\pi_2(w) + \pi_1(w) w_1 \end{pmatrix}.$$

Si noti che il primo membro è pari a $\begin{pmatrix} \dot{\pi}_1(w) & \dot{\pi}_2(w) \end{pmatrix}^T$. Considerata la prima equazione, che è nella sola incognita $\pi_1(w)$, e considerata come soluzione una funzione lineare di w

$$\pi_1(w) = b_1 w_1 + b_2 w_2$$

si ottiene la seguente equazione

$$b_1 a w_2 - b_2 a w_1 = -(b_1 w_1 + b_2 w_2) + w_1,$$

ovvero

$$(-b_2a + b_1 - 1)w_1 + (b_1a + b_2)w_2 = 0.$$

Ponendo a zero i coefficienti si ha dunque

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} \\ \dfrac{-a}{1+a^2} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\pi_1(w) = \frac{1}{1+a^2}(w_1 - aw_2).$$

Sostituendola nella seconda equazione si ha un'equazione nella sola $\pi_2(w)$

$$\frac{\partial \pi_2(w)}{\partial w_1}aw_2 - \frac{\partial \pi_2(w)}{\partial w_2}aw_1 = -\pi_2(w) + \frac{1}{1+a^2}(w_1 - aw_2)w_1.$$

Per la sua soluzione si può considerare una funzione polinomiale di secondo grado in w

$$\pi_2(w) = c_1w_1^2 + c_2w_1w_2 + c_3w_2^2$$

ottenendo

$$(2c_1w_1 + c_2w_2)aw_2 - (c_2w_1 + 2c_3w_2)aw_1 = -(c_1w_1^2 + c_2w_1w_2 + c_3w_2^2) + \frac{1}{1+a^2}(w_1 - aw_2)w_1$$

ovvero

$$\left(c_1 - ac_2 - \frac{1}{1+a^2}\right)w_1^2 + \left(2ac_1 + c_2 - 2ac_3 + \frac{1}{1+a^2}a\right)w_1w_2 + (ac_2 + c_3)w_2^2$$

e quindi

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 2a & 1 & -2a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} \\ -\dfrac{a}{1+a^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+a^2)(1+4a^2)}\begin{pmatrix} 1+2a^2 & a & 2a^2 \\ -2a & 1 & 2a \\ 2a^2 & 2a & 1+2a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1+a^2)(1+4a^2)}\begin{pmatrix} 1+a^2 \\ -3a \\ 3a^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Quindi si determina

$$\pi_2(w) = \frac{1}{(1+a^2)(1+4a^2)}\Big((1+a^2)w_1^2 - 3aw_1w_2 + 3a^2w_2^2\Big).$$

Si noti la soluzione trovata è definita per ogni $w \in \mathbb{R}^2$. Per ogni $(w_1^*, w_2^*) \in \mathbb{R}^2$ l'ingresso

$$u(t) = w_1^* \operatorname{sen} at + w_2^* \cos at$$

produce una ben definita risposta a regime permanente data da

$$x_{ss}(t) = \begin{pmatrix} \pi_1(w(t)) \\ \pi_2(w(t)) \end{pmatrix}.$$

Si noti inoltre che la convergenza di qualsiasi altra risposta a $x_{ss}(t)$ avviene per qualsiasi condizione iniziale x_0. Infatti

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - \pi_1(w) \\ e_2 &= x_2 - \pi_2(w) \end{aligned}$$

soddisfano le equazioni

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -x_1 + u - \dot{\pi}_1(w) = -e_1 - \pi_1(w) + w_1 - \dot{\pi}_1(w) = -e_1 \\ \dot{e}_2 &= -x_2 + x_1 u - \dot{\pi}_2(w) = -e_2 - \pi_2(w) + (e_1 + \pi_1(w))w_1 - \dot{\pi}_2(w) = -e_2 + e_1 u \end{aligned}$$

essendo $u = w_1$ e $\dot{\pi}_1(w) = -\pi_1(w) + w_1$, $\dot{\pi}_2 = -\pi_2(w) + \pi_1(w)w_1$. Pertanto entrambi gli errori tendono a zero per t tendente all'infinito, per ogni $e_1(0)$, $e_2(0)$. □

4.2 Il problema della regolazione dell'uscita

Il problema della regolazione dell'uscita è un problema classico che consiste nel progettare una legge di controllo che imponga una desiderata risposta a regime permanente per ogni ingresso esterno appartenente ad una certa classe. Ciò include il caso di inseguimento di una traiettoria $y_r(\cdot)$, appartenente ad una certa classe, da parte dell'uscita $y(\cdot)$ ed il caso di reiezione dei disturbi $d(\cdot)$, appartenenti ad una certa classe. In entrambi i casi si vuole che l'errore di inseguimento

$$e(t) = y(t) - y_r(t)$$

vada a zero asintoticamente.

Sia il riferimento che il disturbo possono essere visti come componenti di un ingresso esogeno "aumentato" $w(\cdot)$. Pertanto si considereranno sistemi modellati da equazioni della forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, u) \\ e &= h(x, w) \end{aligned}$$

in cui la prima equazione descrive la dinamica dell'impianto, avente lo stato x definito in un intorno U dell'origine di $\mathbb{R}^n$ e l'ingresso $u \in \mathbb{R}^m$, e soggetto ad un ingresso esogeno $w \in \mathbb{R}^r$ che include i disturbi da rigettare e/o i riferimenti da inseguire. La seconda equazione descrive l'errore $e \in \mathbb{R}^m$, funzione dello stato e dell'ingresso esogeno. L'ingresso esogeno $w(\cdot)$ può pensarsi appartenenente alla famiglia delle funzioni del tempo soluzioni dell'equazione differenziale omogenea

$$\dot{w} = s(w)$$

con condizioni iniziali $w(0)$ appartenenti ad un intorno W dell'origine di $\mathbb{R}^r$. Oltre alla semplificazione, questo permette di comprendere un gran numero di casi pratici. Tale sistema viene detto esosistema. Le funzioni $f(x, w, u)$, $h(x, w)$, $s(w)$ vengono supposte di classe C^∞. Inoltre si assume che $f(0, 0, 0) = 0$, $s(0) = 0$ ed $h(0, 0) = 0$, sicché il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, u) \\ \dot{w} &= s(w) \\ e &= h(x, w) \end{aligned}$$

ha lo stato d'equilibrio $(x, w) = (0, 0)$, a cui corrisponde errore nullo.

L'azione di controllo dipende ovviamente dalle variabili diponibili per la controreazione. La situazione più favorevole è quella della "piena informazione", in cui sono noti lo stato x e l'ingresso esogeno w. In tal caso il controllore può essere del tipo istantaneo (senza memoria)

$$u = \alpha(x, w)$$

sicché il sistema a ciclo chiuso è

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, \alpha(x, w)) \\ \dot{w} &= s(w). \end{aligned}$$

Si assume che $\alpha(0, 0) = 0$ sicché il sistema a ciclo chiuso continua ad avere $(x, w) = (0, 0)$ punto d'equilibrio.

Una situazione più generale è quella della "controreazione dall'errore", in cui è noto il solo errore e. In questo caso si considera un controllore di tipo dinamico

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta(\xi, e) \\ u &= \theta(\xi) \end{aligned}$$

con ξ definito in un intorno Ξ dell'origine di $\mathbb{R}^\nu$, sicché il sistema a ciclo chiuso è

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, \theta(\xi)) \\ \dot{\xi} &= \eta(\xi, h(x, w)) \\ \dot{w} &= s(w). \end{aligned}$$

Si assume che $\eta(0, 0) = 0$ e $\theta(0) = 0$ sicché il sistema a ciclo chiuso ha $(x, \xi, w) = (0, 0, 0)$ come punto d'equilibrio.

Si noti che nel problema della regolazione dell'uscita importante è per ogni ingresso esogeno $w(\cdot)$ il sistema a ciclo chiuso possieda una ben definita risposta a regime permanente $x_{ss}(t)$ tale che

$$h(x_{ss}(t), w(t)) = 0, \qquad \forall t \geq 0.$$

In base a quanto visto nel paragrafo precedente, condizioni sufficienti perché si abbia ciò è che l'esosistema sia stabile neutralmente e che l'origine del sistema *controreazionato* e con $w = 0$ sia asintoticamente stabile in prima approssimazione. Si possono quindi formulare i seguenti due problemi.

1. *Problema della regolazione dell'uscita con piena informazione*. Dato un sistema $\dot{x} = f(x, w, u)$ ed un esosistema neutralmente stabile $\dot{w} = s(w)$, trovare una mappa $u = \alpha(x, w)$ tale che

   (S) il punto d'equilibrio $x = 0$ del sistema controreazionato e con ingresso esogeno nullo

   $$\dot{x} = f(x, 0, \alpha(x, 0))$$

   sia asintoticamente stabile in prima approssimazione;

   (R) le soluzioni del sistema a ciclo chiuso

   $$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, \alpha(x, w)) \\ \dot{w} &= s(w) \end{aligned}$$

   soddisfino

   $$\lim_{t \to \infty} h(x(t), w(t)) = 0$$

   per ogni condizione iniziale $(x(0), w(0)) \in V \subset U \times W$, V intorno di $(0, 0)$.

2. *Problema della regolazione dell'uscita con controreazione dall'errore.* Dato un sistema $\dot{x} = f(x, w, u)$ ed un esosistema neutralmente stabile $\dot{w} = s(w)$, trovare un intero ν e due mappe $\theta(\xi)$, $\eta(\xi, e)$ tali che

   (S) il punto d'equilibrio $(x, \xi) = (0, 0)$ del sistema controreazionato e con ingresso esogeno nullo
   $$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, 0, \theta(\xi)) \\ \dot{\xi} &= \eta(\xi, h(x, 0)) \end{aligned}$$
   sia asintoticamente stabile in prima approssimazione;

   (R) le soluzioni del sistema a ciclo chiuso
   $$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, \theta(\xi)) \\ \dot{\xi} &= \eta(\xi, h(x, w)) \\ \dot{w} &= s(w) \end{aligned}$$
   soddisfino
   $$\lim_{t\to\infty} h(x(t), w(t)) = 0$$
   per ogni condizione iniziale $(x(0), \xi(0), w(0)) \in V \subset U \times \Xi \times W$, V intorno di $(0, 0, 0)$.

La richiesta di stabilità in prima approssimazione del sistema controreazionato, contenuta in (S), è piuttosto forte in quanto richiede la stabilizzabilità in prima approssimazione dell'impianto in $x = 0$. Per contro la condizione (S), assieme alla stabilità neutra, assicura l'esistenza di una ben definita risposta a regime permanente. Riscrivendo le equazioni del sistema a ciclo chiuso, nei due casi, mettendo in evidenza i termini lineari
$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + (P + BL)w + \phi(x, w) \\ \dot{w} &= Sw + \psi(w) \end{aligned}$$
in cui $\phi(x, w)$ e $\psi(w)$ si annullano nell'origine assieme alle loro derivate prime e
$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0,0)} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(0,0,0)} \quad P = \frac{\partial f}{\partial w}\Big|_{(0,0,0)} \quad K = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\Big|_{(0,0)} \quad L = \frac{\partial \alpha}{\partial w}\Big|_{(0,0)} \quad S = \frac{\partial s}{\partial w}\Big|_{(0)}$$
ovvero
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BH\xi + Pw + \phi(x, \xi, w) \\ \dot{\xi} &= GCx + F\xi + GQw + \chi(x, \xi, w) \\ \dot{w} &= Sw + \psi(w). \end{aligned}$$
in cui $\phi(x, \xi, w)$, $\chi(x, \xi, w)$ e $\psi(w)$ si annullano nell'origine assieme alle loro derivate prime e
$$H = \frac{\partial \theta}{\partial \xi}\Big|_{(0)} \quad F = \frac{\partial \eta}{\partial \xi}\Big|_{(0,0)} \quad G = \frac{\partial \eta}{\partial e}\Big|_{(0,0)} \quad C = \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{(0,0)} \quad Q = \frac{\partial h}{\partial w}\Big|_{(0,0)}.$$
Dunque la condizione (S) nei due casi richiede che siano Hurwitz le matrici jacobiane in nell'origine
$$A + BK, \qquad \begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix}.$$

é noto dalla teoria lineare che condizione *sufficiente* affinché la (S) sia soddisfatta nel primo caso è che la coppia (A, B) sia stabilizzabile[2], mentre nel secondo caso è che la coppia (A, B) sia stabilizzabile e che la coppia (C, A) sia rilevabile[3]. Tali condizioni sono poi anche *necessarie* per la risoluzione del problema della regolazione dell'uscita nel caso di piena informazione e nel caso di controreazione dall'errore.

4.3 Regolazione dell'uscita nel caso di piena informazione

Un risultato preliminare è il seguente.

Lemma 1. *Si assuma che la condizione (S) nel caso di piena informazione sia soddisfatta per qualche* $\alpha(x, w)$. *Allora la condizione (R) è soddisfatta se e solo se esiste una mappa* $x = \pi(w)$, *con* $\pi(0) = 0$, *definita in un intorno* $W_0 \subset W$ *dell'origine, tale che*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), w, \alpha(\pi(w), w)) \\ 0 &= h(\pi(w), w) \end{aligned}$$

per ogni $w \in W_0$. □

Dim. Mostriamo che le condizioni sono necessarie. Gli autovalori della matrice jacobiana nel punto di equilibrio $(x, w) = (0, 0)$ del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, \alpha(x, w)) = (A + BK)x + (P + BL)w + \phi(x, w) \\ \dot{w} &= s(w) = Sw + \psi(w) \end{aligned}$$

sono quelli di $A + BK$, che sono a parte reale minore di zero per l'ipotesi (S), e di S, che sono a parte reale nulla. Per la teoria della varietà centrale, tale sistema ha localmente una varietà centrale $x = \pi(w)$ in $(x, w) = (0, 0)$, soluzione di

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) = f(\pi(w), w, \alpha(\pi(w), w)).$$

Si può poi mostrare che la condizione (R) e la stabilità neutra dell'esosistema implicano che $0 = h(\pi(w), w)$.

Se infatti per assurdo si suppone che ciò non è vero in qualche punto $(\pi(w_0), w_0)$ sufficientemente vicino a $(0, 0)$, allora

$$M = \|h(\pi(w_0), w_0)\| > 0$$

[2] La stabilizzabilità di (A, B) significa che esiste una matrice K tale che $A + BK$ sia Hurwitz; tale condizione è sufficiente perché la matrice A potrebbe già essere Hurwitz. Si ricorda che condizione necessaria e sufficiente perché (A, B) sia stabilizzabile è che la dinamica non raggiungibile sia caratterizzata da autovalori a parte reale minore di zero; per verificare se ciò è verificato si può applicare ad esempio il criterio di Hautus, per il quale deve risultare

$$\varrho \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \end{pmatrix} = n$$

per ogni $\lambda \in \sigma(A)$ tale che $Re(\lambda) \geq 0$.

[3] La rilevabilità di (C, A) significa che esiste una matrice G tale che $A + GC$ sia Hurwitz; tale condizione è sufficiente perché la matrice A potrebbe già essere Hurwitz. Si ricorda che condizione necessaria e sufficiente perché (C, A) sia rilevabile è che la dinamica non osservabile sia caratterizzata da autovalori a parte reale minore di zero; per verificare se ciò è verificato si può applicare ad esempio il criterio di Hautus, per il quale deve risultare

$$\varrho \begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix} = n$$

per ogni $\lambda \in \sigma(A)$ tale che $Re(\lambda) \geq 0$.

ed esiste un intorno V di $(\pi(w_0), w_0)$ tale che

$$\|h(\pi(w), w)\| > \frac{M}{2} \qquad \forall (\pi(w), w) \in V.$$

Se ora vale la (R) per una traiettoria che parte da $(\pi(w_0), w_0)$, allora esiste un T tale che

$$\|h(\pi(w(t)), w(t))\| < \frac{M}{2} \qquad \forall t > T.$$

Ma ogni punto $(\pi(w_0), w_0)$ sulla varietà centrale sufficientemente vicino all'origine è Poisson stabile per ipotesi, ossia per qualche istante $t_1 > T$ si ha che $(\pi(w(t_1)), w(t_1)) \in V$, ossia$\|h(\pi(w), w)\| > \frac{M}{2}$, e questo contraddice la precedente diseguaglianza. Dunque non può che essere $0 = h(\pi(w), w)$.

Mostriamo ora che le condizioni sono sufficienti. Infatti se

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) = f(\pi(w), w, \alpha(\pi(w), w))$$

è soddisfatta, allora il grafo della mappa $x = \pi(w)$ per costruzione è una varietà centrale per il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, \alpha(x, w)) \\ \dot{w} &= s(w). \end{aligned}$$

Inoltre poiché $(x, w) = (0, 0)$ è stabile per ipotesi, per condizioni $(x(0), w(0))$ sufficientemente piccole la soluzione $(x(t), w(t))$ rimane in un qualsiasi intorno arbitrariamente piccolo di $(0, 0)$ per ogni istante di tempo $t \geq 0$. Per la proprietà di locale attrattività della varietà centrale, per ogni $(x(0), w(0))$ in un intorno di $(0, 0)$ risulta poi

$$\|x(t) - \pi(w(t))\| \leq M e^{-\alpha t} \|x(0) - \pi(w(0))\|, \qquad \forall t \geq 0$$

per appropriate costanti $M, \alpha > 0$. Per continuità di $h(x, w)$ questo implica che $\lim_{t \to \infty} e(t) = 0$, ossia la (R) è soddisfatta. □

Si noti che, scelti un numero $R > 0$ ed un generico punto $w_0 \in W_0$ tale che $\|w_0\| < R$, per l'ipotesi di stabilità neutra $w = 0$ è stabile ed è possibile scegliere R in modo tale che la soluzione $w(t)$ dell'esosistema a partire da w_0 rimanga in W_0 per ogni $t \geq 0$. Per la proprietà di invarianza della varietà centrale, se $x(0) = x_0 = \pi(w_0)$ la soluzione $x(t)$ del sistema a ciclo chiuso

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, \alpha(x, w)) \\ \dot{w} &= s(w) \end{aligned}$$

sarà tale che $x(t) = \pi(w(t))$ per ogni $t \geq 0$. La restrizione del flusso di tale sistema a ciclo chiuso alla sua varietà centrale è una copia diffeomorfa del flusso dell'esosistema in quanto la mappa

$$\begin{aligned} \mu \colon W_0 &\to U \times W_0 \\ w &\mapsto (\pi(w), w) \end{aligned}$$

che ha rango uguale alla dimensione r di W_0, per ogni punto di W_0, definisce un diffeomorfismo di un intorno di W_0 sulla sua immagine.

Le condizioni necessarie e sufficienti per la risoluzione del problema della regolazione dell'uscita nel caso di informazione piena sono espresse dal seguente risultato.

Teorema 1. *Il problema della regolazione dell'uscita nel caso di informazione piena è risolvibile se e solo se esistono delle mappe $x = \pi(w)$ ed $u = c(w)$, con $\pi(0) = 0$ e $c(0) = 0$, entrambe definite in un intorno $W_0 \subset W$ dell'origine, che soddisfano le equazioni del regolatore*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), w, c(w)) \\ 0 &= h(\pi(w), w)\end{aligned}$$

per ogni $w \in W_0$, e la coppia (A, B) è stabilizzabile. □

Dim. Per il lemma precedente, posto

$$c(w) = \alpha(\pi(w), w),$$

si deduce la necessità delle equazioni del regolatore. Inoltre la stabilizzabilità della coppia (A, B) è ovviamente necessaria perché sia verificata la condizione (S), ossia di stabilità asintotica in prima approssimazione del sistema controreazionato con ingresso esogeno nullo.

Per contro, per la stabilizzabilità della coppia (A, B) esiste una matrice K tale che $(A + BK)$ sia Hurwitz. Se poi le equazioni del regolatore sono soddisfatte per una certa $\pi(w)$ ed una certa $c(w)$, si definisca il seguente controllo

$$u = \alpha(x, w) = c(w) + K(x - \pi(w)).$$

Si noti che $\alpha(x, 0) = c(0) + K(x - \pi(0)) = Kx$. Con tale scelta si vede che il sistema così controreazionato e con ingresso esogeno nullo

$$\dot{x} = f(x, 0, \alpha(x, 0)) = \Big[Ax + B(Kx + Lw) + Pw + \phi(x, w)\Big]_{w=0} = (A + BK)x + \phi(x, 0)$$

soddisfa la condizione (S). Inoltre dalle equazioni del regolatore, per $x = \pi(w)$ si ha che

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), w, \alpha(\pi(w), w)) \\ 0 &= h(\pi(w), w)\end{aligned}$$

ove si è usato il fatto che $\alpha(\pi(w), w) = c(w)$. Pertanto vale il lemma precedente, per cui la condizione (R) è soddisfatta. □

La prima equazione del regolatore esprime il fatto che esiste una varietà nello spazio di stato del sistema composto

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, w, u) \\ \dot{w} &= s(w) \\ e &= h(x, w)\end{aligned}$$

ossia il grafo della mappa $x = \pi(w)$, che è resa localmente invariante dalla controreazione $u = c(w)$. La seconda equazione esprime invece il fatto che la mappa d'errore è nulla su ogni punto di tale varietà. Le due equazioni congiuntamente esprimono la proprietà che il grafo della mappa $x = \pi(w)$ è una varietà invariante e azzerante l'uscita per il sistema composto

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, w, c(w)) \\ \dot{w} &= s(w) \\ e &= h(x, w).\end{aligned}$$

Si comprende allora che per qualsiasi condizione iniziale w^* dell'esosistema, ossia per ogni ingresso esogeno

$$w^*(t) = \Phi_t^s(w^*)$$

se lo stato iniziale del sistema è $x^* = \pi(w^*)$ e l'ingresso è pari a

$$u^*(t) = c(w^*(t))$$

allora risulta $e(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$. In altre parole l'ingresso generato dal seguente sistema autonomo

$$\begin{aligned} \dot{w} &= s(w) \\ u &= c(w) \end{aligned}$$

è proprio il controllo richiesto perché si produca una risposta $x(t)$ tale che l'errore sia identicamente nullo per ogni ingresso esogeno, purché la condizione iniziale del sistema sia scelta in modo appropriato, ossia sulla varietà centrale. Se la condizione iniziale non viene scelta sulla varietà centrale, ossia $x^* \neq \pi(w^*)$, la risposta $x(t)$ può essere una risposta a regime permanente all'ingresso $u^*(\cdot) = c(w^*(\cdot))$ se l'origine $x = 0$ di $\dot{x} = f(x, 0, 0)$ è asintoticamente stabile in prima approssimazione. Se $x = 0$ non lo è, l'ingresso deve contenere un termine stabilizzante, ossia il termine Kx. In questo caso il sistema composto

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, c(w) + K(x - \pi(w)) \\ \dot{w} &= s(w) \\ e &= h(x, w) \end{aligned}$$

ha ancora $x = \pi(w)$ come varietà invariante, ma ora essa è localmente esponenzialmente attrattiva. Stavolta, per ogni condizione iniziale x^* in un intorno dell'origine, la risposta $x(t)$ del sistema a ciclo chiuso

$$\dot{x} = f(x, w, c(w) + K(x - \pi(w))$$

converge ad una risposta a regime permanente all'ingresso $u^*(\cdot) = c(w^*(\cdot))$, e precisamente a quella del sistema a ciclo aperto

$$\dot{x} = f(x, w, u)$$

quando si considera l'ingresso esogeno $w^*(\cdot)$, l'ingresso $u^*(\cdot) = c(w^*(\cdot))$, e la condizione iniziale $x^* = \pi(w^*)$.

Si noti che, in base alla teoria della varietà centrale, un campo vettore di classe C^{k+1} ha una varietà centrale di classe C^k. Se il problema della regolazione è risolto da una legge di controllo $\alpha(x, w)$ di classe C^{k+1}, le equazioni del regolatore valgono per una coppia di mappe $x = \pi(w)$, $u = c(w)$ di classe C^k. Viceversa se le equazioni del regolatore valgono per una coppia di mappe $x = \pi(w)$, $u = c(w)$ di classe C^{k+1} allora il problema della regolazione dell'uscita è risolto da una legge di controllo $\alpha(x, w)$ di classe C^{k+1}.

Nel *caso lineare*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, u) = Ax + Pw + Bu \\ \dot{w} &= s(w) = Sw \\ e &= h(x, w) = Cx + Qw \end{aligned}$$

posto

$$\begin{aligned} \pi(w) &= \Pi w + \tilde{\pi}(w) & \qquad \Pi &= \left. \frac{\partial \pi}{\partial w} \right|_{w=0} \\ c(w) &= \Gamma w + \tilde{c}(w) & \qquad \Gamma &= \left. \frac{\partial c}{\partial w} \right|_{w=0} \end{aligned}$$

le equazioni del regolatore si riducono alle seguenti equazioni matriciali

$$\begin{aligned} \Pi S &= A\Pi + P + B\Gamma \\ 0 &= C\Pi + Q \end{aligned}$$

che devono essere risolte dalle matrici Π, Γ. é ovvio che in questo caso le mappe $\pi(w)$, $c(w)$ sono in realtà lineari

$$\pi(w) = \Pi w \qquad\qquad c(w) = \Gamma w.$$

La prova del teorema ora visto è costruttiva nella parte sufficiente in quanto fornisce una legge di controllo

$$u = \alpha(x, w) = c(w) + K(x - \pi(w)) = \big(c(w) - K\pi(w)\big) + Kx$$

e il seguente schema di controllo.

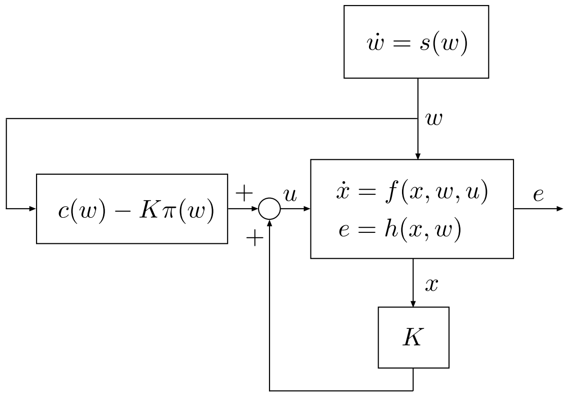

Figura 1 – Regolazione dell'uscita nel caso di piena informazione

Nel caso di inseguimento di traiettoria ottenuta mediante linearizzazione del comportamento ingresso-uscita, la convergenza a zero dell'errore è dovuto il fatto che $e(t)$ è soluzione di una certa equazione differenziale (lineare ed omogenea). Nel caso presente invece l'errore tende a zero grazie alla proprietà della varietà centrale, e questa è una richiesta meno forte del richiedere il soddisfacimento di un'equazione differenziale.

Vediamo come verificare l'esistenza della soluzione delle equazioni del regolatore in *casi particolari*, ossia per sistemi del tipo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ e &= h(x) + p(w) \end{aligned}$$

con ingresso ed uscita mono-dimensionali. In questo caso il riferimento da inseguire è $y_r = -p(w)$. Supporremo inoltre che la terna $\{f(x), g(x), h(x)\}$ abbia grado relativo r in $x = 0$, sicché mediante un cambio di coordinate $\begin{pmatrix} z \\ \eta \end{pmatrix} = \Phi(x)$ il sistema può essere posto in forma normale[4]

[4] Per le definizioni precise di grado relativo e di forma normale si rimanda alla parte teorica relativa. Si anticipa qui che il sistema dato ha grado relativo r in un punto x^0 se

$$1)\ L_g L_f^k h(x) = 0, \quad \forall x \text{ in un intorno di } x^0,\ k = 0, \cdots, r-2; \qquad 2)\ L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$$

ove, data una funzione $\lambda: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, si definisce derivata (di Lie) di λ lungo f la funzione $L_f\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\lambda}{\partial x_i} f_i(x) = \frac{\partial\lambda}{\partial x} f(x)$. Il grado relativo corrisponde al numero di volte che occorre derivare l'uscita y perché, per la prima volta, appaia l'ingresso u. Inoltre la trasformazione di coordinate che permette

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot z_{r-1} &= z_r \\ \dot z_r &= b(z,\eta) + a(z,\eta)u \\ \dot\eta &= q(z,\eta) \\ e &= z_1 + p(w). \end{aligned} \qquad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

Posto allora

$$\pi(w) = \begin{pmatrix} \pi_z(w) \\ \pi_\eta(w) \end{pmatrix}, \qquad \pi_z(w) = \begin{pmatrix} \pi_{z,1}(w) \\ \vdots \\ \pi_{z,r}(w) \end{pmatrix}$$

le equazioni del regolatore si scrivono

$$\begin{aligned} \dot\pi_{z,1}(w) &= \frac{\partial \pi_{z,1}}{\partial w} s(w) = L_s \pi_{z,1}(w) = \pi_{z,2}(w) \\ &\vdots \\ \dot\pi_{z,r-1}(w) &= \frac{\partial \pi_{z,r-1}}{\partial w} s(w) = L_s \pi_{z,r-1}(w) = \pi_{z,r}(w) \\ \dot\pi_{z,r}(w) &= \frac{\partial \pi_{z,r}}{\partial w} s(w) = L_s \pi_{z,r}(w) = b(\pi_z,\pi_\eta) + a(\pi_z,\pi_\eta)c(w) \\ \dot\pi_{\eta}(w) &= \frac{\partial \pi_{\eta}}{\partial w} s(w) = L_s \pi_{\eta}(w) = q(\pi_z,\pi_\eta) \\ 0 &= \pi_{z,1}(w) + p(w). \end{aligned}$$

Allora, dall'ultima equazione e dalle prime $r-1$ si ricava

$$\begin{aligned} \pi_{z,1}(w) &= -p(w) \\ \pi_{z,2}(w) &= L_s\pi_{z,1}(w) = -L_s p(w) \\ &\vdots \\ \pi_{z,r}(w) &= L_s\pi_{z,r-1}(w) = -L_s^{r-1} p(w) \end{aligned}$$

mentre dalla equazione r si determina

$$c(w) = \frac{1}{a(\pi_z,\pi_\eta)}\Big[L_s\pi_{z,r}(w) - b(\pi_z,\pi_\eta)\Big].$$

---

di mettere il sistema nella forma normale, che è quella riportata, è

$$\zeta = \Phi(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1}h(x) \\ \bar\Phi(x) \end{pmatrix}, \qquad \bar\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix}$$

con $\bar\Phi(x)$ tale che $\zeta = \Phi(x)$ definisca un cambio di coordinate, ossia tali che $\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x}$ sia non singolare in x^0.

Rimane da calcolare solo $\pi_\eta(w)$, determinabile dalla penultima equazione. Dunque la risolubilità delle equazioni del regolatore equivale a quella di

$$\frac{\partial \pi_\eta}{\partial w} s(w) = q(\pi_z, \pi_\eta)$$

per qualche mappa $\eta = \pi_\eta(w)$.

Se poi l'approssimazione lineare di

$$\dot{\eta} = q(0, \eta)$$

non ha autovalori sull'asse immaginario, considerato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= q(\pi_z(w), \eta) \\ \dot{w} &= s(w) \end{aligned}$$

in cui gli autovalori sull'asse immaginario sono solo quelli della parte lineare dell'esosistema, l'equazione che deve essere soddisfatta da qualsiasi varietà centrale del sistema è proprio

$$\frac{\partial \pi_\eta(w)}{\partial w} s(w) = q(\pi_z(w), \pi_\eta(w))$$

e dunque il problema della regolazione dell'uscita ha sempre soluzione.

Esempio. Supponiamo di avere un sistema già in forma normale[5]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ \dot{\eta} &= \eta + x_1 + x_2^2 \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Si noti che l'approssimazione lineare di questo sistema è controllabile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varrho\Big(B \quad AB \quad A^2B \Big) = \varrho \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Inoltre l'approssimazione lineare in $x = 0$ della dinamica zero non ha autovalori sull'asse immaginario, per cui il problema della regolazione dell'uscita ha soluzione.

Si supponga ora di voler inseguire il riferimento

$$y_r = M \ \mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

con ω un numero positivo fissato e noto, ed M, ϕ parametri arbitrari. Tale riferimento è generabile dal seguente esosistema

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \omega w_2 \\ \dot{w}_2 &= -\omega w_1 \end{aligned}$$

con opportune condizioni iniziali[6] e con $p(w) = -w_1$.

[5] Si verifica che la distribuzione span$\{g, ad_f g\}$ non è involutiva sicché non si può linearizzabile il comportamento ingresso-stato-uscita.

[6] Posto

$$y_r = w_1 = M \cos\phi \ \ \mathrm{sen}\,\omega t + M \ \mathrm{sen}\,\phi \ \ \cos\omega t$$

le condizioni iniziali sono

$$w_1(0) = M \ \mathrm{sen}\,\phi, \qquad w_2(0) = M \cos\phi.$$

In base a quanto prima osservato, la risolubilità delle equazioni del regolatore equivale a quella di

$$\frac{\partial \pi_\eta}{\partial w} s(w) = \frac{\partial \pi_\eta}{\partial w_1}\omega w_2 - \frac{\partial \pi_\eta}{\partial w_2}\omega w_1 = \pi_\eta(w) + \pi_{z,1}(w) + \pi_{z,2}^2(w) = q(\pi_z(w), \pi_\eta(w)).$$

Prima di procedere alla sua risoluzione, si trova che

$$\begin{aligned} \pi_{z,1}(w) &= -p(w) = w_1 \\ \pi_{z,2}(w) &= L_s w_1 = \omega w_2 \end{aligned}$$

e

$$c(w) = L_s \pi_{z,2}(w) = -\omega^2 w_1.$$

Proposta allora una soluzione del tipo polinomiale del secondo ordine

$$\pi_\eta(w) = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_1^2 + a_4 w_1 w_2 + a_5 w_2^2$$

si trova

$$(a_1 + 2a_3 w_1 + a_4 w_2)\omega w_2 - (a_2 + a_4 w_1 + 2a_5 w_2)\omega w_1 = (a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_1^2 + a_4 w_1 w_2 + a_5 w_2^2) + w_1 + \omega^2 w_2^2.$$

ovvero

$$-(a_1 + \omega a_2 + 1)w_1 + (\omega a_1 - a_2)w_2 - (a_3 + \omega a_4)w_1^2 + (2\omega a_3 - a_4 - 2\omega a_5)w_1 w_2 + (\omega a_4 - a_5 - \omega^2)w_2^2 = 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ \omega & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega & -1 & -2\omega \\ 0 & 0 & 0 & \omega & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_1} & \frac{\omega}{\Delta_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\omega}{\Delta_1} & -\frac{1}{\Delta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+2\omega^2}{\Delta_2} & \frac{\omega}{\Delta_2} & -\frac{2\omega^2}{\Delta_2} \\ 0 & 0 & \frac{2\omega}{\Delta_2} & -\frac{1}{\Delta_2} & \frac{2\omega}{\Delta_2} \\ 0 & 0 & \frac{2\omega^2}{\Delta_2} & -\frac{\omega}{\Delta_2} & -\frac{1+2\omega^2}{\Delta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Delta_1} \\ -\frac{\omega}{\Delta_1} \\ -\frac{2\omega^4}{\Delta_2} \\ \frac{2\omega^3}{\Delta_2} \\ -\frac{(1+2\omega^2)\omega^2}{\Delta_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con $\Delta_1 = 1 + \omega^2$, $\Delta_2 = 1 + 4\omega^2$.

Una soluzione al problema è il controllo

$$u = c(w) + K(x - \pi(w))$$

in cui K assegna nel semipiano sinistro gli autovalori alla matrice $A + BK$. La dinamica della differenza

$$\xi = x - \pi(w) = \begin{pmatrix} x_1 - w_1 \\ x_2 - \omega w_2 \\ \eta - \pi_\eta(w) \end{pmatrix}$$

è data da

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - \omega w_2 \\ K(x - \pi(w)) \\ \dot{\eta} - \dot{\pi}_\eta(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 \\ \xi_1 + \xi_3 + \xi_2^2 + 2\omega w_2 \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_2^2 + 2\omega w_2 \xi_2 \end{pmatrix}$$

in cui si è considerato che

$$\dot{\eta} - \dot{\pi}_\eta(w) = \eta + x_1 + x_2^2 - \pi_\eta(w) - \pi_{z,1}(w) - \pi_{z,2}^2(w) = \xi_1 + \xi_3 + \xi_2^2 + 2\omega w_2 \xi_2$$

e $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$, per cui come ci si aspettava tale differenza decade asintoticamente a zero.

Si noti che il controllore prescinde dalla conoscenza di M e ϕ, mentre necessita la conoscenza di ω. □

4.4 La immersione di un sistema

In questo paragrafo è illustrato il concetto di immersione, utilizzato nel paragrafo successivo. Si consideri una coppia di sistemi di classe C^∞

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{f}(\tilde{x}) \\ y &= \tilde{h}(\tilde{x}) \end{aligned}$$

con $f(0) = 0$, $h(0) = 0$, $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{h}(0) = 0$, definiti rispettivamente sugli spazi di stato X e $\tilde{X}$, ed aventi lo stesso spazio di stato per l'uscita $y \in Y = \mathbb{R}^m$. I due sistemi si indicheranno $\{X, f, h\}$ e $\{\tilde{X}, \tilde{f}, \tilde{h}\}$.

Definizione 3. Il sistema $\{X, f, h\}$ è immerso nel sistema $\{\tilde{X}, \tilde{f}, \tilde{h}\}$ se esiste una mappa

$$\begin{aligned} \tau\colon X &\rightarrow \tilde{X} \\ x &\mapsto \tilde{x} = \tau(x) \end{aligned}$$

di classe C^k, $k \geq 1$, che soddisfa $\tau(0) = 0$ e

$$h(x) \neq h(z) \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{h}(\tau(x)) \neq \tilde{h}(\tau(z))$$

tale che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial x} f(x) &= \tilde{f}(\tau(x)) \\ h(x) &= \tilde{h}(\tau(x)) \end{aligned}$$

per ogni $x \in X$. □

Si comprende che la mappa τ, che deve essere almeno derivabile con derivata continua, trasforma l'origine di X nell'origine di $\tilde{X}$ ed inoltre deve essere tale che le uscite generate da $\{X, f, h\}$ sono anche uscite di $\{\tilde{X}, \tilde{f}, \tilde{h}\}$. Infatti prima di tutto se a partire da due stati x, z le uscite sono differenti per $\{X, f, h\}$, sono differenti anche per $\{\tilde{X}, \tilde{f}, \tilde{h}\}$ a partire dagli stati trasformati $\tau(x), \tau(z)$.

Inoltre le due condizioni imposte su τ possono anche riscriversi come segue

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= \tilde{f}(\tau) \\ y &= \tilde{h}(\tau) \end{aligned}$$

e si indica con $\tau(t) = \Phi_t^{\tilde f}(\tau_0)$ la soluzione (flusso) di tale equazione differenziale all'istante t a partire da τ_0. Ma $\tau(t)$ dipende dal tempo t per mezzo di $x(t)$. Dunque considerate le soluzioni (flussi) $x(t) = \Phi_t^f(x_0)$ a partire da x_0 e $\tilde x(t) = \Phi_t^{\tilde f}(\tilde x_0)$ a partire da $\tilde x_0 = \tau(x_0)$, si ha

$$\tau(t) = \tau(x(t)) = \quad \tau(\Phi_t^f(x_0)) = \Phi_t^{\tilde f}(\tau(x_0)) \quad = \Phi_t^{\tilde f}(\tau(x(t_0))) = \Phi_t^{\tilde f}(\tau_0), \qquad \forall x_0 \in X, \quad \forall t \geq 0$$

e considerando anche la seconda condizione da questo segue

$$h\big(\Phi_t^f(x_0)\big) = \tilde h\Big(\tau\big(\Phi_t^f(x_0)\big)\Big) = \tilde h\Big(\Phi_t^{\tilde f}(\tau(x_0))\Big), \qquad \forall x_0 \in X, \quad \forall t \geq 0$$

e dunque l'uscita generata da $\{X, f, h\}$ quando lo stato iniziale è $x_0 \in X$ è uguale a quella generata da $\{\tilde X, \tilde f, \tilde h\}$ quando lo stato iniziale è $\tau(x_0) \in \tilde X$.

L'interesse in una immersione sta nel fatto che $\{\tilde X, \tilde f, \tilde h\}$ può godere di proprietà che non ha $\{X, f, h\}$. Ad esempio un sistema lineare può sempre essere immerso in uno lineare *osservabile*. Sotto opportune ipotesi ciò vale anche per un sistema non lineare, che può essere immerso in uno *lineare* ed *osservabile*.

Proposizione 2. *Esistano degli interi $p_1, \cdots, p_m$ tali che*

$$\dim\left(\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i\right) = \sum_{i=1}^m p_i, \qquad \mathcal{P}_i = \operatorname{span}\left\{dh_i, dL_f h_i, \cdots dL_f^{p_i-1} h_i\right\}$$

in $x = 0$ e

$$dL_f^{p_i} h_i \in \mathcal{P}_i, \qquad \forall i \in [1, m].$$

Allora esiste un intorno $I_0 \in X$ dell'origine tale che $\{I_0, f, h\}$ è immerso in un sistema $\{\tilde X, \tilde f, \tilde h\}$ di dimensione $\sum_{i=1}^m p_i$, la cui approssimazione lineare in $\tilde x = 0$ è osservabile. ▫

Dim. Per semplicità si consideri il caso $m = 1$. Sia $p = p_1$ e per ipotesi

$$dL_f^p h \in \operatorname{span}\left\{dh, dL_f h, \cdots dL_f^{p-1} h\right\}$$

ossia esiste una funzione ϕ tale che

$$L_f^p h = \phi(h, L_f h, \cdots L_f^{p-1} h).$$

Considerate allora le nuove coordinate

$$\begin{pmatrix} \tilde x_1 \\ \tilde x_2 \\ \vdots \\ \tilde x_p \end{pmatrix} = \tilde x = \tau(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{p-1} h(x) \end{pmatrix}$$

si ha che in un qualche intorno $I_0 \in X$ dell'origine il sistema $\{I_0, f, h\}$ è immerso in un sistema $\{\mathbb{R}^m, \tilde f, \tilde h\}$ di dimensione p in cui

$$\dot{\tilde x} = \tilde f(\tilde x) = \begin{pmatrix} \tilde x_2 \\ \tilde x_3 \\ \vdots \\ \tilde x_p \\ \phi(\tilde x_1, \tilde x_2, \cdots, \tilde x_p) \end{pmatrix}, \qquad y = \tilde h(\tilde x) = \tilde x_1 = h(x).$$

Il sistema $\{\mathbb{R}^m, \tilde{f}, \tilde{h}\}$ ha un'approssimazione lineare in $\tilde{x} = 0$ che è osservabile (essendo la forma canonica di Brunowskji). Tale dimostrazione si può chiaramente estendere al caso di $m > 1$ uscite. □

Vediamo ora sotto quali ipotesi un sistema può essere immerso in uno *lineare osservabile.*

Proposizione 3. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1) $\{X, f, h\}$ è immerso in un sistema lineare di dimensione finita ed osservabile;

2) lo spazio di osservazione $\mathcal{O}$ di $\{X, f, h\}$ ha dimensione finita;

3) esiste un intero q e dei numeri reali $a_0, a_1, \cdots, a_{q-1}$ tali che

$$L_f^q h(x) = a_0 h(x) + a_1 L_f h(x) + \cdots + a_{q-1} L_f^{q-1} h(x).$$ □

Dim. Per semplicità si consideri $m = 1$; l'estensione al caso di $m > 1$ uscite è immediato. Proviamo che la 2) implica la 1). Si supponga che lo spazio di osservazione $\mathcal{O}$ di $\{X, f, h\}$ abbia dimensione finita q. Allora per definizione

$$h(x), \quad L_f h(x), \quad \cdots \quad L_f^{q-1} h(x)$$

è una base di $\mathcal{O}$. In particolare $L_f^q h(x)$, che è un elemento di $\mathcal{O}$, si può scrivere

$$L_f^q h(x) = a_0 h(x) + a_1 L_f h(x) + \cdots + a_{q-1} L_f^{q-1} h(x)$$

per certi numeri reali $a_0, a_1, \cdots, a_{q-1}$, e quindi $\{X, f, h\}$ è immerso, mediante la mappa

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_q \end{pmatrix} = \tilde{x} = \tau(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{q-1} h(x) \end{pmatrix},$$

in un sistema lineare di dimensione finita ed osservabile $\{\mathbb{R}^q, \tilde{f}, \tilde{h}\}$ in cui

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \vdots \\ \tilde{x}_q \\ a_0 \tilde{x}_1 + a_1 \tilde{x}_2 + \cdots + a_{q-1} \tilde{x}_q \end{pmatrix} = \tilde{F}\tilde{x}, \qquad y = \tilde{h}(\tilde{x}) = \tilde{x}_1 = \tilde{H}\tilde{x} = h(x).$$

Proviamo che la 1) implica la 3). Per definizione di immersione di $\{X, f, h\}$ in un sistema lineare osservabile

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{F}\tilde{x}, \qquad y = \tilde{H}\tilde{x}$$

(in cui $\tilde{F}$ e $\tilde{H}$ sono matrici di numeri reali), esiste una mappa $\tilde{x} = \tau(x)$ tale che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial x} f(x) &= \tilde{F}\tau(x) \\ h(x) &= \tilde{H}\tau(x). \end{aligned}$$

Ora, essendo

$$\begin{aligned} L_f h(x) &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) = \frac{\partial \tilde{H}\tau(x)}{\partial x} f(x) = \tilde{H}\frac{\partial \tau(x)}{\partial x} f(x) = \tilde{H}\tilde{F}\tau(x) \\ L_f^k h(x) &= L_f^{k-1} L_f h(x) = \tilde{H}\tilde{F} L_f^{k-1}\tau(x) = \tilde{H}\tilde{F}^k \tau(x), \qquad \forall k \geq 0 \end{aligned}$$

se

$$m(\lambda) = m_0 + m_1\lambda + \cdots + m_{q-1}\lambda^{q-1} + \lambda^q$$

è il polinomio *minimo* di $\tilde{F}$, si ha

$$\begin{aligned} & m_0 h(x) + m_1 L_f h(x) + \cdots + m_{q-1} L_f^{q-1} h(x) + L_f^q h(x) \\ &= m_0 \tilde{H}\tau(x) + m_1 \tilde{H}\tilde{F}\tau(x) + \cdots + m_{q-1}\tilde{H}\tilde{F}^{q-1}\tau(x) + \tilde{H}\tilde{F}^q\tau(x) \\ &= \tilde{H}\Big(m_0 I + m_1\tilde{F} + \cdots + m_{q-1}\tilde{F}^{q-1} + \tilde{F}^q\Big)\tau(x) \\ &= \tilde{H}m(\tilde{F})\tau(x) = 0 \end{aligned}$$

e dunque

$$L_f^q h(x) = a_0 h(x) + a_1 L_f h(x) + \cdots + a_{q-1} L_f^{q-1} h(x)$$

in cui $a_i = -m_i$, $i \in [0, q-1]$.
La prova che la 3) implica la 2) è immediata, in quanto il fatto che

$$L_f^q h(x) = a_0 h(x) + a_1 L_f h(x) + \cdots + a_{q-1} L_f^{q-1} h(x)$$

significa appunto che lo spazio di osservazione $\mathcal{O}$ di $\{X, f, h\}$ ha dimensione finita q. □

Se dunque esiste un intero q e dei numeri reali $a_0, a_1, \cdots, a_{q-1}$ tali che

$$L_f^q h(x) = a_0 h(x) + a_1 L_f h(x) + \cdots + a_{q-1} L_f^{q-1} h(x)$$

per costruire l'immersione basta considerare le nuove coordinate

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_q \end{pmatrix} = \tilde{x} = \tau(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{q-1} h(x) \end{pmatrix}$$

e dunque in un qualche intorno $I_0 \in X$ dell'origine il sistema $\{I_0, f, h\}$ è immerso in un sistema $\{\mathbb{R}^m, \tilde{f}, \tilde{h}\}$ di dimensione q in cui

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}, \qquad y = C\tilde{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_q \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ove si è usato il fatto che

$$L_f^q h(x) = a_0 h(x) + a_1 L_f h(x) + \cdots + a_{q-1} L_f^{q-1} h(x) = a_0\tilde{x}_1 + a_1\tilde{x}_2 + \cdots + a_{q-1}\tilde{x}_q.$$

Dunque il sistema $\{X, f, h\}$ è immerso in un sistema lineare di dimensione finita ed osservabile.

4.5 Regolazione dell'uscita nel caso di controreazione dall'errore

Diamo le condizioni per la risoluzione del problema della regolazione dell'uscita con controreazione dall'errore.

Teorema 2. *Il problema della regolazione dell'uscita nel caso di controreazione dall'errore è risolvibile se e solo esistono delle mappe $x = \pi(w)$ ed $u = c(w)$, con $\pi(0) = 0$ e $c(0) = 0$, entrambe definite in un intorno $W_0 \subset W$ dell'origine, che soddisfano le equazioni del regolatore*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), w, c(w)) \\ 0 &= h(\pi(w), w) \end{aligned}$$

per ogni $w \in W_0$, e tali che il sistema autonomo $\{W_0, s, c\}$ sia immerso in un sistema

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varphi(\xi) \\ u &= \gamma(\xi) \end{aligned}$$

con $\varphi(0) = 0$, $\gamma(0) = 0$, definito in un intorno Ξ_0 dell'origine di $\mathbb{R}^\nu$, e che le matrici

$$\Phi = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}, \qquad \Gamma = \left.\frac{\partial \gamma}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}$$

siano tali che la coppia

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ GC & \Phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

sia stabilizzabile per qualche matrice G, e la coppia

$$\begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}$$

sia rilevabile. □

Dim. Per la necessità si supponga che un controllore del tipo

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta(\xi, e) = F\xi + Ge + \eta_1(\xi, e) \\ u &= \theta(\xi) = H\xi + \theta_1(\xi) \end{aligned}$$

risolva il problema di regolazione. Per il Lemma precedente, posto

$$c(w) = \theta(\sigma(w))$$

si deduce la necessità delle equazioni del regolatore. Inoltre la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ GC & \Phi \end{pmatrix}$$

deve essere Hurwitz per una qualche matrice G. Infatti considerato

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta(\xi, 0) = \varphi(\xi) = \Phi\xi + \varphi_1(\xi) \\ u &= \theta(\xi) = \gamma(\xi) = \Gamma\xi + \gamma_1(\xi) \end{aligned}$$

in cui $\Phi = \left.\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right|_{(0,0)}$, $\Gamma = \left.\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right|_{(0)}$, la matrice jacobiana del sistema controreazionato e con $w = 0$

$$\begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ GC & \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ GC & \Phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \end{pmatrix}$$

per la condizione (S) deve essere Hurwitz per una qualche matrice G, ossia la coppia

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ GC & \Phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

deve essere stabilizzabile da G. Poiché questa stessa matrice jacobiana può scriversi

$$\begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ GC & \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}$$

il fatto che debba essere Hurwitz significa anche che la coppia

$$\begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}$$

deve essere rilevabile.

Per la sufficienza si consideri una matrice G che stabilizza la coppia

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ GC & \Phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si determinino poi delle matrici K, G_0, M tali che la matrice[7]

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ GC & \Phi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} M \\ G_0 \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B\Gamma & BM \\ GC & \Phi & 0 \\ G_0C & 0 & K \end{pmatrix}$$

sia Hurwitz. Considerato allora il seguente controllore

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{pmatrix} \dot{\xi}_0 \\ \dot{\xi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K\xi_0 + G_0 e \\ \varphi(\xi_1) + Ge \end{pmatrix} = \eta(\xi, e) \\ u &= M\xi_0 + \gamma(\xi_1) = \theta(\xi) \end{aligned}$$

verifichiamo che esso risolve il problema della regolazione dell'uscita con controreazione dall'errore. Infatti la matrice jacobiana del sistema controreazionato con ingresso esogeno w nullo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, 0, M\xi_0 + \gamma(\xi_1)) = Ax + BM\xi_0 + B\Gamma\xi_1 + \phi(x, \xi_0, \xi_1, 0) \\ \dot{\xi}_0 &= K\xi_0 + G_0 h(x, 0) = K\xi_0 + G_0Cx + \chi_0(x, 0) \\ \dot{\xi}_1 &= \varphi(\xi_1) + Gh(x, 0) = \Phi\xi_1 + GCx + \chi_1(x, \xi_1, 0) \end{aligned}$$

in $(x, \xi_0, \xi_1) = (0, 0, 0)$ è

$$\begin{pmatrix} A & BM & B\Gamma \\ G_0C & K & 0 \\ GC & 0 & \Phi \end{pmatrix}$$

e considerato un cambio di coordinate $z = T \begin{pmatrix} x \\ \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$, essa è simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} A & B\Gamma & BM \\ GC & \Phi & 0 \\ G_0C & 0 & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & BM & B\Gamma \\ G_0C & K & 0 \\ GC & 0 & \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}$$

[7] Tale calcolo può essere di non facile soluzione.

la quale è Hurwitz per ipotesi. Dunque la condizione (S) è soddisfatta. Per vedere che anche la condizione (R) è soddisfatta, si osservi che per ipotesi esistono le mappe $x = \pi(w)$ ed $u = c(w)$ che soddisfano le equazioni del regolatore. Inoltre il sistema il sistema autonomo $\{W_0, s, c\}$ è immerso nel sistema $\{\Xi_0, \varphi, \gamma\}$, e quindi per definizione esiste una mappa $\tau\colon W_0 \to \Xi_0$ tale che

$$\frac{\partial \tau}{\partial w} s(w) = \varphi(\tau(w)), \qquad c(w) = \gamma(\tau(w)).$$

Posto allora

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \sigma(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau(w) \end{pmatrix},$$

e notato che

$$\theta(\sigma(w)) = \theta(\xi)|_{\xi=\sigma(w)} = M\xi_0|_{\xi_0=0} + \gamma(\xi_1)|_{\xi_1=\tau(w)} = \gamma(\tau(w)) = c(w)$$

per $x = \pi(w)$ e $\xi = \sigma(w)$, con $\pi(0) = 0$ e $\sigma(0) = 0$, definite in un intorno $W_0 \subset W$ dell'origine, sono soddisfatte le equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), w, c(w)) = f(\pi(w), w, \theta(\sigma(w))) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial w} s(w) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial w} s(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(\tau(w)) \end{pmatrix} = \eta(\sigma(w), 0) \\ 0 &= h(\pi(w), w) \end{aligned}$$

per ogni $w \in W_0$. Per il Lemma precedente la loro risoluzione è equivalente al soddisfacimento della condizione (R). □

Per il problema della regolazione dell'uscita nel caso di controreazione dall'errore vale un risultato preliminare analogo a quello nel caso di piena informazione.

Lemma 2. *Si assuma che la condizione (S) nel caso di controreazione dall'errore sia soddisfatta per qualche $\eta(\xi, e)$, $\theta(\xi)$. Allora la condizione (R) è soddisfatta se e solo se esistono delle mappe $x = \pi(w)$ e $\xi = \sigma(w)$, con $\pi(0) = 0$ e $\sigma(0) = 0$, definite in un intorno $W_0 \subset W$ dell'origine, tali che*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), w, \theta(\sigma(w))) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial w} s(w) &= \eta(\sigma(w), 0) \\ 0 &= h(\pi(w), w) \end{aligned}$$

per ogni $w \in W_0$. □

Dim. Mostriamo che le condizioni sono necessarie. Gli autovalori della matrice jacobiana nel punto di equilibrio $(x, \xi, w) = (0, 0, 0)$ del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, \theta(\xi)) = Ax + BH\xi + Pw + \phi(x, \xi, w) \\ \dot{\xi} &= \eta(\xi, h(x, w)) = GCx + F\xi + GQw + \chi(x, \xi, w) \\ \dot{w} &= s(w) = Sw + \psi(w). \end{aligned}$$

sono quelli di

$$\begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix}$$

che sono a parte reale minore di zero per l'ipotesi (S), e di S, che sono a parte reale nulla. Per la teoria della varietà centrale, tale sistema ha localmente una varietà centrale $\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(w) \\ \sigma(w) \end{pmatrix}$ in $(x, \xi, w) = (0, 0, 0)$, soluzione di

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), w, \theta(\sigma(w))) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial w} s(w) &= \eta(\sigma(w), h(\pi(w), w)). \end{aligned}$$

Si può poi mostrare che la condizione (R) e la stabilità neutra dell'esosistema implicano che $0 = h(\pi(w), w)$, come si può dimostrare per assurdo come nel corrispondente Lemma valido nel caso di piena informazione.

Si può infine mostrare che le condizioni sono sufficienti a dimostrare che la (R) è soddisfatta nella stessa maniera usata nel Lemma valido nel caso di piena informazione. □

Da questo Lemma si comprende che le equazioni del regolatore viste nel caso di piena informazione continuano ad essere necessarie nel presente caso di controreazione dall'errore, una volta posto

$$c(w) = \theta(\sigma(w))$$

nella prima condizione del Lemma e considerata la terza condizione; quindi $x = \pi(w)$ deve soddisfare le equazioni del regolatore nel caso di piena informazione. Quest'ultime, assieme alla stabilizzabilità della coppia (A, B), costituivano le condizioni necessarie e sufficienti per la soluzione del problema del regolatore nel caso di piena informazione. Nel caso di controreazione dall'errore queste condizioni, assieme a quella ovvia di rilevabilità della coppia (C, A), sono necessarie ma non sufficienti per risolvere il problema della regolazione. Una condizione *necessaria e sufficiente* per la risolubilità del problema della regolazione dall'uscita sarà quella che il sistema autonomo

$$\begin{aligned} \dot{w} &= s(w) \\ u &= c(w) \end{aligned}$$

sia immerso in un sistema con certe proprietà.

Teorema 3. *Il problema della regolazione dell'uscita nel caso di controreazione dall'errore è risolvibile se e solo esistono delle mappe $x = \pi(w)$ ed $u = c(w)$, con $\pi(0) = 0$ e $c(0) = 0$, entrambe definite in un intorno $W_0 \subset W$ dell'origine, che soddisfano le equazioni del regolatore*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), w, c(w)) \\ 0 &= h(\pi(w), w) \end{aligned}$$

per ogni $w \in W_0$, e tali che il sistema autonomo $\{W_0, s, c\}$ sia immerso in un sistema

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varphi(\xi) \\ u &= \gamma(\xi) \end{aligned}$$

con $\varphi(0) = 0$, $\gamma(0) = 0$, definito in un intorno Ξ_0 dell'origine di $\mathbb{R}^\nu$, e che le matrici

$$\Phi = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}, \qquad \Gamma = \left. \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$$

siano tali che la coppia

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ GC & \Phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

sia stabilizzabile per qualche matrice G, e la coppia

$$\begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}$$

sia rilevabile. $\square$

Dim. Per la necessità si supponga che un controllore del tipo

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta(\xi, e) \\ u &= \theta(\xi) \end{aligned}$$

risolva il problema. Per il Lemma precedente, posto

$$c(w) = \theta(\sigma(w))$$

si deduce la necessità delle equazioni del regolatore. Inoltre la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ GC & \Phi \end{pmatrix}$$

deve essere Hurwitz per una qualche matrice G. Infatti considerato

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta(\xi, 0) &= \varphi(\xi) &= \Phi\xi + \varphi_1(\xi) \\ u &= \theta(\xi) &= \gamma(\xi) &= \Gamma\xi + \gamma_1(\xi) \end{aligned}$$

in cui $\Phi = \left.\dfrac{\partial\eta}{\partial\xi}\right|_{(0,0)}$, $\Gamma = \left.\dfrac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{(0)}$, la matrice jacobiana del sistema controreazionato e con $w = 0$

$$\begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ GC & \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ GC & \Phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \end{pmatrix}$$

per la condizione (S) deve essere Hurwitz per una qualche matrice G, ossia la coppia

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ GC & \Phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

deve essere stabilizzabile da G. Poiché questa stessa matrice jacobiana può scriversi

$$\begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ GC & \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}$$

il fatto che debba essere Hurwitz significa anche che la coppia

$$\begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}$$

deve essere rilevabile.

Per la sufficienza si consideri una matrice G che stabilizza la coppia

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ GC & \Phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si determinino poi delle matrici K, G_0, M tali che la matrice[8]

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ GC & \Phi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} M \\ G_0 \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B\Gamma & BM \\ GC & \Phi & 0 \\ G_0C & 0 & K \end{pmatrix}$$

sia Hurwitz. Considerato allora il seguente controllore

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{pmatrix} \dot{\xi}_0 \\ \dot{\xi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K\xi_0 + G_0 e \\ \varphi(\xi_1) + Ge \end{pmatrix} = \eta(\xi, e) \\ u &= M\xi_0 + \gamma(\xi_1) = \theta(\xi) \end{aligned}$$

verifichiamo che esso risolve il problema della regolazione dell'uscita con controreazione dall'errore. Infatti la matrice jacobiana del sistema controreazionato con ingresso esogeno w nullo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, 0, M\xi_0 + \gamma(\xi_1)) = Ax + BM\xi_0 + B\Gamma\xi_1 + \phi(x, \xi_0, \xi_1, 0) \\ \dot{\xi}_0 &= K\xi_0 + G_0 h(x, 0) = K\xi_0 + G_0Cx + \chi_0(x, 0) \\ \dot{\xi}_1 &= \varphi(\xi_1) + Gh(x, 0) = \Phi\xi_1 + GCx + \chi_1(x, \xi_1, 0) \end{aligned}$$

in $(x, \xi_0, \xi_1) = (0, 0, 0)$ è

$$\begin{pmatrix} A & BM & B\Gamma \\ G_0C & K & 0 \\ GC & 0 & \Phi \end{pmatrix}$$

e considerato un cambio di coordinate $z = T \begin{pmatrix} x \\ \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$, essa è simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} A & B\Gamma & BM \\ GC & \Phi & 0 \\ G_0C & 0 & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & BM & B\Gamma \\ G_0C & K & 0 \\ GC & 0 & \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}$$

la quale è Hurwitz per ipotesi. Dunque la condizione (S) è soddisfatta. Per vedere che anche la condizione (R) è soddisfatta, si osservi che per ipotesi esistono le mappe $x = \pi(w)$ ed $u = c(w)$ che soddisfano le equazioni del regolatore. Inoltre il sistema il sistema autonomo $\{W_0, s, c\}$ è immerso nel sistema $\{\Xi_0, \varphi, \gamma\}$, e quindi per definizione esiste una mappa $\tau\colon W_0 \to \Xi_0$ tale che

$$\frac{\partial \tau}{\partial w} s(w) = \varphi(\tau(w)), \qquad c(w) = \gamma(\tau(w)).$$

Posto allora

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \sigma(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau(w) \end{pmatrix},$$

e notato che

$$\theta(\sigma(w)) = \theta(\xi)\big|_{\xi=\sigma(w)} = M\xi_0\big|_{\xi_0=0} + \gamma(\xi_1)\big|_{\xi_1=\tau(w)} = \gamma(\tau(w)) = c(w)$$

[8] Tale calcolo può essere di non facile soluzione.

per $x = \pi(w)$ e $\xi = \sigma(w)$, con $\pi(0) = 0$ e $\sigma(0) = 0$, definite in un intorno $W_0 \subset W$ dell'origine, sono soddisfatte le equazioni

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), w, c(w)) = f(\pi(w), w, \theta(\sigma(w))) \\
\frac{\partial \sigma}{\partial w} s(w) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial w} s(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(\tau(w)) \end{pmatrix} = \eta(\sigma(w), 0) \\
0 &= h(\pi(w), w)
\end{aligned}$$

per ogni $w \in W_0$. Per il Lemma precedente la loro risoluzione è equivalente al soddisfacimento della condizione (R). $\square$

Dunque il problema della regolazione dell'uscita con controreazione dall'errore è risolubile se e solo se le equazioni del regolatore sono soddisfatte con certe mappe $x = \pi(w)$, $u = c(w)$ ed inoltre se il sistema

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= s(w) \\
u &= c(w)
\end{aligned}$$

soddisfa la proprietà di immersione nel sistema

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \varphi(\xi) \\
u &= \gamma(\xi)
\end{aligned}$$

e di ulteriori proprietà riguardanti la parte lineare. In particolare si richiede che sia stabilizzabile la coppia

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ GC & \Phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

e che sia rilevabile la coppia

$$\begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}.$$

La prima proprietà implica la stabilizzabilità della coppia (A, B), mentre la seconda implica la rilevabilità della coppia (C, A). Infatti

$$\varrho \begin{pmatrix} A - \lambda I & 0 & B \\ GC & \Phi - \lambda I & 0 \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} A - \lambda I & B & 0 \\ GC & 0 & \Phi - \lambda I \end{pmatrix} = n+\nu, \qquad \forall \lambda \in \begin{pmatrix} A & 0 \\ GC & \Phi \end{pmatrix} \text{ tale che } \mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$$

implica in particolare che

$$\varrho \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \end{pmatrix} = n,$$

per ogni $\lambda \in \sigma(A)$ tale che $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, ossia implica la stabilizzabilità della coppia (A, B). Analogamente

$$\varrho \begin{pmatrix} A - \lambda I & B\Gamma \\ 0 & \Phi - \lambda I \\ C & 0 \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} A - \lambda I & B\Gamma \\ C & 0 \\ 0 & \Phi - \lambda I \end{pmatrix} = n + \nu, \qquad \forall \lambda \in \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix} \text{ tale che } \mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$$

per ogni $\lambda \in \sigma(A)$ tale che $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, implica in particolare che

$$\varrho \begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix} = n$$

per ogni $\lambda \in \sigma(A)$ tale che $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda) \geq 0$, ossia la rilevabilità della coppia (C, A). Inoltre si noti che ciò implica anche che la coppia (Γ, Φ) è rilevabile, ossia

$$\varrho \begin{pmatrix} \Phi - \lambda I \\ C \end{pmatrix} = \nu$$

per ogni $\lambda \in \sigma(\Phi)$ tale che $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda) \geq 0$.

Questa discussione mette in luce che il sistema

$$\begin{aligned} \dot{w} &= s(w) \\ u &= c(w) \end{aligned}$$

deve essere immerso in un sistema la cui approssimazione lineare in $\xi = 0$ sia rilevabile. I risultati presentati a proposito delle immersioni danno delle condizioni perché un sistema sia immerso in un sistema (non lineare) la cui approssimazione lineare è osservabile, ovvero in un sistema lineare osservabile. Questi risultati sono utilizzati nei seguenti corollari del teorema ora presentato.

Corollario 1. *Il problema della regolazione dell'uscita con controreazione dall'errore è risolubile se*

1. *la coppia (A, B) è stabilizzabile;*
2. *la coppia (C, A) è rilevabile;*
3. *esistono delle mappe $x = \pi(w)$, $u = c(w)$, con $\pi(0) = 0$, $c(0) = 0$, definite in un intorno $W_0 \in W$ dell'origine, che soddisfano le equazioni del regolatore;*
4. *risulti*
$$\dim \left(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{gen}\left\{ dc_i,\ dL_s c_i, \cdots,\ dL_s^{p_i - 1} c_i \right\} \right) = p_1 + p_2 + \cdots + p_m$$
per degli interi $p_1, \cdots, p_m$, con $c_i(w)$ l'elemento i-esimo di $c(w)$, $i \in [1, p]$;
5. *la matrice*
$$\begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$$
sia non singolare per ogni $\lambda \in \sigma(S)$ tale che $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda) \geq 0$.

Corollario 2.

Vediamo ora che è possibile dare delle condizioni che assicurano la rilevabilità della coppia

$$\begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}$$

in base a condizioni sulle matrici A, B e C.

Lemma 3. *Si supponga che le coppie (C, A), (Γ, Φ) siano rilevabili. Allora affinché la coppia*

$$\begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}$$

sia rilevabile è sufficiente che la matrice

$$\varrho \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = n + p$$

ossia abbia colonne linearmente indipendenti, per ogni $\lambda \in \sigma(\Phi)$ tale che $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda) \geq 0$. Se poi

$$B\Gamma\Big(\ker(\Phi - \lambda I)\Big) = \mathbb{I}\mathrm{m}\,(B)$$

per ogni $\lambda \in \sigma(\Phi)$ tale che $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda) \geq 0$, allora tale condizione è anche necessaria. In particolare tale condizione è necessaria quando si ha un numero $m = 1$ di uscite. □

Il controllore che risolve il problema della regolazione dell'uscita con controreazione dall'errore[9]

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{pmatrix} \dot{\xi}_0 \\ \dot{\xi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K\xi_0 + G_0 e \\ \varphi(\xi_1) + Ge \end{pmatrix} = \eta(\xi, e) \\ u &= M\xi_0 + \gamma(\xi_1) = \theta(\xi) \end{aligned}$$

è costituito dal parallelo di un controllore lineare

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= K\xi_0 + G_0 e \\ u_0 &= M\xi_0 \end{aligned}$$

ed uno in generale non lineare

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \varphi(\xi_1) + Ge \\ u_1 &= \gamma(\xi_1). \end{aligned}$$

Il primo ha il compito di stabilizzare in prima approssimazione l'interconnessione

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, u_0 + \gamma(\xi_1)) \\ \dot{\xi}_1 &= \varphi(\xi_1) + Gh(x, w) \\ e &= h(x, w) \end{aligned}$$

mentre il secondo ha il compito di generare il desiderato ingresso che determina il desiderato regime permanente. In effetti le identità[10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), w, \gamma(\tau(w))) \\ \frac{\partial \tau}{\partial w} s(w) &= \varphi(\tau(w)) \end{aligned}$$

rendono invariante la varietà

$$\mathcal{V} = \Big\{(x, \xi_0, \xi_1, w) \mid x = \pi(w),\ \xi_0 = 0,\ \xi_1 = \tau(w)\Big\}$$

[9] Si veda la parte sufficiente del teorema presentato.
[10] Si veda la parte sufficiente del teorema presentato.

per il sistema controreazionato

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, w, M\xi_0 + \gamma(\xi_1))\\ \dot{\xi}_0 &= K\xi_0 + G_0 h(x, w)\\ \dot{\xi}_1 &= \varphi(\xi_1) + G h(x, w)\\ \dot{w} &= s(w)\end{aligned}$$

e su $\mathcal{V}$ l'errore di inseguimento è nullo. Dunque il secondo controllore genera, per ogni valore iniziale in $\mathcal{V}$, un ingresso che mantiene la traiettoria di tale sistema controreazionato su $\mathcal{V}$. Per tale ragione tale controllore è detto costituire un *modello interno* dell'esosistema. Inoltre il primo controllore ha il compito di rendere $\mathcal{V}$ localmente attrattiva, ossia tale che qualsiasi traiettoria che parte sufficientemente vicino all'origine $(x, \xi_0, \xi_1, w) = (0, 0, 0, 0)$ converge esponenzialmente a $\mathcal{V}$ è quindi alla desiderata risposta a regime permanente.

Da completare

Supponiamo di avere un esosistema lineare

$$\dot{w} = Sw$$

e sia γ una funzione polinomiale delle componenti di w. Allora è possibile realizzare un'immersione in un numero finito di passi. Infatti sia T una base scelta per le funzioni polinomiali. Usando il teorema di Cayley-Hamilton

$$\begin{aligned}
z_1 &= CT \\
z_2 &= CDT \\
&\vdots \\
z_n &= CD^{n-1}T \\
z_{n+1} = \dot{z}_n &= CD^nT = C(-a_0I - a_1D + \cdots - a_{n-1}D^{n-1})T = -a_0z_1 - a_1z_2 + \cdots - a_{n-1}z_n
\end{aligned}$$

ove D è la matrice $n \times n$ che permette di esprimere la derivata di T secondo la dinamica dell'esosistema e

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

è il polinomio caratteristico di D. L'immersione è allora

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
&\vdots \\
\dot{z}_n &= z_{n-1} \\
\dot{z}_n &= -a_0z_1 - a_1z_2 + \cdots - a_{n-1}z_n.
\end{aligned}$$

Esempio. Sia

$$\gamma = a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_1w_2 + a_4w_1^2 + a_5$$

con

$$\begin{aligned}
\dot{w}_1 &= -w_2 \\
\dot{w}_2 &= w_1.
\end{aligned}$$

Si comprende che la base da scegliere è

$$T = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_1^2 \\ w_1w_2 \\ w_2^2 \end{pmatrix}$$

e che

$$\dot{T} = \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \\ -2w_1w_2 \\ w_1^2 - w_2^2 \\ 2w_1w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} T = DT.$$

Si noti che

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}, \qquad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque
$$|\lambda I - D| = |\lambda I - D_1|\ |\lambda I - D_2| = (\lambda^2+1)(\lambda^3+4\lambda) = \lambda^5 + 5\lambda^3 + 4\lambda.$$
Pertanto
$$\begin{array}{rcl} \dot z_1 & = & z_2 \\ \dot z_2 & = & z_3 \\ \dot z_3 & = & z_4 \\ \dot z_4 & = & z_5 \\ \dot z_5 & = & -4z_2 - 5z_4. \end{array}$$
che costituisce l'immersione cercata. □