

Appunti di Modellistica e Controllo di Strutture Spaziali

S. Di Gennaro e S. Monaco

22.1.2007

Capitolo 1

Modellistica di un corpo rigido

Un modello matematico adatto a studiare i problemi di controllo di un satellite può essere dedotto dalle equazioni che descrivono la dinamica di assetto. Queste equazioni sono usualmente divise in due gruppi: le equazioni cinematiche, che descrivono il moto del satellite, senza tenere in conto le forze che causano tale moto, e le equazioni dinamiche, che mostrano come le forze e i momenti esterni influenzano la variazione della velocità angolare del satellite.

Per scrivere tali equazioni sarà opportuno introdurre vari riferimenti, tutti aventi la stessa origine. Sia RC un riferimento inerziale di origine O , ed RF un riferimento non inerziale che ruota solidalmente con un corpo rigido, con origine $\Omega \equiv O$. È comune considerare O coincidente con il centro di massa del corpo principale del satellite. È facile intuire che RF determina l'assetto, ossia la posizione nello spazio, del satellite rispetto al sistema RC . Senza perdita di generalità si supponrà che RF coincida con RC per $t = 0$.

Nei problemi in cui si vorrà che il satellite assuma istante per istante un certo assetto, ossia nei problemi di “inseguimento di un assetto desiderato” (o “tracking”), converrà poi introdurre un riferimento RF_r , con origine in $\Omega_d \equiv O$, che fornisce ad ogni istante l'assetto desiderato. Ovviamente in generale RF_r non è fisso e non è inerziale. In particolare, però, nei problemi in cui si vorrà che il satellite passi da un assetto al tempo $t = 0$ ad un assetto desiderato, ossia nelle manovre “punto-punto” (o “point-to-point”, o “rest-to-rest”), RF_r sarà fisso.

Il problema di controllo di assetto può essere qualitativamente espresso come segue: trovare, se possibile, un'azione di controllo tale che RF tenda asintoticamente a coincidere con RF_r . L'azione di controllo può essere realizzata con gas jets, collocati sul corpo principale (“main body”) del satellite, o da reaction wheels. I primi sono tipicamente usati per grandi manovre di assetto, mentre i secondi sono impiegati per manovre di assetto fini.

All'istante $t = 0$, RF_r potrebbe coincidere con RF (e quindi con RC) oppure no. Se ad esempio si vuole inseguire un riferimento desiderato potrebbe convenire che RF_r coincida con RC per $t = 0$, per evitare transitori troppo “onerosi” per gli attuatori, mentre negli spostamenti punto-punto RF_r potrebbe non coincidere con RF per $t = 0$ (nulla però vieta di effettuare uno spostamento punto-punto come un inseguimento di traiettoria, ad esempio se si vuole far evitare che uno dei sensori del satellite “guardi” una zona dello spazio in cui potrebbe non avere un funzionamento ottimale).

1.1 Le equazioni cinematiche

L'equazione cinematica specifica l'evoluzione nel tempo di un insieme di parametri che definiscono l'assetto del satellite rispetto a un fissato riferimento inerziale. In esse non appaiono l'espressione delle forze agenti sulle strutture.

Un importante risultato della meccanica dei corpi rigidi, il teorema di Eulero, afferma che il più generico spostamento di un corpo rigido che lascia fisso un punto è una rotazione attorno ad un certo asse, l'asse di Eulero, passante per il punto fisso.

Teorema 1 [Teorema di Eulero] *Ogni sequenza di rotazioni che lascia un punto dello spazio invariato equivale ad una rotazione Φ attorno ad un asse passante attorno a tale punto fisso e detto asse di Eulero. Sia ϵ il versore che individua tale asse.* \diamond

Esistono molte parametrizzazioni che descrivono l'assetto di un corpo rigido nello spazio. Nel seguito analizzeremo alcune di esse.

1.1.1 Gli angoli di Eulero

Un insieme minimo di parametri è dato dagli *angoli di Eulero* φ , γ e ψ , che descrivono le tre rotazioni necessarie per portare $R\Gamma$ a coincidere con la terna di riferimento $R\Gamma_r$. Ogni rotazione può essere rappresentata da una matrice ortogonale¹, che rappresenta una trasformazione di uno spazio tridimensionale in sé, in quanto lascia invariata la norma di un vettore.

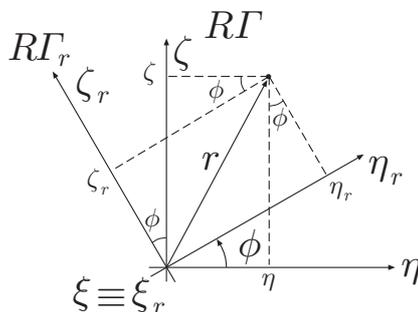
Se v , w sono vettori di \mathbb{R}^n ed A è una matrice $n \times n$ ortogonale, considerati i vettori $\mathbf{v} = Av$, $\mathbf{w} = Aw$, trasformati da A , il loro prodotto scalare vale

$$\mathbf{v}^T \mathbf{w} = (Av)^T Aw = v^T A^T Aw = v^T w.$$

Se $w = v$ questo mostra che la norma euclidea $\|v\| = \sqrt{v^T v}$ del vettore v rimane costante, per cui *una matrice ortogonale A può essere pensata come una trasformazione che realizza una rotazione del vettore v nello spazio n -dimensionale².*

Per esempio la rotazione di un angolo φ attorno all'asse ξ , in senso positivo (ad esempio antiorario, regola della mano destra), è rappresentato dalla matrice

$$\mathcal{R}_1(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$



¹Una matrice A si dice ortogonale se $A^{-1} = A^T$, ossia se $AA^T = A^T A = I$, ove I indica la matrice unità.

²Per vettori di C^n le stesse considerazioni valgono per A unitaria, ossia tale che $A^{-1} = A^*$, ove “*” indica “coniugata trasposta. In tale caso $AA^* = A^*A = I$, e se v , w sono vettori di C^n , per i vettori trasformati $\mathbf{v} = Av$, $\mathbf{w} = Aw$ si ha che $\mathbf{v}^* \mathbf{w} = (Av)^* Aw = v^* A^* Aw = v^* w$. Ancora una volta, per $w = v$ questo mostra che la norma del vettore v rimane costante, ed A può essere pensata come una trasformazione che realizza una rotazione del vettore v nello spazio n -dimensionale.

Infatti un generico punto di coordinate $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ dopo la rotazione ha coordinate $\begin{pmatrix} \xi_r \\ \eta_r \\ \zeta_r \end{pmatrix}$ date da

$$\begin{aligned} \xi_r &= \xi \\ \eta_r &= \frac{\eta}{\cos \phi} + \zeta_r \tan \phi = \frac{\eta}{\cos \phi} + (-\eta \sin \phi + \zeta \cos \phi) \tan \phi = \eta \cos \phi + \zeta \sin \phi \\ \zeta_r &= (\zeta - \eta \tan \phi) \cos \phi = -\eta \sin \phi + \zeta \cos \phi \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} \xi_r \\ \eta_r \\ \zeta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Dunque la matrice $\mathcal{R}_1(\phi)$ può essere vista come una trasformazione (lineare) che trasforma punti dello spazio (l'estremo "puntato" dal vettore r), ovvero come una trasformazione lineare che trasforma i vettori r dello spazio.

Precisiamo però che vedendo $\mathcal{R}_1(\phi)$ come trasformazione di vettori, si possono avere due interpretazioni

1. $\mathcal{R}_1(\phi)$ è un operatore che *trasforma vettori di un riferimento ($R\Gamma$) in vettori di un altro riferimento ($R\Gamma_r$):* $r' = \mathcal{R}_1(\phi)r$. In tal caso il vettore r non cambia, è il riferimento che ruota (positivamente se in senso *antiorario*, regola della mano destra), e cambiano solo le componenti del vettore; questa è una operazione sulla terna di riferimento;
2. $\mathcal{R}_1(\phi)$ è un operatore che *trasforma un vettore (di $R\Gamma$) in un altro ruotato rispetto al primo (positivamente se in senso orario), ed espresso nello stesso riferimento ($R\Gamma$).* È infatti equivalente il far ruotare il sistema di coordinate in senso antiorario ed il far ruotare il vettore r in senso orario di un angolo ϕ , fino ad avere un vettore r' ; questa è una operazione sul vettore.

Nel seguito saremo interessati a questa seconda interpretazione, ossia di operatore che trasforma r in un altro vettore r' espresso nello stesso riferimento. Si sottolinea che in tale interpretazione la rotazione di r è positiva se in senso orario, ossia in opposto alla regola della mano destra.

Se la rotazione fosse avvenuta attorno l'asse η la matrice di rotazione sarebbe stata

$$\mathcal{R}_2(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix},$$

e se invece fosse avvenuta attorno l'asse ζ

$$\mathcal{R}_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le matrici $\mathcal{R}_1(\phi)$, $\mathcal{R}_2(\phi)$, $\mathcal{R}_3(\phi)$ sono ortogonali, come già detto, hanno autovalori 1 e $e^{\pm j\phi} = \cos \phi \pm j \sin \phi$, ed il loro determinante è pari ad uno³. Dal punto di vista fisico e considerando il teorema di Eulero, una trasformazione che sia rappresentata da una matrice così fatta, avente un autovalore

³Le trasformazioni lineari dello spazio \mathbf{R}^3 che hanno la proprietà di essere ortogonali e proprie, ossia con determinante unitario, formano la cosiddetta varietà $SO(3)$.

pari ad 1, è una trasformazione di rotazione dei vettori di un angolo ϕ attorno l'asse individuato dall'autovettore corrispondente

$$\mathcal{R}v = v, \quad \lambda = 1, \quad v \text{ autovettore}$$

ove per esempio $v = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ se $\mathcal{R} = \mathcal{R}_2$, etc., con $a \neq 0$.

Dunque l'asse, che rappresenta il sottospazio⁴ generato⁵ da v , viene trasformato in sé stesso durante la rotazione, ossia non si muove.

Gli angoli di Eulero hanno un significato geometrico semplice ed hanno altri vantaggi, tra i quali la possibilità di determinare la soluzione in forma chiusa alle equazioni differenziali che descrivono la cinematica del satellite. Inoltre sono utilizzati per satelliti stabilizzati sui tre assi per i quali risulta ammissibile l'approssimazione per piccoli angoli. Va detto però che essi non sono così pratici per i computi quanto altri parametri che verranno introdotti tra poco (i quaternioni).

Per definire gli angoli di Eulero si consideri un primo sistema di riferimento inerziale RC ed una rotazione, di angolo φ attorno ad un asse (1, 2 o 3, a seconda della particolare trasformazione). Si considera una seconda rotazione del nuovo riferimento, di un angolo ϑ attorno all'asse 1, 2 o 3, ed infine una terza rotazione attorno ad un asse di un angolo ψ , che porta quest'ultimo riferimento a coincidere con il riferimento finale RI . Dovendo iterare queste tre trasformazioni, l'orientamento di RI rispetto a RC si può esprimere mediante la matrice dei coseni direttori

$$\mathcal{R}_{bi} = \mathcal{R}_{ijk}(\varphi, \vartheta, \psi) = \mathcal{R}_k(\psi)\mathcal{R}_j(\vartheta)\mathcal{R}_i(\varphi),$$

con la prima matrice di rotazione sulla destra e l'ultima sulla sinistra⁶.

La sequenza degli assi attorno ai quali avvengono le rotazioni denota il tipo di rotazione. Una delle più usate è la sequenza 3-1-3, per la quale

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{313}(\varphi, \vartheta, \psi) &= \mathcal{R}_3(\psi)\mathcal{R}_1(\vartheta)\mathcal{R}_3(\varphi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \vartheta \sin \psi \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi + \cos \vartheta \sin \psi \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \psi \cos \varphi - \cos \vartheta \cos \psi \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \vartheta \cos \psi \cos \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nota $\mathcal{R}_{313}(\varphi, \vartheta, \psi)$ è possibile calcolare gli angoli di Eulero 3-1-3 (r_{ij} indicano gli elementi di \mathcal{R}_{313})

$$\vartheta = \arccos r_{33}, \quad \varphi = -\arctan \frac{r_{31}}{r_{32}}, \quad \psi = \arctan \frac{r_{13}}{r_{23}}.$$

Si ha una indeterminazione nel valore di ϑ ($\vartheta \in [-\pi, 0)$ ovvero $\vartheta \in [0, \pi)$); una volta risolta, restano univocamente determinati φ e ψ . Se però ϑ è un multiplo di π allora rimangono determinate solo la somma o la differenza di φ e ψ , a seconda che ϑ sia un multiplo pari o dispari di π . Usualmente in tali casi si prende $\sin \vartheta \geq 0$ o $0 \leq \vartheta < \pi$.

Un'altra sequenza utilizzata di frequente è la 3-1-2 (sequenza “yaw, roll, pitch” – imbardata, rollio, beccheggio), per la quale

$$\mathcal{R}_{312}(\varphi, \vartheta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \vartheta \sin \psi \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi + \sin \vartheta \sin \psi \cos \varphi & -\cos \vartheta \sin \psi \\ -\cos \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \\ \sin \psi \cos \varphi + \sin \vartheta \cos \psi \sin \varphi & \sin \psi \sin \varphi - \sin \vartheta \cos \psi \cos \varphi & \cos \vartheta \cos \psi \end{pmatrix}$$

e

$$\vartheta = \arcsin r_{23}, \quad \varphi = -\arctan \frac{r_{21}}{r_{22}}, \quad \psi = -\arctan \frac{r_{13}}{r_{33}}.$$

⁴Tralasciando la definizione formale, uno spazio vettoriale è un insieme X di elementi detti *vettori* con un insieme di coefficienti, assieme a due operazioni (dette addizione tra vettori e moltiplicazione dei coefficienti con i vettori). Valgono una serie di proprietà (che sono quelle che valgono per i comuni vettori introdotti ad esempio nei corsi di Fisica). Ad esempio la combinazione lineare $\alpha v_1 + \beta v_2$ di due vettori mediante due coefficienti α, β è ancora un vettore.

Un sottospazio vettoriale Y è uno spazio vettoriale in cui Y è un sottinsieme di X e valgono le stesse operazioni di somma e moltiplicazione viste per X .

⁵Il sottospazio generato da v è, informalmente, l'insieme dei vettori αv ottenuti moltiplicando v per una costante, positiva o negativa.

⁶I pedici “*bi*” di \mathcal{R} stanno ad indicare “inertial \rightarrow body”, ossia da RC (sistema inerziale) a RI (sistema solidale con il satellite, altrimenti detto “body”).

Anche in questo caso si ha un'indeterminazione di ϑ ($\vartheta \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup [\frac{\pi}{2}, \pi)$ ovvero $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), a meno che ϑ sia un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$, nel qual caso usualmente si prende $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, che dà $\cos \vartheta \geq 0$. È chiaro che il vantaggio dell'uso di questa sequenza risiede specialmente nel fatto di avere un'immediata interpretazione fisica. Inoltre nel caso di angoli di rotazione piccoli, dalla sequenza 3-1-2 si ottiene la seguente approssimazione

$$\mathcal{R}_{312}(\varphi, \vartheta, \psi) \simeq \begin{pmatrix} 1 & \varphi & -\psi \\ -\varphi & 1 & \vartheta \\ \psi & -\vartheta & 1 \end{pmatrix},$$

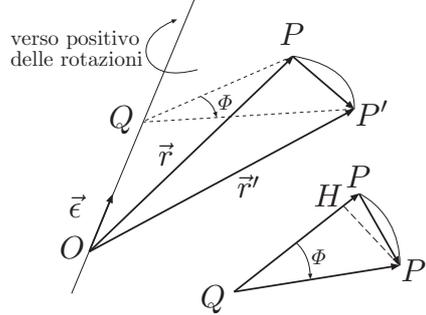
in cui gli angoli sono misurati in radianti.

Tutte le possibili sequenze di rotazioni sono 12 (non si considerano due rotazioni successive attorno ad uno stesso asse, equivalenti a una singola rotazione attorno a tale asse, e le rotazioni multiple di 2π)

$$313, 212, 121, 323, 232, 131, 312, 213, 123, 321, 231, 132,$$

e a causa dell'ambiguità in ϑ , ci sono 24 possibili sequenze di rotazioni.

Determiniamo l'espressione della matrice dei coseni direttori $\mathcal{R}(\Phi)$ che definisce una rotazione di un angolo Φ attorno all'asse di rotazione generico, ossia attorno all'asse di *Eulero*, di versore $\vec{e} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix}$, passante per l'origine del sistema di riferimento RC (punto fisso). In base a quanto detto prima, l'angolo Φ viene considerato positivo se in senso *orario* rispetto al versore \vec{e} (ossia con la convenzione opposta a quella della mano destra). Infatti, per ciò che è stato già spiegato, questo corrisponde ad una rotazione di RT positiva se in senso antiorario (regola della mano destra).



Dopo la rotazione il vettore \vec{r} si trasforma nel vettore \vec{r}' dato da:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \overrightarrow{PP'} = \vec{r} + \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HP'},$$

con:

$$\overrightarrow{QP} = -\vec{e} \times (\vec{e} \times \overrightarrow{OP}) = -\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r})$$

$$\overrightarrow{PH} = -(1 - \cos \Phi) \overrightarrow{OP} = (1 - \cos \Phi) \vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r})$$

$$\overrightarrow{HP'} = -|\overrightarrow{QP'}| \sin \Phi \frac{\vec{e} \times \overrightarrow{QP}}{|\overrightarrow{QP}|} = -\sin \Phi \vec{e} \times \overrightarrow{OP} = -\sin \Phi \vec{e} \times \vec{r}$$

Adottando la cosiddetta rappresentazione diadica, che permette di scrivere il prodotto vettoriale tra

vettori come prodotto di matrici ($\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \tilde{v}_1 v_2$)

$$\begin{aligned}\vec{\epsilon} \times &= \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & 0 & -\epsilon_1 \\ -\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{rappresentazione diadica di } \vec{\epsilon} \\ \vec{\epsilon} \times \vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & 0 & -\epsilon_1 \\ -\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ \vec{\epsilon} \times (\vec{\epsilon} \times \vec{v}) &= \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & 0 & -\epsilon_1 \\ -\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) & \epsilon_1 \epsilon_2 & \epsilon_1 \epsilon_3 \\ \epsilon_1 \epsilon_2 & -(\epsilon_1^2 + \epsilon_3^2) & \epsilon_2 \epsilon_3 \\ \epsilon_1 \epsilon_3 & \epsilon_2 \epsilon_3 & -(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

si ottiene

$$r' = \mathcal{R}(\Phi)r = \left[I + (1 - \cos\Phi) \tilde{\epsilon}^2 - \sin\Phi \tilde{\epsilon} \right] r = \mathcal{R}(\Phi)r$$

con

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{bi} = \mathcal{R}(\Phi) &= I + (1 - \cos\Phi) \tilde{\epsilon}^2 - \sin\Phi \tilde{\epsilon} \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon_1^2 + (\epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) \cos\Phi & \epsilon_1 \epsilon_2 (1 - \cos\Phi) + \epsilon_3 \sin\Phi & \epsilon_1 \epsilon_3 (1 - \cos\Phi) - \epsilon_2 \sin\Phi \\ \epsilon_1 \epsilon_2 (1 - \cos\Phi) - \epsilon_3 \sin\Phi & \epsilon_2^2 + (\epsilon_1^2 + \epsilon_3^2) \cos\Phi & \epsilon_1 \epsilon_3 (1 - \cos\Phi) + \epsilon_1 \sin\Phi \\ \epsilon_1 \epsilon_3 (1 - \cos\Phi) + \epsilon_2 \sin\Phi & \epsilon_1 \epsilon_3 (1 - \cos\Phi) - \epsilon_1 \sin\Phi & \epsilon_3^2 + (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) \cos\Phi \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(per il significato di \mathcal{R}_{bi} si veda nota 6.) Questa è una *parametrizzazione mediante l'asse di Eulero*, che dipende da tre parametri, ossia dalle tre componenti del versore dell'asse, legate dalla relazione $\|\tilde{\epsilon}\| = 1$, e dall'angolo Φ .

Poiché $\tilde{\epsilon} \epsilon = 0$, è immediato verificare che $\vec{\epsilon}$ individua l'asse di rotazione

$$\mathcal{R}(\Phi)\vec{\epsilon} = \left[I + (1 - \cos\Phi) \tilde{\epsilon}^2 - \sin\Phi \tilde{\epsilon} \right] \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon},$$

ossia $\vec{\epsilon}$ è l'autovettore con autovalore unitario di $\mathcal{R}(\Phi)$, posseduto da ogni matrice reale propria ortogonale 3×3 come $\mathcal{R}(\Phi)$. Questa relazione dice quindi che $\vec{\epsilon}$ non viene cambiato dalla matrice della rotazione $\mathcal{R}(\Phi)$, e che $\vec{\epsilon}$ ha le stesse componenti sia nel sistema di riferimento inerziale RC sia nel sistema di riferimento RI solidale col corpo.

Come già anticipato, gli angoli di Eulero non sono così pratici per i calcoli quanto altri parametri che verranno introdotti tra poco (i quaternioni). In effetti le equazioni differenziali che soddisfano hanno dei punti di singolarità, ed inoltre la loro implementazione su calcolatore (necessaria a bordo di un satellite se si vuole determinare l'assetto e per effettuare altri calcoli) occorre determinare varie funzioni trigonometriche.

Ad esempio, nel caso di sequenza 3-1-3, si potrebbe mostrare che φ , ϑ , ψ soddisfano le equazioni

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= (\omega_2 \cos\psi + \omega_1 \sin\psi) \csc\vartheta = (\omega_2 \cos\psi + \omega_1 \sin\psi) \frac{1}{\sin\vartheta} \\ \dot{\vartheta} &= \omega_1 \cos\psi - \omega_2 \sin\psi \\ \dot{\psi} &= \omega_3 - (\omega_2 \cos\psi + \omega_1 \sin\psi) \cot\vartheta = \omega_3 - (\omega_2 \cos\psi + \omega_1 \sin\psi) \frac{1}{\tan\vartheta}\end{aligned}$$

con $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ la velocità angolare del corpo rigido. Per inciso queste relazioni mostrano che ω_1 , ω_2 , ω_3 non sono pari alle derivate degli angoli di Eulero.

1.1.2 I quaternioni

I *parametri simmetrici di Eulero* o *quaternioni unitari* furono introdotti per descrivere il moto di un corpo rigido da Whittaker nel 1937. Considerando l'angolo Φ che definisce la rotazione da RC a $R\Gamma$ attorno all'asse di Eulero, individuato dal versore $\epsilon = (\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3)^T$, i quaternioni sono definiti dalle relazioni

$$q_0 = \cos \frac{\Phi}{2}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} \sin \frac{\Phi}{2} = \epsilon \sin \frac{\Phi}{2}$$

e verificano l'equazione di vincolo

$$\left\| \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right\|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

Poiché

$$\sin \Phi = 2 \cos \frac{\Phi}{2} \sin \frac{\Phi}{2}, \quad \cos \Phi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\Phi}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos \Phi = 2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}$$

si ha

$$\mathcal{R}_{bi} = \mathcal{R}(\Phi) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

in cui I è la matrice identità, che definisce quindi la rotazione di un angolo Φ , positiva se in verso orario, attorno all'asse di Eulero di versore $\vec{\epsilon}$, passante per l'origine del sistema di riferimento RC (punto fisso).

La precedente espressione è stata ottenuta utilizzando la relazione di vincolo, e mostra in maniera immediata che l'asse di rotazione è quello individuato da $\vec{\epsilon}$. Infatti si noti che si poteva anche scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{bi} = \mathcal{R}(\Phi) &= I + (1 - \cos \Phi) \vec{\epsilon}^2 - \sin \Phi \vec{\epsilon} \\ &= I + 2 \sin^2 \frac{\Phi}{2} \vec{\epsilon}^2 - 2 \cos \frac{\Phi}{2} \sin \frac{\Phi}{2} \vec{\epsilon} \\ &= I + 2\tilde{q}^2 - 2q_0\tilde{q} \\ &= I - 2(q_0I - \tilde{q})\tilde{q} \\ &= I - 2R^T(q_0, q)\tilde{q} \end{aligned}$$

ove

$$R(q_0, q) = q_0I + \tilde{q}.$$

Da questo, e considerando che $\tilde{q}q = 0$, è immediato ritrovare che ϵ è un autovettore, in quanto

$$\mathcal{R}_{bi}q = q - 2R(q_0, q)\tilde{q}q = q$$

ove q ed il versore ϵ dell'asse di Eulero sono paralleli.

La matrice dei coseni direttori $\mathcal{R}(\Phi)$ diventa una delle matrici $\mathcal{R}_i(\Phi)$ viste prima quando il versore ϵ giace lungo l'asse i . Se ad esempio $i = 1$ si ha

$$q_0 = \cos \frac{\Phi}{2}, \quad q_1 = \epsilon_1 \sin \frac{\Phi}{2} = \sin \frac{\Phi}{2}, \quad q_2 = \epsilon_2 \sin \frac{\Phi}{2} = 0, \quad q_3 = \epsilon_3 \sin \frac{\Phi}{2} = 0$$

e quindi, essendo $q_0^2 + q_1^2 = 1$, $q_0^2 - q_1^2 = \cos \Phi$, $2q_0q_1 = \sin \Phi$, si ha

$$\mathcal{R}_{bi} = \mathcal{R}_1(\Phi) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & q_0^2 - q_1^2 & 2q_0q_1 \\ 0 & -2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix}.$$

Se la matrice di rotazione $\mathcal{R}(\Phi)$ è nota numericamente, è possibile determinare il versore ϵ e l'angolo di rotazione Φ . Si osserva infatti che se $\text{sen } \Phi \neq 0$, ossia se

$$\Phi \neq h\pi, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

allora

$$\epsilon_1 = \frac{r_{23} - r_{32}}{2 \text{sen } \Phi}, \quad \epsilon_2 = \frac{r_{31} - r_{13}}{2 \text{sen } \Phi}, \quad \epsilon_3 = \frac{r_{12} - r_{21}}{2 \text{sen } \Phi}$$

con r_{ij} gli elementi di $\mathcal{R}(\Phi)$, e dove l'angolo di rotazione è calcolabile a partire dalla traccia di $\mathcal{R}(\Phi)$

$$\text{tr}[\mathcal{R}(\Phi)] = 1 + 2 \cos \Phi,$$

per cui

$$\Phi = \arccos \frac{\text{tr}[\mathcal{R}(\Phi)] - 1}{2},$$

in cui si considera $\Phi \in [-\pi, \pi)$. Si noti che si ottengono due valori per l'angolo di rotazione

$$\Phi \in [-\pi, 0) \quad \text{ovvero} \quad \Phi \in [0, \pi).$$

Inoltre sempre dalla matrice $\mathcal{R}(\Phi)$ è possibile ricavare il valore dei quaternioni. Infatti essi sono calcolabili mediante uno dei seguenti quattro gruppi di relazioni

1° gruppo

$$\begin{aligned} q_0 &= \pm \frac{1}{2} \left[1 + r_{11} + r_{22} + r_{33} \right]^{\frac{1}{2}} \\ q_1 &= \frac{1}{4q_0} (r_{23} - r_{32}) \\ q_2 &= \frac{1}{4q_0} (r_{31} - r_{13}) \\ q_3 &= \frac{1}{4q_0} (r_{12} - r_{21}) \end{aligned}$$

2° gruppo

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{4q_1} (r_{23} - r_{32}) \\ q_1 &= \pm \frac{1}{2} \left[1 + r_{11} - r_{22} - r_{33} \right]^{\frac{1}{2}} \\ q_2 &= \frac{1}{4q_1} (r_{12} + r_{21}) \\ q_3 &= \frac{1}{4q_1} (r_{13} + r_{31}) \end{aligned}$$

3° gruppo

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{4q_2} (r_{31} - r_{13}) \\ q_1 &= \frac{1}{4q_2} (r_{12} + r_{21}) \\ q_2 &= \pm \frac{1}{2} \left[1 - r_{11} + r_{22} - r_{33} \right]^{\frac{1}{2}} \\ q_3 &= \frac{1}{4q_2} (r_{23} + r_{32}) \end{aligned}$$

4° gruppo

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{4q_3} (r_{21} - r_{12}) \\ q_1 &= \frac{1}{4q_3} (r_{13} + r_{31}) \\ q_2 &= \frac{1}{4q_3} (r_{23} + r_{32}) \\ q_3 &= \pm \frac{1}{2} \left[1 - r_{11} - r_{22} + r_{33} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

In tali espressioni vi è una ambiguità di segno. Si nota però dall'espressione di $\mathcal{R}(\Phi)$ che, cambiando simultaneamente i segni di tutti e quattro i parametri simmetrici di Eulero, la matrice dei coseni direttori non cambia. Ciò corrisponde a cambiare di segno all'angolo di rotazione e al versore. La rotazione così ottenuta è uguale alla precedente. Dunque si ottengono valori equivalenti.

Infatti $\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -q_0 \\ -q \end{pmatrix}$ descrivono lo stesso orientamento, ma se $\Phi \in [-\pi, \pi)$ allora q_0 è non negativo e la rappresentazione dei quaternioni è unica. Si noti inoltre che se $\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$ è il quaternionione che rappresenta

l'orientamento di RF rispetto a RC , allora $\begin{pmatrix} q_0 \\ -q \end{pmatrix}$ rappresenta quello di RC relativamente a RF .

Questi quattro modi di calcolare i parametri simmetrici di Eulero a partire dalla matrice dei coseni direttori $\mathcal{R}(\Phi)$ sono matematicamente equivalenti; ovviamente le inaccuratezze numeriche possono essere minimizzate evitando di utilizzare quel gruppo di equazioni in cui il parametro al denominatore è prossimo allo zero⁷.

⁷Un altro metodo per calcolare i parametri simmetrici di Eulero a partire dalla matrice dei coseni direttori $A(\Phi)$ è contenuto in A. R. Klumpp, Singularity-Free Extraction of a Quaternion from a Direction Cosine Matrix, *Journal of Spacecraft*, Vol. 13, pp. 754-755, 1976.

Infine è possibile determinare i quaternioni a partire dagli angoli di Eulero 3-1-3 mediante le relazioni

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2} & q_2 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \\ q_1 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2} & q_3 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \end{aligned}$$

ottenute confrontando l'espressione di $\mathcal{R}_{313}(\varphi, \vartheta, \psi)$ con quella di $\mathcal{R}(\Phi)$. Se poi si considerano piccoli angoli di Eulero nella rotazione, allora i quaternioni sono legati agli angoli di Eulero dalle relazioni

$$q_0 \simeq 1, \quad q_1 \simeq \frac{\vartheta}{2}, \quad q_2 \simeq \frac{\psi}{2}, \quad q_3 \simeq \frac{\varphi}{2}.$$

Se quindi $\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$ definisce l'assetto, ossia l'orientamento, di un satellite solidale al riferimento RF (b="body") rispetto ad un riferimento inerziale RC (i="inertial"), la matrice che descrive la rotazione che porta RC a coincidere con il riferimento RF solidale con il satellite è data da \mathcal{R}_{bi} . È chiaro che si può parlare indistintamente di rotazione (che porta RC a coincidere con RF) ovvero di quaternioni corrispondente.

Vogliamo ora determinare le equazioni differenziali che devono essere soddisfatte dai quaternioni (q_0, q) che descrivono l'assetto di un satellite. Per far ciò consideriamo i quaternioni

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_0 \\ e \end{pmatrix}$$

che rappresentano due rotazioni, definite dalle matrici $\mathcal{R}(q_0, q)$, $\mathcal{R}(e_0, e)$. Mentre \mathbf{q} porta RC a coincidere con RF , si supponga che \mathbf{e} porti RF a coincidere con RF_r .

La rotazione definita dal prodotto $\mathcal{R}(e_0, e)\mathcal{R}(q_0, q)$ sia rappresentata da un quaternioni \mathbf{q}_r , che porta RC a coincidere con RF_r . L'espressione di \mathbf{q}_r può essere determinata dall'uguaglianza

$$\mathcal{R}(e_0, e)\mathcal{R}(q_0, q) = (I - 2R(e_0, e)\tilde{e})(I - 2R(q_0, q)\tilde{q}) \stackrel{\Delta}{=} I - 2R(q_{r0}, q_r)\tilde{q}_r = \mathcal{R}(q_{r0}, q_r).$$

Tediosi calcoli portano alla seguente espressione

$$\begin{pmatrix} q_{r0} \\ q_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & -q^T \\ q & q_0I + \tilde{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & -e^T \\ e & e_0I - \tilde{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Da tale espressione si trova⁸

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & q^T \\ -q & q_0I - \tilde{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{r0} \\ q_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{r0} & q_r^T \\ q_r & -q_{r0}I + \tilde{q}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}.$$

A questa relazione si può giungere considerando l'algebra dei quaternioni. Un quaternioni può essere visto come un numero iperimmaginario

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k = \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix},$$

ove i, j, k sono tali che

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned}$$

e dove q_0 è la parte reale o scalare, e $q = q_1i + q_2j + q_3k$ è la parte immaginaria o vettoriale.

⁸Le matrici che moltiplicano $\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} e_0 \\ e \end{pmatrix}$ sono ortogonali.

La *moltiplicazione* di due quaternioni \mathbf{q} , \mathbf{e} è definita come per i numeri complessi, ad eccezione del fatto che i prodotti di i , j , k non sono commutativi:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_r = \mathbf{q}\mathbf{e} &= (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(e_0 + e_1i + e_2j + e_3k) = \\ &= (q_0e_0 - q_1e_1 - q_2e_2 - q_3e_3) + \\ &\quad + (q_0e_1 + q_1e_0 + q_2e_3 - q_3e_2)i + \\ &\quad + (q_0e_2 - q_1e_3 + q_2e_0 + q_3e_1)j + \\ &\quad + (q_0e_3 + q_1e_2 - q_2e_1 + q_3e_0)k = (e_0q_0 - e^Tq, e_0q + q_0e - \tilde{e}q) \end{aligned}$$

e utilizzando la notazione matriciale si ottiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_{r0} \\ \mathbf{q}_r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0e_0 - q_1e_1 - q_2e_2 - q_3e_3 \\ q_0e_1 + q_1e_0 + q_2e_3 - q_3e_2 \\ q_0e_2 - q_1e_3 + q_2e_0 + q_3e_1 \\ q_0e_3 + q_1e_2 - q_2e_1 + q_3e_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_0 & -q^T \\ \mathbf{q} & q_0I + \tilde{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & -e^T \\ \mathbf{e} & e_0I - \tilde{\mathbf{e}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se \mathbf{q} ed \mathbf{e} rappresentano due rotazioni, definite dalle matrici \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 , la rotazione definita dal prodotto $\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ è rappresentata da un quaternion \mathbf{q}_r , che risulta essere pari a $\mathbf{q}\mathbf{e}$. Si noti il differente ordine di moltiplicazione dei quaternioni rispetto a quello delle matrici a cui corrispondono:

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}_r) = \mathcal{R}_2(\mathbf{e})\mathcal{R}_1(\mathbf{q}) \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{q}_r = \mathbf{q}\mathbf{e}.$$

Il quaternion $\begin{pmatrix} e_0 \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}$ descrive l'errore d'assetto tra $R\Gamma_r$ ed $R\Gamma$. È ovvio che l'errore $\begin{pmatrix} \bar{e}_0 \\ \bar{\mathbf{e}} \end{pmatrix}$ tra $R\Gamma$ e $R\Gamma_r$ è

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_0 \\ \bar{\mathbf{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & q^T \\ \mathbf{q} & -q_0I + \tilde{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{r0} \\ \mathbf{q}_r \end{pmatrix}$$

e si ricava ponendo $\bar{e}_0 = e_0$, $\bar{\mathbf{e}} = -\mathbf{e}$. Infatti questo corrisponde ad effettuare la stessa rotazione ma attorno ad un versore che è l'opposto del precedente

$$e_0 = \cos \frac{\Phi_e}{2} = \bar{e}_0, \quad \mathbf{e} = \epsilon_e \text{sen} \frac{\Phi_e}{2} = -(-\epsilon_e) \text{sen} \frac{\Phi_e}{2} = -\bar{\mathbf{e}}.$$

Determiniamo ora le equazioni dinamiche soddisfatte dai quaternioni (q_0, \mathbf{q}) . Consideriamo gli assetti di un corpo rigido rispetto ad un sistema di riferimento inerziale RC al tempo t e al tempo $t + \Delta t$ (riferimenti $R\Gamma_t$ e $R\Gamma_{t+\Delta t}$), determinati dai quaternioni

$$\begin{pmatrix} q_0(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_0(t + \Delta t) \\ \mathbf{q}(t + \Delta t) \end{pmatrix}.$$

Sia poi

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Delta\Phi_e}{2} \\ \epsilon_e \text{sen} \frac{\Delta\Phi_e}{2} \end{pmatrix}$$

il quaternion che rappresenta l'assetto del corpo al tempo $t + \Delta t$ rispetto all'assetto che il corpo ha al tempo t (ossia di $R\Gamma_{t+\Delta t}$ rispetto a $R\Gamma_t$), ove $\Delta\Phi_e = \Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)$ è la rotazione necessaria per portare $R\Gamma_t$ a coincidere con $R\Gamma_{t+\Delta t}$ e supposta avvenire in un tempo Δt , ed ϵ_e è il versore dell'asse di Eulero attorno al quale avviene la rotazione $\Delta\Phi_e$, espresso in $R\Gamma_t$. Per quanto visto

$$\begin{pmatrix} q_0(t + \Delta t) \\ \mathbf{q}(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & -e^T \\ \mathbf{e} & e_0I - \tilde{\mathbf{e}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Delta\Phi_e}{2} & -\epsilon_e^T \text{sen} \frac{\Delta\Phi_e}{2} \\ \epsilon_e \text{sen} \frac{\Delta\Phi_e}{2} & \cos \frac{\Delta\Phi_e}{2} I - \tilde{\epsilon}_e \text{sen} \frac{\Delta\Phi_e}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{pmatrix}$$

e indicando con

$$|\omega(t)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi_e}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} = \frac{d\Phi}{dt}, \quad \omega(t) = \epsilon_e |\omega(t)|$$

il modulo ed il vettore della velocità angolare, e utilizzando le approssimazioni per i piccoli angoli

$$\cos \frac{d\Phi}{2} \approx 1, \quad \text{sen} \frac{d\Phi}{2} \approx \frac{d\Phi}{2} = \frac{1}{2} |\omega| dt,$$

si ha

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_0(t+dt) \\ q(t+dt) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon_e^T \frac{1}{2} |\omega(t)| dt \\ \epsilon_e \frac{1}{2} |\omega(t)| dt & I - \tilde{\epsilon}_e \frac{1}{2} |\omega(t)| dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T(t) dt \\ \omega(t) dt & -\tilde{\omega}(t) dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_0(t+dt) - q_0(t)}{dt} \\ \frac{q(t+dt) - q(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q_0(t+\Delta t) - q_0(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T(t) \\ \omega(t) & -\tilde{\omega}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mathcal{Q}^T(q_0, q) \omega$$

con

$$\mathcal{Q}(q_0, q) = \begin{pmatrix} -q & R^T(q_0, q) \end{pmatrix}, \quad R(q_0, q) = q_0 I + \tilde{q}.$$

Si noti che ω è espressa nel sistema di riferimento solidale con il satellite, ossia in $RF = R\Gamma_t$. Quindi anche *le equazioni cinematiche sono espresse in RF* . Conviene scrivere queste equazioni in RF perché in tale riferimento, solidale con il corpo rigido, il momento d'inerzia del satellite è costante, come sarà meglio chiarito quando verranno derivate le equazioni dinamiche.

Si noti per inciso una cosa interessante, già precedentemente accennata. Osservando che la matrice $\mathcal{Q}^T(q_0, q)$ è invertibile a sinistra, ossia che

$$M \mathcal{Q}^T(q_0, q) = I_{4 \times 4}$$

con $I_{4 \times 4}$ la matrice identità 4×4 , e con M pari proprio a $\mathcal{Q}(q_0, q)$, si ricava la velocità angolare del satellite nel riferimento RF

$$\omega = 2 \mathcal{Q}(q_0, q) \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix}.$$

Come già osservato, la velocità angolare non è pari alla derivata dei quaternioni. Infatti si nota la moltiplicazione per $\mathcal{Q}(q_0, q)$, che dipende da (q_0, q) . Questo è un risultato più generale: contrariamente a quanto avviene nel piano, in generale non esistono dei parametri che, derivati, siano pari alla velocità angolare.

Questa descrizione della cinematica è più appropriata quando si tratta di manovre “punto-punto”, che comportino una rotazione con $\Phi \in [-\pi, \pi)$, poiché il quaternion (q_0, q) , esprime l'errore tra l'assetto attuale e quello desiderato, dato da $(q_{r0} = 1, q_r = 0)$. È ovvio che in questo caso i quaternioni (q_0, q) assumono il significato di *errore di assetto rispetto all'assetto desiderato*.

I vantaggi di usare una tale parametrizzazione, non minima, rispetto ad una minima come gli angoli di Eulero si possono così riassumere

1. assenza di singolarità geometriche nelle equazioni differenziali (al contrario di quanto succede per gli angoli di Eulero);
2. la matrice di assetto è algebrica e non dipende da funzioni trascendenti;

3. in caso di successioni di rotazioni si può usare la semplice regola di moltiplicazione di quaternioni;
4. un cambio d'assetto è ottenuta con una singola rotazione attorno un asse appropriato (di Eulero), ottimizzando tempi e consumi.

Nel caso di inseguimento di un'assetto desiderato la cinematica può essere descritta in termini di quaternioni d'errore

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mathcal{Q}^T(e_0, e) \omega_e$$

con $\omega_e = \omega - \omega_r$ la velocità angolare d'errore, ossia la differenza tra quella del corpo rigido ω e quella del riferimento. Si noti che quest'ultima deve essere espressa in RI , come ω , e vale

$$\omega_r = \mathcal{R}(q_0, q) \mathcal{R}^T(q_{r0}, q_r) \mu(q_r, \dot{q}_r) = \left(I - 2R^T(q_0, q) \tilde{q} \right) \left(I - 2R^T(q_{r0}, q_r) \tilde{e} \right)^T \mu(q_r, \dot{q}_r)$$

con $\mu(q_r, \dot{q}_r)$ la velocità angolare di riferimento espressa in RI_r (il sistema di riferimento desiderato), che può esser calcolata da

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_{r0} \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mathcal{Q}^T(q_{r0}, q_r) \mu(q_r, \dot{q}_r) \Rightarrow \mu(q_r, \dot{q}_r) = 2\mathcal{Q}(q_{r0}, q_r) \begin{pmatrix} \dot{q}_{r0} \\ \dot{q}_r \end{pmatrix}.$$

Esistono varie altre parametrizzazioni dell'assetto. Tra le altre ricordiamo quella mediante il vettore di Gibbs⁹.

La matrice dei coseni direttori può anche essere parametrizzata per mezzo del vettore di Gibbs¹⁰, definito dalle relazioni

$$\begin{aligned} g_1 &= \epsilon_1 \tan \frac{\Phi}{2} = \frac{q_1}{q_0} \\ g_2 &= \epsilon_2 \tan \frac{\Phi}{2} = \frac{q_2}{q_0} \\ g_3 &= \epsilon_3 \tan \frac{\Phi}{2} = \frac{q_3}{q_0} \end{aligned}$$

sicché la matrice dei coseni direttori assume la forma

$$\mathcal{R}(\Phi) = \frac{1}{1 + g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} \begin{pmatrix} 1 + g_1^2 - g_2^2 - g_3^2 & 2(g_1g_2 + g_3) & 2(g_1g_3 - g_2) \\ 2(g_1g_2 - g_3) & 1 - g_1^2 + g_2^2 - g_3^2 & 2(g_2g_3 + g_1) \\ 2(g_1g_3 + g_2) & 2(g_2g_3 - g_1) & 1 - g_1^2 - g_2^2 + g_3^2 \end{pmatrix}.$$

Il vettore di Gibbs non è molto usato perché diventa infinito per Φ che tende a $\pi + 2h\pi$, $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Le componenti del vettore di Gibbs si possono ricavare a partire dalla matrice dei coseni direttori $\mathcal{R}(\Phi)$

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{r_{23} - r_{32}}{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \\ g_2 &= \frac{r_{31} - r_{13}}{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \\ g_3 &= \frac{r_{12} - r_{21}}{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}. \end{aligned}$$

Si noti che non ci sono ambiguità di segno e che tali parametri sono tra loro indipendenti.

Date due rotazioni indipendenti, corrispondenti ai vettori g e g_e , il vettore di Gibbs relativo al prodotto delle due rotazioni vale

$$g_r = \frac{g + g_e + \tilde{g}g_e}{1 - g^T g_e},$$

com'è facile ricavare da

$$\frac{q_r}{q_{r0}} = \frac{e_0q + q_0e + \tilde{q}e}{e_0q_0 - q^T e}$$

ponendo

$$g = \frac{q}{q_0}, \quad g_r = \frac{q_r}{q_{r0}}, \quad g_e = \frac{e}{e_0}.$$

⁹Per approfondimenti si veda J. Wertz, Editor, *Spacecraft Attitude Determination and Control*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland, 1978, Paragrafo 12, pag. 410.

¹⁰Gibbs nel 1901 lo chiamò "vettore semitangente di versione". Nel 1843, prima dell'introduzione della nozione vettoriale, Cayley usò le tre componenti e accreditò la loro introduzione a Rodriguez.

1.2 Le equazione dinamiche

L'equazione dinamica di un satellite rigido può essere ottenuta considerando la regola di derivazione di un vettore in un sistema di riferimento rotante rispetto ad uno inerziale. Si ricorda che se v è un vettore di RF che ruota rispetto a RC con una velocità angolare ω , la relazione esistente tra la sua derivata $\frac{dv}{dt}$ come vettore¹¹ di RC (derivata assoluta) e quella \dot{v} come vettore di RF (derivata relativa) è data dalla legge di Poisson

$$\frac{dv}{dt} = \dot{v} + \omega \times v = \dot{v} + \tilde{\omega}v$$

avendo utilizzato la rappresentazione diadica di ω . Intuitivamente questa relazione può essere giustificata dal fatto che v , come vettore solidare a RF , varia in RC sia perché il suo modulo varia nel tempo, sia perché ruota in quanto ruota RF rispetto ad RC (sicché la derivata $\frac{dv}{dt}$ è non nulla anche se in RF il vettore non varia, ossia anche se $\dot{v} = 0$).

Si comprende come l'unico vettore per il quale la derivata assoluta è uguale a quella relativa è proprio ω .

Le equazioni dinamiche si derivano considerando l'espressione del momento angolare totale L_{tot} del satellite, espressa in RF . Considerando il satellite costituito da un corpo principale (main body) attuato con gas jets e reaction wheels

$$L_{tot} = L_{mb} + L_r.$$

Mentre $L_{mb} = J_{mb}\omega$ è il momento angolare dovuto al fatto che il main body (avente momento d'inerzia J_{mb} in RF) ruota con velocità ω , $L_r = J_r(\omega + \Omega)$ è il momento angolare dovuto al fatto che le reaction wheels (aventi momento d'inerzia J_r in RF) ruotano con velocità $\omega + \Omega$. Si sottolinea che tutti i momenti d'inerzia sono espressi nella terna RF , in cui sono costanti. Dunque

$$L_{tot} = J_{mb}\omega + J_r(\omega + \Omega) = (J_{mb} + J_r)\omega + J_r\Omega = J_{tot}\omega + J_r\Omega$$

con J_{tot} la matrice d'inerzia (simmetrica) (3×3) dell'intera struttura

$$J_{tot} = J_{mb} + J_r.$$

Poiché L_{tot} è espresso in RF

$$\dot{L}_{tot} + \tilde{\omega}L_{tot} = \frac{dL_{tot}}{dt} = u$$

ove, per la seconda equazione cardinale, la derivata assoluta $\frac{dL_{tot}}{dt}$ è pari alla sommatoria u dei momenti esterni agenti sulla struttura. Tipicamente u è pari alla somma del momento u_g dovuto ai gas jets¹² e di quello d dovuti ai disturbi ambientali

$$\dot{L}_{tot} + \tilde{\omega}L_{tot} = \frac{dL_{tot}}{dt} = u_g + d$$

e quindi la derivata di L_{tot} in RF vale

$$\dot{L}_{tot} = -\tilde{\omega}L_{tot} + u_g + d.$$

Sostituendovi l'espressione di L_{tot} , in cui i momenti d'inerzia sono costanti, si ha

$$J_{tot}\dot{\omega} + J_r\dot{\Omega} = J_{mb}\dot{\omega} + u_r = -\tilde{\omega}(J_{tot}\omega + J_r\Omega) + u_g + d$$

¹¹Più precisamente occorrerebbe considerare l'immagine di v in RC . Per evitare appesantimento della notazione questo secondo vettore continuerà ad essere indicato v .

¹²Il momento \bar{u}_r scambiato tra main body e reaction wheels è un momento di forze interne e non deve apparire.

in cui si è posto per definizione

$$u_r := J_r(\dot{\omega} + \dot{\Omega}).$$

Pertanto si ricava

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= J_{mb}^{-1} \left[-\tilde{\omega}(J_{tot}\omega + J_r\Omega) + u_g - u_r + d \right] \\ \dot{\Omega} &= J_r^{-1}u_r - \dot{\omega} \\ &= -J_{mb}^{-1} \left[-\tilde{\omega}(J_{tot}\omega + J_r\Omega) + u_g - u_r + d \right] + J_r^{-1}u_r \\ &= -J_{mb}^{-1} \left[-\tilde{\omega}(J_{tot}\omega + J_r\Omega) + u_g - J_{tot}J_r^{-1}u_r + d \right].\end{aligned}$$

Il termine

$$-\tilde{\omega}(J_{tot}\omega + J_r\Omega)$$

viene chiamato termine giroscopico.

Il modello matematico del satellite rigido può essere scritto equivalentemente utilizzando la variabile $\xi = L_{tot} = J_{tot}\omega + J_r\Omega$ al posto di Ω

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}Q^T(q_0, q)\omega \\ \dot{\omega} &= J_{mb}^{-1} \left(-\tilde{\omega}\xi + u_g - u_r \right) \\ \dot{\xi} &= -\tilde{\omega}\xi + u_g.\end{aligned}$$

Osservazione sulle ruote di reazione in un satellite rigido

Siano $\bar{u}_r, -\bar{u}_r$ i momenti scambiati tra main body e reaction wheels e u_g quello dovuto ai gas jets sul main body. Le equazioni dinamiche per il main body e le reaction wheels si scrivono

$$\begin{aligned}J_{mb}\dot{\omega} &= -\tilde{\omega}J_{mb}\omega + u_g + \bar{u}_r \\ J_r(\dot{\omega} + \dot{\Omega}) &= -\tilde{\omega}J_r(\omega + \Omega) - \bar{u}_r\end{aligned}$$

essendo le equazioni scritte nel riferimento $R\Gamma$ fisso con il main body, che ruota con velocità angolare ω rispetto a quello inerziale RC .

I vettori sono espressi in $R\Gamma$ e si utilizza la legge di Poisson di derivazione

$$\frac{dv}{dt} = \dot{v} + \tilde{\omega}v$$

con $\frac{dv}{dt}$ e \dot{v} la derivata assoluta e relativa di v . Infine $\omega + \Omega$ è la velocità di rotazione (componente per componente) delle reaction wheels, espressa in $R\Gamma$, essendo Ω quella relativa al main body. Si noti che se $\Omega \equiv 0$ le reaction wheels sono bloccate ed è come avere un main body con momento d'inerzia $J_{mb} + J_r$.

Le reaction wheels possono essere più di una per ogni asse, nel qual caso si considerano le somme delle componenti su ciascun asse. Inoltre non è necessario che l'asse di simmetria di una reaction wheel passi per un asse di $R\Gamma$. In altre parole, se si ha una reaction wheel non orientata come un asse di $R\Gamma$ che ruota con velocità $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \end{pmatrix}^T$, essa equivale a tre reaction wheels, orientate come gli assi di $R\Gamma$, che ruotano con velocità pari alle componenti Ω_i .

Sommando le equazioni dinamiche si ha

$$J_{mb}\dot{\omega} + J_r(\dot{\omega} + \dot{\Omega}) = -\tilde{\omega}J_{mb}\omega - \tilde{\omega}J_r(\omega + \Omega)\omega + u_g$$

e posto

$$\begin{aligned}u_r &:= J_r(\dot{\omega} + \dot{\Omega}) \\ N(\omega, \Omega) &= -\tilde{\omega} \left(J_{tot}\omega + J_r\Omega \right) \\ J_{tot} &= J_{mb} + J_r\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}J_{mb}\dot{\omega} &= -N(\omega, \Omega) + u_g - u_r \\ J_r(\dot{\omega} + \dot{\Omega}) &= u_r\end{aligned}$$

da cui si ricava il modello del satellite rigido.

Si noti che come u_g è il momento esplicito dai gas jets sul main body, così u_r è il momento esplicito dai motori delle reaction wheels sul main body. Il momento \bar{u}_r scambiato tra main body e reaction wheels è diverso da u_r . Confrontando

$$u_r = -\tilde{\omega}J_r(\omega + \Omega) - \bar{u}_r.$$

Questa differenza è dovuta all'effetto giroscopico legato alla rotazione delle reaction wheels. Se si suppone che i motori non esplichino momento, e le ruote siano libere di girare, ed una reaction wheel ruotasse ad una certa velocità Ω , per il fatto che tutto il satellite ruota con una velocità ω si ha un momento giroscopico agente sul main body $-\tilde{\omega}J_r(\omega + \Omega)$.

Il momento u_r è poi il momento esplicito dai motori delle reaction wheels al netto del termine giroscopico ed eventualmente di disturbi o dissipazioni, qui non considerate, ed è funzione della tensione d'alimentazione e della velocità Ω a cui ruotano le reaction wheels (infatti per applicare un momento occorre variare Ω). Si noti che una reaction wheel può fornire un momento tanto maggiore quanto maggiore è l'accelerazione che il motore può imprimere alla ruota.

L'equazione dinamica del main body può essere riscritta come

$$J_{mb}\dot{\omega} = -\tilde{\omega}J_{mb}\omega - \tilde{\omega}J_r(\omega\Omega) + u_g - u_r = M^e$$

con

$\tilde{\omega}J_{mb}\omega$ il momento giroscopico dovuto alla rotazione del main body;

$\tilde{\omega}J_r(\omega + \Omega)$ il momento giroscopico dovuto alla rotazione delle reaction wheels;

u_g il momento dovuto ai gas jets;

u_r il momento dovuto ai motori delle reaction wheels;

M^e la somma dei momenti esterni al main body.

1.3 Spostamenti punto–punto

Supponendo che non agiscano disturbi sulla struttura, il modello matematico del satellite è

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\mathcal{Q}^T(q_0, q)\omega \\ \dot{\omega} &= J_{mb}^{-1} \left[-\tilde{\omega}(J_{tot}\omega + J_r\Omega) + u_g - u_r \right] \\ \dot{\Omega} &= J_r^{-1}u_r - \dot{\omega}. \end{aligned}$$

con

$$\mathcal{Q}^T(q_0, q) = \begin{pmatrix} -q^T \\ q_0I + \tilde{q} \end{pmatrix}.$$

Si vuole determinare una legge di controllo che permetta di far assumere al satellite un assetto desiderato. A tal proposito si osservi che il quaternione (q_0, q) , che descrive l'assetto di RI (satellite) rispetto a RC (sistema inerziale), può anche essere visto come l'errore di assetto del satellite rispetto ad un riferimento desiderato $RI_r \equiv RC$. Poiché l'assetto di $RI_r \equiv RC$ è individuato dal quaternione $(q_{r0}, q_r) = (1, 0)$ (rotazione nulla), il fine del controllo è dunque quello di far sì che (q_0, q) tenda asintoticamente a $(1, 0)$, e che una volta nell'assetto desiderato anche ω ed Ω tendano a zero.

Per determinare una tale legge di controllo si applicherà il teorema di Lyapunov, il quale richiede l'individuazione di una funzione derivabile, definita positiva in un intorno di $(q_0, q, \omega, \Omega) = (1, 0, 0, 0)$, tale che la sua derivata lungo le traiettorie del sistema controreazionato sia definita negativa. La funzione candidata è la seguente

$$V = k_p \left[(1 - q_0)^2 + q^T q \right] + \frac{1}{2} \omega^T J_{mb} \omega + \frac{1}{2} (\omega + \Omega)^T J_r (\omega + \Omega)$$

con $k_p > 0$. Si noti la presenza di termini relativi alla dinamica, che rappresentano delle energie cinetiche. Il termine $\frac{1}{2}(\omega + \Omega)^T J_r (\omega + \Omega)$ è stato preferito al termine $\frac{1}{2}\Omega^T J_r \Omega$ in quanto permette

una più semplice derivata. Infine il termine relativo alla cinematica $(1 - q_0)^2 + q^T q$ è dovuto alla particolare forma delle equazioni cinematiche. Infatti la derivata di V risulta

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \omega^T \left(k_p q - \tilde{\omega}(J_{tot}\omega + J_r\Omega) + u_g - u_r \right) + (\omega + \Omega)^T u_r \\ &= \omega^T \left(k_p q + u_g - u_r \right) + (\omega + \Omega)^T u_r\end{aligned}$$

in quanto $\omega^T \tilde{\omega} = 0$. Nell'ottica di soddisfare il teorema di Lyapunov si può considerare un controllo

$$\begin{aligned}u_g &= -k_p q - k_d \omega + u_r = -k_p q - (k_d + k_r)\omega - k_r \Omega \\ u_r &= -k_r(\omega + \Omega)\end{aligned}$$

$k_d \geq 0$, $k_r > 0$, che assicura che

$$\dot{V} = -k_d \|\omega\|^2 - k_r \|\omega + \Omega\|^2.$$

Si noti che \dot{V} è semidefinita negativa, in quanto non ha termini relativi ai quaternioni. In tal caso il teorema di Lyapunov assicura solo che $(1, 0, 0, 0)$ è semplicemente stabile (limitatezza delle traiettorie), ma non assicura che sia anche asintoticamente stabile (limitatezza e convergenza asintotica delle traiettorie). In realtà la semplice intuizione ci permette di asserire che la stabilità è asintotica. Infatti la funzione V , che per quanto detto prima è correlata con l'energia del sistema (ne è una sua generalizzazione), è sempre decrescente salvo negli istanti di tempo in cui $\omega = 0$, $\Omega = 0$. Ma in tali istanti la dinamica del satellite controreazionato diventa

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= J_{mb}^{-1} \left(-k_p q \right) \\ \dot{\Omega} &= -J_{mb}^{-1} \left(-k_p q \right)\end{aligned}$$

in cui il termine $k_p q$ tende a far nuovamente variare sia ω che Ω , che diventeranno dunque non nulle e dunque V continuerà a decrescere. Dunque la V potrà annullarsi solo quando $(q_0, q, \omega, \Omega) = (1, 0, 0, 0)$. La formalizzazione di questa argomentazione qualitativa è data dal teorema di La Salle, il quale afferma che data una funzione derivabile, non necessariamente definita positiva, se la sua derivata lungo le traiettorie del sistema controreazionato è semidefinita negativa, allora tali traiettorie tendono al più grande insieme invariante¹³ \mathcal{E} contenuto nell'insieme

$$E = \{x \mid \dot{V} = 0\}, \quad x = \left(q_0 \quad q^T \quad \omega^T \quad \Omega^T \right)^T.$$

Nel nostro caso

$$E = \{x \mid \omega = 0, \xi = 0\}.$$

Per determinare \mathcal{E} si devono fare delle considerazioni di "compatibilità" delle traiettorie con la dinamica del sistema. Poiché \mathcal{E} è invariante, le traiettorie dovranno essere sempre tali (da un certo istante di tempo in poi) che $\omega = 0$ ed $\xi = 0$, ossia ω e ξ dovranno essere identicamente nulle. Questo impone che anche le loro derivate siano nulle. Imponendo allora che

$$\dot{\omega} = 0 = J_{mb}^{-1} \left(-\tilde{\omega}(J_{tot}\omega + J_r\Omega) - k_p q - k_d \omega \right) = J_{mb}^{-1} \left(-k_p q \right)$$

si ha che deve essere $q = 0$ (e quindi $q_0 = 1$). Dunque

$$\mathcal{E} = \{x \mid q_0 = 1, q = 0, \omega = 0, \Omega = 0\}.$$

¹³In altre parole le traiettorie entrano asintoticamente in un insieme $\mathcal{E} \subseteq E$ e da esso non usciranno più.

Si conclude quindi che per il teorema di La Salle

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 - q_0 \\ q \\ \omega \\ \Omega \end{pmatrix} = 0.$$

Si osservi infine che la legge di controllo vista è robusta rispetto a variazioni o cattiva conoscenza dei parametri del satellite, che appaiono nelle matrici d'inerzia. Non sarebbe stata invece robusta una legge di controllo che cancella il termine giroscopico¹⁴

$$u_g = \tilde{\omega}(J_{tot}\omega + J_r\Omega) - k_p q - (k_d + k_r)\omega - k_r\Omega, \quad u_r = -k_r(\omega + \Omega)$$

in quanto occorre conoscere le matrici d'inerzia.

Discutiamo rapidamente anche i casi in cui le reaction wheels sono libere di ruotare e non forniscono momento, o non sono presenti i gas jets. Se le reaction wheels sono presenti ma sono libere di ruotare e non forniscono momento, ossia $J_r(\dot{\omega} + \dot{\Omega}) = u_r = 0$, la precedente espressione della derivata di V vale

$$\dot{V} = \omega^T (k_p q + u_g)$$

per cui con

$$u_g = -k_p q - k_d \omega$$

si ha

$$\dot{V} = -k_d \|\omega\|^2,$$

per cui $q \rightarrow 0$ e $q_0 \rightarrow 1$ (per La Salle) e Ω resta limitata (per Lyapunov), ma non tende a zero (come è intuitivo). Se invece non vi sono gas jets è come se $u_g = 0$. Considerata una funzione leggermente diversa¹⁵

$$\begin{aligned} V &= k_p \left[(1 - q_0)^2 + q^T q \right] + \frac{1}{2} \omega^T J_{mb} \omega + \frac{1}{2} (J_{tot}\omega + J_r\Omega)^T (J_{tot}\omega + J_r\Omega) \\ &= k_p \left[(1 - q_0)^2 + q^T q \right] + \frac{1}{2} \omega^T J_{mb} \omega + \frac{1}{2} \xi^T \xi \end{aligned}$$

$k_p > 0$, e ricordando che $\dot{\xi} = -\tilde{\omega}\xi$, si ha

$$\dot{V} = \omega^T (k_p q - u_r) - \xi^T \tilde{\omega} \xi = \omega^T (k_p q - u_r).$$

È quindi immediato osservare che

$$u_r = k_p q + k_d \omega$$

assicura che $q \rightarrow 0$ e $q_0 \rightarrow 1$ (per La Salle) e che Ω resti limitata (per Lyapunov), ma che non tenda a zero (come è intuitivo).

¹⁴In realtà si è visto che non è necessario cancellare il termine $-\tilde{\omega}(J_{tot}\omega + J_r\Omega)$ per assicurare la convergenza asintotica delle traiettorie a $(1, 0, 0, 0)$. Tale cancellazione, però, migliora il comportamento transitorio.

¹⁵La differenza è nel termine

$$\frac{1}{2} \omega^T J_{mb} \omega + \frac{1}{2} \xi^T \xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega \\ \Omega \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} J_{mb} + J_{tot}^2 & J_{tot} J_r \\ J_r J_{tot} & J_r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \Omega \end{pmatrix}$$

che sostituisce

$$\frac{1}{2} \omega^T J_{mb} \omega + \frac{1}{2} (\omega + \Omega)^T J_r (\omega + \Omega) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega \\ \Omega \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} J_{mb} + J_r & J_r \\ J_r & J_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \Omega \end{pmatrix}.$$

Agli stessi risultati si poteva giungere considerando che il modello matematico del satellite rigido può essere scritto equivalentemente utilizzando la variabile $\xi = J_{tot}\omega + J_r\Omega$ al posto di Ω

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\mathcal{Q}^T(q_0, q)\omega \\ \dot{\omega} &= J_{mb}^{-1}\left(-\tilde{\omega}\xi + u_g - u_r\right) \\ \dot{\xi} &= -\tilde{\omega}\xi + u_g \end{aligned}$$

Infatti si consideri la funzione¹⁶

$$V = k_p \left[(1 - q_0)^2 + q^T q \right] + \frac{1}{2} \omega^T J_{mb} \omega + \frac{1}{2} \xi^T \xi$$

$k_p > 0$. Derivando si ha

$$\dot{V} = \omega^T \left(k_p q - \tilde{\omega} \xi + u_g - u_r \right) + \xi^T u_g = \omega^T \left(k_p q + u_g - u_r \right) + \xi^T u_g$$

e posto

$$\begin{aligned} u_g &= -k_p q - k_d \omega + u_r = -k_p q - (k_d I + k_r J_{tot}) \omega - k_r J_r \Omega \\ u_r &= -k_r \xi = -k_r J_{tot} \omega - k_r J_r \Omega \end{aligned}$$

$k_d \geq 0$, $k_r > 0$, si ha

$$\dot{V} = -k_d \|\omega\|^2 - k_r \|\xi\|^2.$$

Per il teorema di La Salle le traiettorie del sistema tendono al più grande insieme invariante \mathcal{E} contenuto nell'insieme

$$E = \{x \mid \dot{V} = 0\} = \{\omega = 0, \xi = 0\}.$$

Dalle equazioni dinamiche del sistema controreazionato si ha

$$\dot{\omega} = 0 = J_{mb}^{-1} \left(-\tilde{\omega} \xi - k_p q - k_d \omega \right) = J_{mb}^{-1} \left(-k_p q \right)$$

ossia deve essere $q = 0$ (e quindi $q_0 = 1$). Dunque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 - q_0 \\ q \\ \omega \\ \xi \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 - q_0 \\ q \\ \omega \\ \Omega \end{pmatrix} = 0$$

avendo considerato che J_r è una matrice definita positiva (e pertanto se $\omega = 0$ e $\xi = J_r \Omega = 0$ si ha che $\Omega = 0$).

Analogamente si ragiona nei casi in cui le reaction wheels sono libere di ruotare e non forniscono momento, o non sono presenti i gas jets.

1.4 Inseguimento di traiettoria

Quando si studia il problema di inseguimento di una traiettoria data in termini di un quaternioni di riferimento (q_{r0}, q_r) è opportuno descrivere la cinematica mediante i quaternioni d'errore. Dunque il modello del satellite può essere scritto come segue

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \mathcal{Q}^T(e_0, e) \omega_e \\ \dot{\omega}_e &= J_{mb}^{-1} \left(-N(\omega_e, \Omega, \omega_r) + u_g - u_r \right) - \dot{\omega}_r \\ \dot{\Omega} &= J_r^{-1} u_r - \dot{\omega} = J_{mb}^{-1} \left[N(\omega_e, \Omega, \omega_r) - u_g + J_{tot} J_r^{-1} u_r \right] + \dot{\omega}_r. \end{aligned}$$

¹⁶ è una funzione candidata di Lyapunov, ma già si intuisce che verrà applicato il teorema di La Salle.

avendo considerata la velocità d'errore $\omega_e = \omega - \omega_r$ e dove si è posto

$$N(\omega_e, \Omega, \omega_r) = N_1(\omega_e, \Omega) + N_2(\omega_e, \Omega, \omega_r)$$

$$N_1(\omega_e, \Omega) = \tilde{\omega}_e(J_{tot}\omega_e + J_r\Omega)$$

$$N_2(\omega_e, \Omega, \omega_r) = \tilde{\omega}_e J_{tot}\omega_r + \tilde{\omega}_r J_{tot}\omega_e + \tilde{\omega}_r J_{tot}\omega_r + \tilde{\omega}_r J_r\Omega.$$

Si ricorda che $\dot{\omega}_r$, che esprime l'accelerazione di $R\Gamma_r$ rispetto a $R\Gamma$, è espressa in $R\Gamma$.

é semplice vedere che se

$$u_g = (J_{mb} + J_r)\dot{\omega}_r + N_2 + v_g = (J_{mb} + J_r)\dot{\omega}_r + \tilde{\omega}_e J_{tot}\omega_r + \tilde{\omega}_r J_{tot}\omega_e + \tilde{\omega}_r J_{tot}\omega_r + \tilde{\omega}_r J_r\Omega + v_g$$

$$u_r = J_r\dot{\omega}_r + v_r$$

il modello diventa

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \mathcal{Q}^T(e_0, e)\omega_e \\ \dot{\omega}_e &= J_{mb}^{-1} \left(-\tilde{\omega}_e(J_{tot}\omega_e + J_r\Omega) + v_g - v_r \right) \\ \dot{\Omega} &= J_r^{-1}v_r - \dot{\omega}_e \end{aligned}$$

ossia diventa analogo a quello per lo spostamento punto-punto. Quindi considerando la funzione

$$V = k_p \left[(1 - e_0)^2 + e^T e \right] + \frac{1}{2} \omega_e^T J_{mb} \omega_e + \frac{1}{2} (\omega_e + \Omega)^T J_r (\omega_e + \Omega)$$

con $k_p > 0$, e con il controllo

$$v_g = -k_p e - k_d \omega_e + u_r = -k_p e - (k_d + k_r)\omega_e - k_r \Omega$$

$$u_r = -k_r(\omega_e + \Omega)$$

$k_d \geq 0$, $k_r > 0$, che assicura che

$$\dot{V} = -k_d \|\omega_e\|^2 - k_r \|\omega_e + \Omega\|^2$$

il problema di controllo viene risolto.

Analogamente si ragiona nei casi in cui le reaction wheels sono libere di ruotare e non forniscono momento, o non sono presenti i gas jets.

1.5 Stabilizzazione globale robusta di un satellite rigido

Sia dato un satellite rigido senza reaction wheels

$$\begin{aligned}\dot{q}_0 &= -\frac{1}{2}q^T\omega \\ \dot{q} &= \frac{1}{2}R(q)\omega \\ \dot{\omega} &= J^{-1}\left[-\tilde{\omega}J\omega + u_g\right]\end{aligned}$$

con $J = J_{mb}$, $R(q) = q_0I + \tilde{q}$. Considerata la funzione di Lyapunov

$$V = \gamma(1 - q_0)^2 + q^T K_p q + \frac{1}{2}\omega^T J \omega$$

ove $K_p = K_p^T > 0$, lungo le traiettorie del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \gamma(1 - q_0)\omega^T q + q^T K_p R(q)\omega + \omega^T \left[-\tilde{\omega}J\omega + u_g\right] = \\ &= \omega^T \left[R^T(q)K_p + \gamma(1 - q_0)I\right]q + \omega^T \left[-\tilde{\omega}J\omega + u_g\right]\end{aligned}$$

ossia:

$$\dot{V} = \omega^T \left\{ \left[R^T(q)K_p + \gamma(1 - q_0)I \right] q - \tilde{\omega}J\omega + u_g \right\}.$$

Si ponga

$$u_g = -\left[R^T(q)K_p + \gamma(1 - q_0)I \right] q - K_d \omega + v,$$

con $v = 0$ oppure $v = \tilde{\omega}J\omega$. Si noti che in questo secondo caso occorre conoscere J . Si ha allora:

$$\dot{V} = -\omega^T K_d \omega \leq 0$$

con $\dot{V} = 0$ se e solo se $\omega \equiv 0$. Dunque si ha anche (per $\omega = 0$):

$$\dot{\omega} = 0 = -\left[R^T(q)K_p + \gamma(1 - q_0)I \right] q.$$

Mostriamo che questo implica che $q_0 = \pm 1$ e $q = 0$. Si noti che questi due gruppi di valori individuano lo stesso assetto. Premoltiplicando per q^T :

$$q^T \left[(q_0 I - \tilde{q}) K_p + \gamma(1 - q_0) I \right] q = q^T \left[q_0 K_p + \gamma(1 - q_0) I \right] q = q^T M(q) q = 0,$$

con

$$M(q) = q_0 K_p - \gamma(1 - q_0) I.$$

Gli autovalori di $M(q)$ sono le soluzioni di

$$\begin{aligned}|\lambda I - M(q)| &= |\lambda I - q_0 K_p - \gamma(1 - q_0) I| = |(\lambda - \gamma(1 - q_0)) I - q_0 K_p| = \\ &= |\bar{\lambda} I - q_0 K_p| = 0\end{aligned}$$

$\bar{\lambda} = \lambda - \gamma(1 - q_0)$, ossia sono pari agli autovalori di $q_0 K_p$, e quindi a quelli di K_p moltiplicati per q_0 , traslati di $\gamma(1 - q_0)$:

$$\lambda_i^M = q_0 \lambda_i^{K_p} + \gamma(1 - q_0) = q_0 (\lambda_i^{K_p} - \gamma) + \gamma.$$

Pensando alla forma canonica di Jordan, la matrice $M(q)$ è singolare se e solo se uno dei suoi autovalori è nullo. Perché ciò accada si deve avere che

$$q_0 = -\frac{\gamma}{\lambda_i^{K_p} - \gamma}.$$

Ma $\lambda_i^{K_p} > 0$ poiché $K_p > 0$. Si hanno i seguenti casi:

- a) se $\lambda_i^{K_p} \in (0, \gamma)$ oppure $\lambda_i^{K_p} \in (\gamma, 2\gamma)$ allora $q_0 > 1$, il che è impossibile;
- b) se $\lambda_i^{K_p} = \gamma$ allora $\lambda_i^M = \gamma \neq 0$;
- c) se $\lambda_i^{K_p} = 2\gamma$ allora $\lambda_i^M = (q_0 + 1)\gamma$, e tale autovalore si annulla se e solo se $q_0 = -1$.

Si può concludere lo studio della singolarità di $M(q)$ dicendo che per $\lambda_i^{K_p} \in (0, 2\gamma]$ la matrice $M(q)$ è non singolare per $q_0 \neq -1$, mentre è singolare per $q_0 = -1$. Se $q_0 \neq -1$ allora perché risulti $q^T M(q) q = 0$ è necessario e sufficiente che $q = 0$, e quindi $q_0 = 1$. Se $q_0 = -1$ dalla relazione di vincolo $q_0^2 + q^T q = 1$ si deduce che deve essere $q = 0$. Quindi in entrambi i casi si deve avere $q = 0$. Poiché $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ denotano lo stesso assetto, si ha un solo punto di equilibrio possibile:

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si noti che per $\lambda_i^{K_p} > 2\gamma$ vi sono valori possibili per q_0 tali che $\lambda_i^M = 0$, e dunque $u_g = 0$ per $\omega = 0$, ma corrispondono a punti d'equilibrio non desiderati ($q \neq 0$).

1.6 Modello matematico di un satellite flessibile

Si consideri una struttura spaziale costituita da un corpo rigido (main body) e da un'appendice flessibile, che trasporta un carico pagante (payload). Mentre l'assetto del satellite è descritto da quello del main body, e quindi è possibile utilizzare i quaternioni, per descrivere la dinamica del satellite occorre tener conto della flessibilità della struttura. Un possibile approccio per ricavare le equazioni dinamiche è quello energetico, in cui si determina dapprima la funzione lagrangiana data dalla somma dell'energia cinetica e quella potenziale, che poi viene derivata utilizzando le equazioni di Lagrange.

L'energia cinetica totale $T(t)$ della struttura flessibile è la somma delle energie cinetiche T_{mb} , T_f , T_p associate al main body, all'appendice flessibile e al payload

$$\begin{aligned} T_{mb} &= \frac{1}{2} m_{mb} v^T v + \frac{1}{2} \omega^T J_{mb} \omega + \frac{1}{2} (\omega^T + \Omega^T) J_r (\omega + \Omega), \\ T_f &= \frac{1}{2} \int_b v_f^T(z, t) v_f(z, t) dm + \frac{1}{2} \int_b [\dot{\vartheta}^T(z, t) dJ \dot{\vartheta}(z, t)] \\ T_p &= \frac{1}{2} m_p v_f^T(l, t) v_f(l, t) + \frac{1}{2} (\omega + \dot{\vartheta}(l, t))^T J_{p1} (\omega + \dot{\vartheta}(l, t)) \end{aligned}$$

ove v , ω sono le velocità lineare ed angolare del main body, ed m_{mb} , J_{mb} sono la sua massa e il suo tensore d'inerzia simmetrico. Inoltre J_r è la matrice d'inerzia simmetrica delle ruote di reazione ed Ω la loro velocità angolare rispetto al main body. Poiché l'interesse è in manovre d'assetto, in cui non si tiene conto di eventuali traslazioni della struttura, si assumerà che v sia nulla. In T_f lo spostamento lungo l'asse dell'appendice è considerato trascurabile, mentre $v_f(z, t)$ è la velocità totale della massa elementare dell'appendice flessibile, di coordinate z , massa dm e inerzia dJ , mentre $\vartheta(z, t)$ è il vettore delle deformazioni di flessione e torsione. Infine m_p e J_{p1} sono la massa e il tensore d'inerzia del payload espresse in RG' solidare con il payload, ed l è la lunghezza dell'appendice flessibile. Tutte queste quantità sono espresse nel riferimento non inerziale RG solidare con il main body.

Considering only $N = N_1 + N_2 + N_3$ bending and torsional modes ξ , the displacements can be approximated as follows:

$$\begin{aligned} u_x(z, t) &= \sum_{i=1}^{N_1} \Phi_{xi}(z) \xi_{xi}(t) = \Phi_x^T(z) \xi_x(t), \\ u_y(z, t) &= \sum_{i=1}^{N_2} \Phi_{yi}(z) \xi_{yi}(t) = \Phi_y^T(z) \xi_y(t), \\ \vartheta_z(z, t) &= \sum_{i=1}^{N_3} \Phi_{zi}(z) \xi_{zi}(t) = \Phi_z^T(z) \xi_z(t), \end{aligned} \quad \xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_x(t) \\ \xi_y(t) \\ \xi_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_N(t) \end{pmatrix}.$$

The total kinetic energy can be written as follows (see appendix 1 for matrices $A_1(t)$, A_2):

$$T(t) = \frac{1}{2} \omega^T(t) J_t(t) \omega(t) + \omega^T(t) J_r \Omega(t) + \frac{1}{2} \Omega^T(t) J_r \Omega(t) + \omega^T(t) A_1(t) \dot{\xi}(t) + \frac{1}{2} \dot{\xi}^T(t) A_2 \dot{\xi}(t),$$

with $J_t(t)$ the total inertia matrix.

The potential energy is due to the flexibility of the boom. Following [?], the contribution for the boom in transverse vibration and in torsion is

$$U = \frac{1}{2} \xi^T(t) K \xi(t),$$

with $K = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{pmatrix}$ the stiffness matrix, where $K_1 = \text{diag} \{ \omega_{x1}^2, \dots, \omega_{xN_1}^2 \}$, $K_2 = \text{diag} \{ \omega_{y1}^2, \dots, \omega_{yN_2}^2 \}$, $K_3 = \text{diag} \{ \omega_{z1}^2, \dots, \omega_{zN_3}^2 \}$. The effect of the (nonconservative) viscous damping forces can be taken into account by supposing that they are proportional to the generalized velocities and by introducing the Rayleigh's dissipation function (??), determining a function $U_d = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T(t) C \dot{\xi}(t)$, with $C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}$, $C_1 = \text{diag} \{ 2\zeta_{x1} \omega_{x1}, \dots, 2\zeta_{xN_1} \omega_{xN_1} \}$, $C_2 = \text{diag} \{ 2\zeta_{y1} \omega_{y1}, \dots, 2\zeta_{yN_2} \omega_{yN_2} \}$, $C_3 = \text{diag} \{ 2\zeta_{z1} \omega_{z1}, \dots, 2\zeta_{zN_3} \omega_{zN_3} \}$, and ζ_i the damping associated to the i^{th} mode.

The boom is covered with two piezoelectric layers reacting to the x and y -direction bends. These layers are homogeneous, isotropic, perfectly bonded to the boom, with constant thickness and with same width as the boom's edge. If $u_{px}(t)$, $u_{py}(t)$ are the voltages applied to the films, the bending moments around the neutral axis of the composite boom are given by ([?], [?], [?]) $M_y(t) = -c_{px} u_{px}(t)$, $M_x(t) = -c_{py} u_{py}(t)$, with c_{px} , c_{py} constants depending on the geometry and the nature of materials (??). Here it is supposed that each film is not sensibly influenced by the flecion induced by the other.

The equations of motion are derived by applying Lagrange's equations (??):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i(t), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_j} - \frac{\partial L}{\partial \phi_j} = u_{rj}(t), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_k} - \frac{\partial L}{\partial \xi_k} + \frac{\partial U_d}{\partial \dot{\xi}_k} = W_k(t),$$

$i, j = 1, 2, 3$, $k = 1, \dots, N$, where $F_i(t)$, $u_{rj}(t)$, $W_k(t)$ are the generalized forces, external and/or not derivable from a potential function, associated to the corresponding generalized coordinates $q_i(t)$, $\phi_j(t)$, $\xi_k(t)$, with $\dot{\phi}(t) = \Omega(t)$, and $L = T - U$ the lagrangian function. From the definition of

generalized forces, we obtain $F(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}} \right)^T u_g(t)$, $W(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) \\ \vdots \\ W_N(t) \end{pmatrix} = -\Phi(l) \delta_1 u_p(t)$.

Here $u_g(t)$ is the torque acting on the main body and due to the gas jets, $u_r(t)$ is the torque imposed

by the reaction wheels, $u_p(t) = \begin{pmatrix} u_{px}(t) \\ u_{py}(t) \end{pmatrix}$ is the vector of the tensions applied to the piezoelectric layers, and $\delta_1 = \begin{pmatrix} c_{px} & 0 \\ 0 & c_{py} \end{pmatrix}$, $\Phi(l) = \begin{pmatrix} \Phi_x(l) & 0 \\ 0 & \Phi_y(l) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($N \times 2$ matrix).

As far as the first of 1.8.18 is concerned, firstly note that by the chain rule one has:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^T = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}}\right)^T \left(\frac{\partial L}{\partial \omega}\right)^T, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)^T = \left(\frac{\partial \omega}{\partial q}\right)^T \left(\frac{\partial L}{\partial \omega}\right)^T,$$

with $\left(\frac{\partial L}{\partial \omega}\right)^T = J_t(t)\omega(t) + J_r\Omega(t) + A_1(t)\dot{\xi}(t)$ and

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}}\right)^T = 2R^{-T}(q(t)), \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial q}\right)^T = \frac{\omega^T(t)q(t)}{q_0(t)}R^{-T}(q(t)) - \frac{\tilde{\omega}(t)}{q_0(t)},$$

as derivable from 1.8.18, with $R^{-1}(q(t)) = \frac{q(t)q^T(t)}{q_0(t)} + R^T(q(t))$ and $q_0(t) = \sqrt{1 - \|q(t)\|^2}$. Hence from the first of 1.8.18 one has:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega}\right)^T = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}}\right)^{-T} \left[- \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}}\right)^T - \left(\frac{\partial \omega}{\partial q}\right)^T \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \omega}\right)^T + F(t) \right]$$

where by calculation one works out:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}}\right)^T = \frac{1}{q_0(t)}R^{-T}(q(t)) \left(\omega(t)q^T(t) + q_0(t)\tilde{\omega}(t)\right), \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}}\right)^{-T} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}}\right)^T - \left(\frac{\partial \omega}{\partial q}\right)^T\right) = \tilde{\omega}(t).$$

Here $N(\omega(t), \Omega(t), \dot{\xi}(t)) = \tilde{\omega}(t) \left(\frac{\partial L}{\partial \omega}\right)^T = \tilde{\omega}(t) \left[J_t(t)\omega(t) + J_r\Omega(t) + A_1(t)\dot{\xi}(t) \right]$ is the gyroscopic term. Therefore, from 1.8.18 and considering the second and third of 1.8.18, rewritten as:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \Omega}\right)^T &= u_r(t), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right)^T &= \left(\frac{\partial L}{\partial \xi}\right)^T - \left(\frac{\partial U_d}{\partial \xi}\right)^T + W(t), \end{aligned}$$

one obtains the spacecraft dynamic equations:

$$\begin{aligned} J_t(t)\dot{\omega}(t) + J_r\dot{\Omega}(t) + A_1(t)\ddot{\xi}(t) + \dot{J}_t(t)\omega(t) + \dot{A}_1(t)\dot{\xi}(t) &= -N(\omega(t), \Omega(t), \dot{\xi}(t)) + u_g(t) \\ J_r(\dot{\omega}(t) + \dot{\Omega}(t)) &= u_r(t) \\ A_1^T(t)\dot{\omega}(t) + A_2\ddot{\xi}(t) + \dot{A}_1^T(t)\omega(t) &= -K\xi(t) - C\dot{\xi}(t) - \Phi(l)\delta_1 u_p(t). \end{aligned}$$

From 1.8.18 and 1.26 the mathematical model of the spacecraft is derived:

$$\begin{aligned} \dot{e}_0 &= -\frac{1}{2}e^T(\omega - \omega_d) \\ \dot{e} &= \frac{1}{2}R(e)(\omega - \omega_d) \\ \dot{\omega} &= J_1^{-1} \left[-\bar{N}(\omega, \Omega, z) - \dot{J}_t\omega - \delta^T z + \delta^T \dot{\omega} + \delta^T (\bar{C}z + \bar{K}\eta) + u_g - u_r + \Delta_1 u_p \right] \\ \dot{\Omega} &= -J_1^{-1} \left[-\bar{N}(\omega, \Omega, z) - \dot{J}_t\omega - \delta^T z + \delta^T \dot{\omega} + \right. \\ &\quad \left. + \delta^T (\bar{C}z + \bar{K}\eta) + u_g - (J_1 + J_r)J_r^{-1}u_r + \Delta_1 u_p \right] \\ \dot{\eta} &= z \\ \dot{z} &= \delta J_1^{-1} \bar{N}(\omega, \Omega, z) - (I + \delta J_1^{-1} \delta^T) (\bar{C}z + \bar{K}\eta) + \delta J_1^{-1} \delta^T z + \\ &\quad + (\delta J_1^{-1} \dot{J}_t - \delta - \delta J_1^{-1} \delta^T \delta) \omega - \delta J_1^{-1} (u_g - u_r) - (\delta_2 + \delta J_1^{-1} \Delta_1) u_p \end{aligned}$$

with $J_1(t) = J_t(t) - J_r - \delta^T(t)\delta(t)$, $\bar{N} = N(\omega(t), \Omega(t), A_{21}^{-1}z(t))$, $\delta(t) = A_{21}^{-1}A_1^T(t)$, $\bar{C} = A_{21}^{-1}CA_{21}^{-1}$, $\bar{K} = A_{21}^{-1}KA_{21}^{-1}$, $\delta_2 = A_{21}^{-1}\Phi(l)\delta_1$, $\Delta_1(t) = \delta^T(t)\delta_2$, and where $\xi(t) = A_{21}^{-1}\eta(t)$, A_{21} the square root of the positive definite symmetric matrix A_2 .

This is a time-variant model, which will be used in the following as a simulation model, for verifying the effectiveness of the control law, derived on the basis of a simplified model. This approximated model, easier to manipulate, can be derived from 1.27 by considering small displacements and a smaller number of elastic modes. Hence (see appendix 1):

$$\begin{aligned} J_b(t) &\cong J_{b0}, & A_1(t) &\cong A_{10}, \\ J_p(t) &\cong J_{p0}, & \delta(t) &\cong A_{21}^{-1}A_{10}^T = \delta_0, \\ J_t(t) &\cong J_{mb} + J_r + J_{b0} + J_{p0} = J_{t0}, \end{aligned}$$

and $(\frac{\partial L}{\partial \omega})^T \cong J_{t0}\omega(t) + J_r\Omega(t) + \delta_0^T\dot{\eta}(t)$, so that the relationships in 1.26 become ([?], [?]):

$$\begin{aligned} J_{t0}\dot{\omega}(t) + J_r\dot{\Omega}(t) + \delta_0^T\ddot{\eta}(t) &= -\tilde{\omega}(J_{t0}\omega(t) + J_r\Omega(t) + \delta_0^T\dot{\eta}(t)) + u_g(t) \\ J_r(\dot{\omega}(t) + \dot{\Omega}(t)) &= u_r(t) \\ \ddot{\eta}(t) + \bar{C}\dot{\eta}(t) + \bar{K}\eta(t) &= -\delta_0\dot{\omega}(t) - \delta_2u_p(t). \end{aligned}$$

The variable chosen to describe the dynamics of the spacecraft are the quaternions $e_0(t)$ and $e(t)$, the spacecraft error angular velocity $\omega_e(t) = \omega(t) - \omega_d(t)$, the reaction wheels angular velocity $\Omega(t)$, the modal displacements $\eta(t)$ relative to the main body and the variable:

$$\psi(t) = \delta_0\omega_e(t) + \dot{\eta}(t)$$

representing the difference between the total modal velocity $\delta_0\omega(t) + \dot{\eta}(t)$ and $\omega_d(t)$ expressed in modal coordinates. This further on simplifies the computational developments of the next sections, maintaining a physical meaning of the state variables. Hence, we obtain:

$$\begin{aligned} \dot{e}_0(t) &= -\frac{1}{2}e^T(t)\omega_e(t) \\ \dot{e}(t) &= \frac{1}{2}R(e(t))\omega_e(t) \\ \dot{\omega}_e(t) &= J_{10}^{-1} \left[-N(\omega_e(t), \Omega(t), \psi(t), \omega_d(t)) + \delta_0^T(\bar{C}\psi(t) + \bar{K}\eta(t)) + \right. \\ &\quad \left. - \delta_0^T\bar{C}\delta_0\omega_e(t) + u_g(t) - u_r(t) + \Delta_{10}u_p(t) \right] - \dot{\omega}_d(t) \\ \dot{\Omega}(t) &= -\dot{\omega}_e(t) + J_r^{-1}u_r(t) - \dot{\omega}_d(t) \\ \dot{\eta}(t) &= \psi(t) - \delta_0\omega_e(t) \\ \dot{\psi}(t) &= -(\bar{C}\psi(t) + \bar{K}\eta(t)) + \bar{C}\delta_0\omega_e(t) - \delta_2u_p(t) - \delta_0\dot{\omega}_d(t) \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} J_{10} &= J_{t0} - J_r - \delta_0^T\delta_0 \\ N(\omega_e(t), \Omega(t), \psi(t), \omega_d(t)) &= (\tilde{\omega}_e(t) + \tilde{\omega}_d(t)) \left((J_{t0} - \delta_0^T\delta_0)\omega_e(t) + J_r\Omega(t) + \right. \\ &\quad \left. + \delta_0^T\psi(t) + J_{t0}\omega_d(t) \right) \end{aligned}$$

and $\Delta_{10} = \delta_0^T\delta_2$. This model will be used in the following section in order to derive the desired control laws.

Note that model 1.8.18 is similar to that used in [?], [?], with the main differences due to the term of the piezoelectric actuators and the different choice of state variables.

If the reaction wheels are not present the correspondent dynamics must be eliminated. This leads to the elimination of the dynamics of the variable $\Omega(t)$ in the model and to set $u_r(t)$ and J_r to zero in the expressions of J_{10} and of the gyroscopic term N :

$$J_{10} = J_{t0} - \delta_0^T \delta_0$$

$$N = (\tilde{\omega}_e(t) + \tilde{\omega}_d(t)) \left(J_{10} \omega_e(t) + \delta_0^T \psi(t) + J_{t0} \omega_d(t) \right) = N(\omega_e(t), \psi(t), \omega_d(t)).$$

The outputs to be controlled are the quaternion vector $y_1(t) = e(t)$ and the physical displacement vector $y_2(t) = \Phi^T(l) A_{21}^{-1} \eta(t)$ of the tip of the flexible appendage, where $\Phi(l)$ transforms the modal coordinates into real ones. The control must ensure the convergence to zero of both the outputs, namely must be able to track the desired attitude with zero tip displacement.

1.7 Analisi modale

L'idea che è dietro l'analisi modale è ridurre un sistema di equazioni differenziali ordinarie o parziali con delle condizioni al contorno, ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie indipendenti (disaccoppiate), la cui soluzione è molto più semplice da ottenere.

Per far ciò occorre risolvere il problema agli autovalori associato al sistema, che consiste nel determinare autovalori e autovettori, se il sistema è discreto, ovvero gli autovalori e le autofunzioni, se il sistema è continuo. Gli autovalori sono legati alle *frequenze naturali* del sistema, mentre gli autovettori o autofunzioni sono legati ai *modi naturali*. Se i modi naturali sono normalizzati allora sono detti *modi normali*. I modi naturali possiedono la proprietà di ortogonalità, che permette di scrivere le funzioni che descrivono gli spostamenti, come espansioni in termini dei modi naturali. Tali espansioni portano ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie indipendenti (disaccoppiate).

Il problema dell'analisi modale viene affrontato in maniera differente a seconda del tipo di sistema.

Per un sistema discreto con n gradi di libertà, il problema può essere espresso in termini di due matrici *reali e simmetriche*, ossia le matrici d'inerzia e di rigidezza, e le espansioni in termini dei modi naturali rappresentano semplicemente una trasformazione lineare nello spazio delle configurazioni. Tale trasformazione, detta *trasformazione di punto*, porta da un insieme di coordinate ad un altro e la matrice di trasformazione è la *matrice modale*. Questa procedura è la *l'analisi modale classica*.

Quando il sistema possiede uno smorzamento viscoso, l'analisi modale classica riesce a disaccoppiare le equazioni del moto solo in alcuni casi, tra i quali il più importante è quello in cui la matrice di smorzamento è proporzionale o alla matrice d'inerzia o a quella di rigidezza o ad una loro combinazione lineare. Nel caso generale, però, l'analisi modale classica fallisce nel disaccoppiare le equazioni del moto; in tal caso si può ancora disaccoppiare il sistema per mezzo di una procedura modale in cui le velocità generalizzate sono usate come coordinate ausiliarie, purché le matrici d'inerzia, di smorzamento e di rigidezza siano simmetriche. Le equazioni del moto di un sistema ad n gradi di libertà possono essere ridotte a $2n$ equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Mentre per i sistemi non smorzati gli autovalori e gli autovettori sono reali, per i sistemi con uno smorzamento piccolo gli autovalori sono a coppie complessi e coniugati e con parte reale negativa, e gli autovettori associati sono anch'essi complessi e coniugati. Dal punto di vista computazionale tale metodo è adatto solo

per sistemi con un numero di gradi di libertà piccolo, diventando impraticabile quando tale numero cresce.

L'analisi modale è stata molto usata per i *sistemi naturali*, ossia i sistemi per i quali il lagrangiano contiene solo i termini di grado 2 e 0 nelle velocità generalizzate.

Un sistema per il quale non valgono le proprietà dei sistemi naturali è detta *sistema non naturale*. Tra di essi i più importanti sono i *sistemi giroscopici*, per i quali il lagrangiano contiene termini che sono lineari nelle velocità generalizzate, che compaiono nella forma di prodotto delle velocità e delle coordinate generalizzate (*termini giroscopici*). Esempi di sistemi giroscopici sono corpi rotanti con una componente della velocità angolare molto maggiore rispetto alle altre. Le loro equazioni del moto sono simili a quelle dei sistemi naturali smorzati, a parte il termine giroscopico che è antisimmetrico, anziché simmetrico. In tali casi è necessario usare una *trasformazione di contatto* (Wittaker, 1937, Cap. XVI), nello spazio delle fasi definito dalle coordinate generalizzate e dai momenti, ovvero dalle coordinate generalizzate e dalle velocità. In questo caso il problema agli autovalori può essere definito da due matrici reali I , *simmetrica*, e G , *antisimmetrica*.

Poiché la struttura delle equazioni di Hamilton viene preservata, la trasformazione di contatto viene anche detta *trasformazione canonica*.

L'ostacolo maggiore delle trasformazioni di contatto è la mancanza di un metodo pratico per generare la trasformazione per sistemi di ordine elevato.

Sebbene la procedura modale per generici sistemi smorzati *?????* una trasformazione nello spazio di stato per disaccoppiare le equazioni del moto, la trasformazione non è di contatto. Vari approcci a sistemi flessibili giroscopici sono stati considerati un'analisi modale, anche se non rappresentano l'analisi modale "genuina".

In molti casi l'approccio modale consiste solo nel rappresentare gli spostamenti elastici come serie di funzioni ammissibili; tale procedura consente di discretizzare un sistema continuo, ma non di determinare un sistema di equazioni disaccoppiate. Un tale approccio del tipo Rayleigh-Ritz, noto come *metodo dei modi assunti*, non è un'analisi modale "genuina", in quanto le funzioni ammissibili usate per rappresentare il moto degli elementi flessibili rotanti consistono dei modi naturali degli elementi non rotanti.

Per sistemi discreti, poi, l'approccio modale è stato confinato alla sola deformazione elastica. Esso però lascia le equazioni del moto accoppiate.

Nessun metodo che non porti ad un disaccoppiamento delle equazioni differenziali del moto può essere considerato un'analisi modale nel vero senso della parola.

1.7.1 Energia cinetica ed energia potenziale

Si consideri un sistema continuo. Se esso viene eccitato da una forza esterna il moto corrispondente non ha periodicità e certamente non è sinusoidale. Si consideri una trave incastrata eccitata con un impulso. Sperimentalmente si constata che lo spostamento di un suo generico punto, di ascissa x , ha uno spostamento:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(x) \text{sen}(\omega_i t + \varphi_i)$$

dato dalla sovrapposizione di infinite onde armoniche di pulsazione ω_i , fase φ_i e ampiezza $A_i(x)$. Inoltre si osserva che gli altri punti vibrano con medesime ω_i , φ_i ma con diverse ampiezze. Le

pulsazioni ω_i , che caratterizzano tutte le oscillazioni libere, indipendentemente dal punto e dalle condizioni iniziali, sono dette *pulsazioni proprie* o *naturali del sistema*.

Eccitando una trave con un impulso doppio si notano le stesse forme delle $A_i(x)$, ma aventi ampiezza doppia. Posto $B_i(x)$ come fattore di scala e dette $\Phi_i(x)$ i *modi di vibrazione*, ossia le forme della deformazione, che come ω_i caratterizzano tutte le oscillazioni libere, indipendentemente dalle condizioni iniziali, si ha:

$$A_i(x) = B_i\Phi_i(x).$$

Quindi lo *spostamento di un generico punto sulla trave* è:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i\Phi_i(x) \text{sen}(\omega_i t + \varphi_i).$$

L'energia associata ad ogni modo di una struttura non smorzata *non si trasferisce agli altri modi* (condizione di ortogonalità-disaccoppiamento tra i modi). Eccitandone uno solo, la struttura vibra secondo quel modo solamente.

In presenza di piccoli smorzamenti ($\zeta \in [0.01, 0.1]$) in modo approssimato:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i\Phi_i(x) e^{-\zeta_i\omega_i t} \text{sen}(\omega_i t + \varphi_i), \quad \zeta \in [0.01, 0.1].$$

In realtà quando c'è lo smorzamento i modi sono accoppiati e l'energia si può trasferire tra modi di diverse frequenze.

Si consideri un sistema soggetto a forze conservative (cioè derivabili da una funzione energia potenziale \mathcal{U} , funzione della sola posizione). Siano q_1, \dots, q_n le coordinate generalizzate; l'origine sia un punto di equilibrio e si ponga $\mathcal{U}(0) = 0$. Sviluppando in serie di Taylor attorno al punto di equilibrio si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(q_1, \dots, q_n) = & \mathcal{U}(0) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_1} \Big|_{q_1, \dots, q_n=0} q_1 + \dots + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_n} \Big|_{q_1, \dots, q_n=0} q_n \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q_1^2} \Big|_{q_1, \dots, q_n=0} q_1^2 + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q_n^2} \Big|_{q_1, \dots, q_n=0} q_n^2 + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q_1, \dots, q_n=0} q_i q_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q_j \partial q_i} \Big|_{q_1, \dots, q_n=0} q_j q_i \end{aligned}$$

in cui tutte le derivate sono calcolate nel punto di equilibrio.

Ovviamente:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q_j \partial q_i}.$$

Per l'equilibrio il lavoro virtuale è nullo:

$$\delta W = F\delta r = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_1} \Big|_{q_1, \dots, q_n=0} \delta q_1 + \dots - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_n} \Big|_{q_1, \dots, q_n=0} \delta q_n = 0,$$

per cui essendo le coordinate indipendenti:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} \Big|_{q_1, \dots, q_n=0} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Per piccole oscillazioni si possono trascurare le potenze di ordine superiore a due e dunque:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(q_1, \dots, q_n) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q_1, \dots, q_n=0} q_i q_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j, \\ k_{ij} &= k_{ji} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q_1, \dots, q_n=0} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q_j \partial q_i} \Big|_{q_1, \dots, q_n=0} \end{aligned}$$

(la matrice di rigidità è dunque simmetrica). L'energia potenziale è quindi una forma quadratica definita positiva (funzione delle coordinate generalizzate).

Anche l'energia cinetica:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

è una forma quadratica definita positiva (funzione delle velocità generalizzate). In forma matriciale:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} q^T K q, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q}, \quad K = (k_{ij}), \quad M = (m_{ij}).$$

Se nell'espressione di \mathcal{U} compaiono termini $q_i q_j$ si ha un *accoppiamento statico*; se in \mathcal{T} compaiono termini $\dot{q}_i \dot{q}_j$ si ha un *accoppiamento dinamico*.

1.7.2 Sistemi discreti ad n gradi di libertà non smorzati

Il modello di un sistema dinamico ad n gradi di libertà è per solito rappresentato da n carrelli di massa m_1, \dots, m_n , separati tra loro da molle; il primo e l'ultimo carrello sono collegati con una molla alle pareti. Le $n+1$ molle hanno costanti elastiche k_1, \dots, k_{n+1} . Il piano è privo di attrito.

La prima legge cardinale si scrive

$$M \ddot{\mathbf{x}}(t) + K \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t),$$

con:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Si cerca una soluzione del tipo:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u} \varphi(t),$$

con \mathbf{u} vettore ad n componenti e $\varphi(t)$ funzione del tempo non identicamente nulla. Tale soluzione rappresenta un moto sincrono di tutti i gradi di libertà. Sostituendo tale soluzione nell'equazione differenziale scritta nel caso di oscillazioni libere si ha:

$$M \mathbf{u} \ddot{\varphi}(t) + K \mathbf{u} \varphi(t) = 0,$$

da cui:

$$\mathbf{u} \ddot{\varphi}(t) = -M^{-1} K \mathbf{u} \varphi(t),$$

e quindi:

$$\mathbf{u} = -M^{-1} K \frac{\varphi(t)}{\ddot{\varphi}(t)} \mathbf{u},$$

sicch  deve essere:

$$-M^{-1}K \frac{\varphi(t)}{\ddot{\varphi}(t)} = I_{n \times n}$$

con $I_{n \times n}$ la matrice identit  $n \times n$. Pertanto

$$\frac{\ddot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} I_{n \times n} = -M^{-1}K = -\lambda I_{n \times n}, \quad \lambda = \text{costante.}$$

Quindi:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\lambda \varphi(t).$$

Perci :

$$(-\lambda M + K)\mathbf{u}\varphi(t) = 0,$$

la quale, per il teorema di Rouch -Capelli, ha soluzione se e solo se:

$$|-\lambda M + K| = 0, \quad \text{ovvero:} \quad |\lambda I_{n \times n} - M^{-1}K| = 0.$$

Siano: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori e $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ gli autovettori. Per determinare univocamente gli autovettori si impone la *condizione di normalizzazione rispetto alle masse*:

$$\mathbf{u}_i^T M \mathbf{u}_i = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Essa implica l'*ortogonalit  rispetto alle masse*:

$$\begin{aligned} (-\lambda M + K)\mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad & -\lambda_k \mathbf{u}_h^T M \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_h^T K \mathbf{u}_k = 0 \\ & -\lambda_h \mathbf{u}_k^T M \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_k^T K \mathbf{u}_h = 0 \end{aligned}$$

e poich  M e K sono simmetriche, trasponendo la prima e lasciando invariata la seconda:

$$\begin{aligned} -\lambda_k \mathbf{u}_k^T M \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_k^T K \mathbf{u}_h &= 0 \\ -\lambda_h \mathbf{u}_k^T M \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_k^T K \mathbf{u}_h &= 0 \\ \hline (\lambda_h - \lambda_k) \mathbf{u}_k^T M \mathbf{u}_h &= 0 \end{aligned}$$

e poich  $\lambda_h - \lambda_k \neq 0$:

$$\mathbf{u}_k^T M \mathbf{u}_h = 0, \quad \forall k, h \mid k \neq h.$$

Le *pulsazioni proprie* sono: $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, n$. Pertanto:

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega_i^2 \varphi(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

le cui soluzioni generali sono:

$$\varphi_i(t) = \bar{A}_i \sin \omega_i t + \bar{B}_i \cos \omega_i t, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ad esse corrispondono le n soluzioni dell'equazione del moto omogenea:

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{u}_i(\bar{A}_i \sin \omega_i t + \bar{B}_i \cos \omega_i t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Essendo queste n soluzioni indipendenti, la soluzione generale dell'equazione del moto omogenea   data dalla combinazione lineare:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}_i(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i (A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t),$$

ove si è posto:

$$A_i = c_i \bar{A}_i, \quad B_i = c_i \bar{B}_i.$$

Le $2n$ costanti arbitrarie A_i, B_i si determinano imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i B_i \\ \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \omega_i A_i. \end{cases}$$

Trasponendo e postmoltiplicando per $M\mathbf{u}_j$ si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0^T M\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^n B_i \mathbf{u}_i^T M\mathbf{u}_j \\ \dot{\mathbf{x}}_0^T M\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^n \omega_i A_i \mathbf{u}_i^T M\mathbf{u}_j, \end{cases}$$

ed avendo imposto l'ortogonalità rispetto alle masse:

$$\begin{cases} A_i = \frac{1}{\omega_i} \dot{\mathbf{x}}_0^T M\mathbf{u}_i \\ B_i = \mathbf{x}_0^T M\mathbf{u}_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Si può vedere che se le condizioni iniziali sono:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\mathbf{u}_j \\ 0 \end{pmatrix}$$

(se cioè il sistema è inizialmente deformato secondo l'autovettore \mathbf{u}_j ed viene abbandonato a sé con velocità nulla), allora:

$$\begin{cases} A_i = 0 \\ B_i = c\mathbf{u}_j^T M\mathbf{u}_i = \begin{cases} c & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{cases}$$

e la soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea diventa:

$$\mathbf{x}(t) = c\mathbf{u}_j \cos\omega_j t = \mathbf{x}_0 \cos\omega_j t,$$

ossia l'evoluzione viene confinata al sottospazio generato da \mathbf{u}_j , che viene percorso con legge oraria di tipo $\cos\omega_j t$.

Si considerino ora le nuove coordinate:

$$\mathbf{z} = T^{-1}\mathbf{x},$$

ove:

$$T = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n).$$

Dunque:

$$\mathbf{x} = T\mathbf{z} \quad \Rightarrow \quad MT\ddot{\mathbf{z}} + KT\mathbf{z} = 0,$$

e premoltiplicando per T^T e ricordando la condizione di ortonormalità:

$$T^T MT = I_{n \times n},$$

si ha:

$$\ddot{\mathbf{z}} + T^T KT\mathbf{z} = 0.$$

Ora:

$$(-\lambda_i M + K)\mathbf{u}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

ossia:

$$M(\lambda_1 \mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \lambda_n \mathbf{u}_n) = K(\mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_n),$$

che può scriversi anche:

$$M(\mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = K(\mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_n),$$

e cioè:

$$MT\Lambda = KT,$$

ove:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \omega_n^2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto:

$$T^T MT\Lambda = \Lambda = T^T KT,$$

ossia T diagonalizza sia M che K . L'equazione omogenea del moto diventa, nelle nuove coordinate modali:

$$\ddot{\mathbf{z}}(t) + \Lambda \mathbf{z} = 0,$$

mentre l'equazione del moto diventa:

$$\ddot{\mathbf{z}}(t) + \Lambda \mathbf{z} = T^T \mathbf{f}(t),$$

in cui le equazioni sono *disaccoppiate*.

Riassumendo data l'equazione differenziale: $M\ddot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$, con M e K simmetriche, si devono calcolare gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di $M^{-1}K$ e i corrispondenti autovettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$. Si determinano le matrici $T = (\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n)$ e $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. L'equazione del moto diviene: $\ddot{\mathbf{z}}(t) + \Lambda \mathbf{z} = T^T \mathbf{f}(t)$. Per passare dalle coordinate modali a quelle reali si calcola: $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$.

Un caso particolare: smorzamento isteretico

Un caso particolare facilmente trattabile è quello in cui si ha uno smorzamento strutturale (isteretico) sicché l'equazione del moto è:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + (K + jH)\mathbf{x} = \mathbf{f},$$

ossia è uguale a quella in cui $\bar{C} = 0$, $\bar{K} = K + jH$ ed $\bar{M} = M$. Gli autovalori soluzioni dell'equazione:

$$|\lambda M - (K + jH)| = 0$$

sono:

$$\lambda_i = a_i + jb_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si pone:

$$\omega_i^2 = a_i, \quad \eta_i \omega_i^2 = b_i,$$

per cui:

$$\lambda_i = \omega_i^2 + j\eta_i\omega_i^2, \quad i = 1, \dots, n,$$

con:

$$\eta_i = \frac{b_i}{a_i}$$

detto *fattore di perdita* associato all' i -esimo modo.

Si calcolano quindi gli n autovettori complessi (non coniugati in generale) $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ normalizzati rispetto alle masse:

$$\mathbf{u}_i^T M \mathbf{u}_i = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Posto:

$$T = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n),$$

essa implica (come nel caso generale) la *condizione di ortogonalità*:

$$\begin{aligned} T^T M T &= I_{n \times n} \\ T^T (K + jH) T &= \Lambda. \end{aligned}$$

Considerata la trasformazione nelle coordinate modali: $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$, si hanno le equazioni del moto disaccoppiate:

$$\ddot{\mathbf{z}} + \Lambda \mathbf{z} = T^T \mathbf{f}.$$

1.7.3 Sistemi discreti ad n gradi di libertà smorzati

Caso approssimato

Se nel sistema sono presenti forze dissipative di tipo viscoso l'equazione dinamica che descrive il moto del sistema è:

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t).$$

Considerando il cambiamento di coordinate: $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$ e premoltiplicando per T^T si ha:

$$\ddot{\mathbf{z}}(t) + T^T C T \dot{\mathbf{z}}(t) + \Lambda \mathbf{z}(t) = T^T \mathbf{f}(t).$$

In generale $T^T C T$ non sarà una matrice diagonale. Spesso però i termini fuori della diagonale principale sono di qualche ordine di grandezza inferiori a quelli della diagonale per cui si può supporre, in prima approssimazione, che $T^T C T$ sia diagonale e che quindi le equazioni siano disaccoppiate. Si pone:

$$T^T C T \simeq 2\zeta\sqrt{\Lambda} = 2\zeta \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

assegnando così a tutti i modi il medesimo smorzamento, ovvero:

$$T^T C T \simeq \begin{pmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2\zeta_n\omega_n \end{pmatrix}$$

se si assegna uno smorzamento diverso ad ogni modo. Considerando per semplicità il primo caso:

$$\ddot{\mathbf{z}}(t) + 2\zeta\sqrt{\Lambda} \dot{\mathbf{z}}(t) + \Lambda \mathbf{z}(t) = T^T \mathbf{f}(t),$$

che è l'equazione della dinamica in coordinate modali.

Caso esatto

Se T^TCT non può ritenersi diagonale, allora si deve fare un'analisi modale completa (l'alternativa è integrare numericamente le equazioni senza disaccoppiarle). All'equazione differenziale del moto si aggiunge allora l'identità:

$$M\dot{\mathbf{x}} - M\dot{\mathbf{x}} = 0,$$

ottenendo così l'equazione:

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ M & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{pmatrix},$$

che può scriversi:

$$A\dot{\mathbf{y}} + B\mathbf{y} = \mathbf{q},$$

ovvero:

$$\dot{\mathbf{y}} = -A^{-1}B\mathbf{y} + A^{-1}\mathbf{q},$$

con:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & C \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}.$$

Sia A che B sono due matrici $2n \times 2n$ reali e simmetriche. La soluzione dell'equazione è, come noto:

$$\mathbf{y}(t) = e^{-A^{-1}Bt}\mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{-A^{-1}B(t-\tau)}A^{-1}\mathbf{q}(\tau) d\tau.$$

La matrice dinamica è: $-A^{-1}B$ e i $2n$ autovalori sono le soluzioni dell'equazione:

$$|\lambda I_{2n \times 2n} + A^{-1}B| = 0,$$

e possono essere indicati con¹⁷:

$$\lambda_i = -\omega_i\zeta_i \pm j\omega_i\sqrt{1 - \zeta_i^2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Gli autovettori corrispondenti sono Φ_i e $\bar{\Phi}_i$, $i = 1, \dots, n$ (ciascuno con $2n$ componenti).

Poiché:

$$\begin{aligned} (A\lambda_k + B)\Phi_k = 0 & \Rightarrow \lambda_k A\Phi_k = -B\Phi_k & \Rightarrow \lambda_k \Phi_k^T A\Phi_k = -\Phi_k^T B\Phi_k \\ (A\lambda_h + B)\Phi_h = 0 & \Rightarrow \lambda_h A\Phi_h = -B\Phi_h & \Rightarrow \lambda_h \Phi_h^T A\Phi_h = -\Phi_h^T B\Phi_h \end{aligned}$$

e dunque, trasponendo la prima e ricordando che A e B sono simmetriche:

$$\lambda_k \Phi_k^T A\Phi_h = -\Phi_k^T B\Phi_h$$

$$\lambda_h \Phi_h^T A\Phi_k = -\Phi_h^T B\Phi_k$$

$$(\lambda_k - \lambda_h)\Phi_k^T A\Phi_h = 0$$

Dunque per $k \neq h$:

$$\Phi_k^T A\Phi_h = 0$$

$$\Phi_k^T B\Phi_h = 0,$$

¹⁷Ovviamente dall'equazione caratteristica si ricavano: $\lambda_i = a_i + jb_i$, $i = 1, \dots, n$ e quindi si calcolano: $\omega_{n_i} = \omega_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$, $\zeta_i = -\frac{a_i}{\omega_i}$, $i = 1, \dots, n$.

ossia vale la *proprietà di ortogonalità* degli autovettori rispetto ad A e B . Posto:

$$\Delta = (\Phi_1 \quad \bar{\Phi}_1 \quad \cdots \quad \Phi_n \quad \bar{\Phi}_n)$$

si ha allora:

$$\Delta^T A \Delta = \begin{pmatrix} \Phi_1^T A \Phi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\Phi}_1^T A \bar{\Phi}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\Phi}_n^T A \bar{\Phi}_n \end{pmatrix} = A_d$$

$$\Delta^T B \Delta = \begin{pmatrix} \Phi_1^T B \Phi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\Phi}_1^T B \bar{\Phi}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\Phi}_n^T B \bar{\Phi}_n \end{pmatrix} = B_d,$$

per cui considerata la trasformazione:

$$\mathbf{y} = \Delta \mathbf{z}$$

in cui cioè:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \Delta \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} \mathbf{z} \Rightarrow \begin{matrix} \mathbf{x} = \Delta_2 \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{x}} = \Delta_1 \mathbf{z}, \end{matrix}$$

le equazioni del moto possono essere disaccoppiate:

$$\Delta^T A \Delta \dot{\mathbf{z}}(t) + \Delta^T B \Delta \mathbf{z}(t) = \Delta^T \mathbf{q}(t) \Rightarrow A_d \dot{\mathbf{z}}(t) + B_d \mathbf{z}(t) = \Delta^T \mathbf{q}(t)$$

e possono essere facilmente risolte. Questo approccio è dovuto a Duncan.

Riassumendo data l'equazione differenziale: $M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$, con M , C e K simmetriche, si devono calcolare gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ di $-A^{-1}B = -\begin{pmatrix} 0 & M \\ M & C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$ e i corrispondenti autovettori $\Phi_1, \bar{\Phi}_1, \dots, \Phi_n, \bar{\Phi}_n$. Si determina la matrice $\Delta = (\Phi_1 \quad \bar{\Phi}_1 \quad \cdots \quad \Phi_n \quad \bar{\Phi}_n)$. L'equazione del moto diviene: $\Delta^T A \Delta \dot{\mathbf{z}}(t) + \Delta^T B \Delta \mathbf{z}(t) = A_d \dot{\mathbf{z}}(t) + B_d \mathbf{z}(t) = \Delta^T \mathbf{q}(t)$, in cui: $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}$. Per passare dalle coordinate modali a quelle reali si calcola: $\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \Delta \mathbf{z}$.

Un caso particolare: C combinazione lineare di M e K

Un caso particolare di interesse è quello in cui la matrice di smorzamento viscoso C è una combinazione lineare, tramite due costanti α e β , delle matrici di massa e di rigidità:

$$C = \alpha M + \beta K.$$

Considerata allora l'equazione:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = 0$$

e determinata la matrice $T = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n)$ costituita dagli autovettori associati a tale equazione scelti in modo tale che: $T^T M T = I_{n \times n}$ (si ricorda inoltre che $T^T K T = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$) allora considerata la trasformazione nelle coordinate modali: $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$, l'equazione differenziale del moto:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + (\alpha M + \beta K)\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f}$$

diventa:

$$T^T M T \ddot{\mathbf{z}} + (\alpha T^T M T + \beta T^T K T) \dot{\mathbf{z}} + T^T K T \mathbf{z} = T^T \mathbf{f},$$

ovvero:

$$\ddot{\mathbf{z}} + (\alpha I_{n \times n} + \beta \Lambda) \dot{\mathbf{z}} + \Lambda \mathbf{z} = T^T \mathbf{f},$$

in cui:

$$T^T C T = \alpha I_{n \times n} + \beta \Lambda = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha + \beta \omega_n^2 \end{pmatrix}.$$

Si può porre:

$$T^T C T = \begin{pmatrix} 2\zeta_1 \omega_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2\zeta_n \omega_n \end{pmatrix},$$

imponendo che:

$$\zeta_i = \frac{\alpha + \beta \omega_i^2}{\omega_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

1.7.4 Sistemi discreti ad n gradi di libertà: caso generale

Assenza di smorzamento

Nel caso generale in cui le matrici M e K non sono simmetriche l'equazione caratteristica ed il problema degli autovalori sono sempre

$$|\lambda M - K| = 0, \quad (\lambda M - K) \mathbf{u} = 0,$$

ma non valgono più le condizioni di ortogonalità. Per avere delle condizioni di ortogonalità (e quindi disaccoppiare le equazioni) occorre considerare anche gli autovettori sinistri.

Supponiamo che gli autovalori siano distinti (altrimenti si considerano quelli generalizzati) e siano $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, gli autovettori destri e sinistri. Poiché se $\lambda_i \neq \lambda_j$:

$$\begin{aligned} \lambda_i M \mathbf{u}_i = K \mathbf{u}_i &\Rightarrow \lambda_i \mathbf{v}_j^T M \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_j^T K \mathbf{u}_i \\ \lambda_j \mathbf{v}_j^T M = \mathbf{v}_j^T K &\Rightarrow \frac{\lambda_j \mathbf{v}_j^T M \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_j^T K \mathbf{u}_i}{(\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{v}_j^T M \mathbf{u}_i = 0} \end{aligned}$$

si ricava la *condizione di ortogonalità*:

$$\mathbf{v}_j^T M \mathbf{u}_i = 0, \quad j \neq i.$$

Tali autovettori possono poi essere *normalizzati* imponendo che:

$$\mathbf{v}_j^T M \mathbf{u}_i = \delta_{ij},$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix} M (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n) = I_{n \times n}.$$

Considerata la trasformazione: $\mathbf{x} = T \mathbf{z}$, con:

$$T = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n),$$

e premoltiplicando per

$$V^T = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix},$$

l'equazione differenziale:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f}$$

diventa:

$$V^T MT\ddot{\mathbf{z}} + V^T KT\mathbf{z} = V^T \mathbf{f}$$

in cui:

$$V^T MT = I_{n \times n}$$

$$V^T KT = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{pmatrix}.$$

Infatti:

$$(-\lambda_i M + K)\mathbf{u}_i = 0 \Rightarrow M(\lambda_1 \mathbf{u}_1 \cdots \lambda_n \mathbf{u}_n) = K(\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n) \Rightarrow M\Lambda = KT \Rightarrow \Lambda = V^T KT.$$

Pertanto le equazioni risultano disaccoppiate:

$$\ddot{\mathbf{z}} + \Lambda\mathbf{z} = V^T \mathbf{f}.$$

Riassumendo data l'equazione differenziale: $M\ddot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$, con M e K genericamente non simmetriche, si devono calcolare gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di $M^{-1}K$ e i corrispondenti autovettori destri

e sinistri $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Si impone la condizione di normalizzazione: $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix} M(\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n) =$

$I_{n \times n}$ e si determinano le matrici $T = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n)$, $V^T = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix}$ e $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. L'equazione

del moto diviene: $\ddot{\mathbf{z}}(t) + \Lambda\mathbf{z} = V^T \mathbf{f}(t)$. Per passare dalle coordinate modali a quelle reali si calcola: $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$.

Osservazione. é ovvio che il tutto è equivalente a porre $A = M^{-1}K$ e ricavare gli autovettori destri e sinistri di:

$$(\lambda I_{n \times n} - A)\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v}^T(\lambda I_{n \times n} - A) = 0;$$

si verifica che vale la condizione di ortogonalità:

$$\lambda_i \mathbf{v}_j^T \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_j^T A \mathbf{u}_i$$

$$\frac{\lambda_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_j^T A \mathbf{u}_i}{(\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{v}_j^T \mathbf{u}_i = 0} \Rightarrow \mathbf{v}_j^T \mathbf{u}_i = 0, \quad j \neq i,$$

normalizzando poi gli autovettori imponendo che:

$$\mathbf{v}_j^T \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{v}_j = \delta_{ij},$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix} (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix} (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n) = I_{n \times n},$$

il che implica che:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix} = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n)^{-1}.$$

Posto:

$$T = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n)$$

e considerata la solita trasformazione in coordinate modali:

$$\mathbf{x} = T\mathbf{z},$$

l'equazione differenziale:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f},$$

scrivibile anche:

$$\ddot{\mathbf{x}} + M^{-1}K\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{f},$$

diventa:

$$\ddot{\mathbf{z}} + T^{-1}M^{-1}KT\mathbf{z} = T^{-1}M^{-1}\mathbf{f},$$

ove:

$$T^{-1}M^{-1}KT = T^{-1}AT = \Lambda,$$

come nel caso precedente.

Presenza di smorzamento

Se, più in generale, l'equazione differenziale è:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f},$$

con M , C e K non simmetriche, si considera l'equazione:

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ M & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{pmatrix},$$

ovvero:

$$A\dot{\mathbf{y}} + B\mathbf{y} = \mathbf{q},$$

in cui ora:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & C \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

non sono simmetriche, e dove:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}.$$

Il problema degli autovalori è

$$(\lambda A + B)\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v}^T(\lambda A + B) = 0.$$

Se $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono gli autovettori destri e sinistri ($2n \times 1$) al solito vale la *condizione di ortogonalità*:

$$\begin{aligned} \lambda_i \mathbf{v}_j^T A \mathbf{u}_i &= -\mathbf{v}_j^T B \mathbf{u}_i \\ \lambda_j \mathbf{v}_j^T A \mathbf{u}_i &= -\mathbf{v}_j^T B \mathbf{u}_i \\ \frac{\lambda_j \mathbf{v}_j^T A \mathbf{u}_i}{(\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{v}_j^T A \mathbf{u}_i} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{v}_j^T A \mathbf{u}_i &= \mathbf{v}_j^T \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & C \end{pmatrix} \mathbf{u}_i = 0 \\ & \quad i \neq j \end{aligned}$$

e si impone la *condizione di normalità rispetto alla matrice A*:

$$\mathbf{v}_i^T A \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i^T \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & C \end{pmatrix} \mathbf{u}_i = 1.$$

Pertanto:

$$\mathbf{v}_j^T A \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_j^T \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & C \end{pmatrix} \mathbf{u}_i = \delta_{ij}.$$

Posto:

$$T = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{2n}), \quad V^T = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{2n}^T \end{pmatrix},$$

si considera la trasformazione nelle *coordinate modali* ($2n$ componenti):

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = T \mathbf{z},$$

ottenendo:

$$\dot{\mathbf{z}} + V^T B T \mathbf{z} = V^T \mathbf{q},$$

in cui:

$$V^T B T = -\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_{2n}^2 \end{pmatrix},$$

in quanto:

$$(\lambda_i A + B) \mathbf{u}_i = 0 \Rightarrow A (\lambda_1 \mathbf{u}_1 \cdots \lambda_n \mathbf{u}_{2n}) = -B (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{2n}) \Rightarrow A T \Lambda = -B T \Rightarrow \Lambda = -V^T B T.$$

Pertanto le equazioni risultano disaccoppiate:

$$\dot{\mathbf{z}} - \Lambda \mathbf{z} = V^T \mathbf{q}.$$

Riassumendo data l'equazione differenziale: $M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$, con M , C e K genericamente *non* simmetriche, si devono calcolare gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ di $-A^{-1}B = -\begin{pmatrix} 0 & M \\ M & C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$ e i corrispondenti autovettori destri e sinistri $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2n}$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}$. Si impone la condizione di normalizzazione: $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{2n}^T \end{pmatrix} A (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{2n}) = I_{2n \times 2n}$ e si determinano le matrici $T = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{2n})$, $V^T = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{2n}^T \end{pmatrix}$ e $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$. L'equazione del moto diviene: $\dot{\mathbf{z}}(t) - \Lambda \mathbf{z} = V^T \mathbf{q}(t)$, in cui: $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}$. Per passare dalle coordinate modali a quelle reali si calcola: $\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = T \mathbf{z}$.

Osservazione. Vale un'osservazione analoga a quella del paragrafo precedente.

1.7.5 Alcune proprietà interessanti[?][?]

Data la matrice $\mathcal{R}_{bi} = R_2(q)R_1^T(q)$ data dalla 1.8.12, con $R_1(q)$, $R_2(q)$ date dalle 1.8.12, si noti che

$$R_1(q) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q & R(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = 0$$

$$R_2(q) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q & R^T(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = 0$$

per cui

$$\dot{R}_1(q) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + R_1(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{R}_1(q) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = -R_1(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix}$$

e

$$\dot{R}_2(q) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = -R_2(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix}.$$

Inoltre è facile verificare che

$$\dot{R}_1(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{q} & \dot{R}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{q} & \dot{q}_0 I + \tilde{\dot{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0$$

$$\dot{R}_2(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{q} & \dot{R}^T(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{q} & \dot{q}_0 I - \tilde{\dot{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0.$$

Ora mostriamo che

$$R_2(q)\dot{R}_1^T(q) = \dot{R}_2(q)R_1^T(q).$$

Infatti si noti innanzitutto che $\tilde{\dot{q}} = \dot{\tilde{q}}$ e che

$$q\dot{q}^T + \tilde{q}\dot{\tilde{q}} = \dot{q}q^T + \dot{\tilde{q}}\tilde{q}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} R_2(q)\dot{R}_1^T(q) &= \begin{pmatrix} -q & R^T(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{q}^T \\ R^T(\dot{q}) \end{pmatrix} = q\dot{q}^T + R^T(q)R^T(\dot{q}) = \\ &= q\dot{q}^T + (q_0 I - \tilde{q})(\dot{q}_0 I - \tilde{\dot{q}}) = q\dot{q}^T + q_0 \dot{q}_0 I - q_0 \dot{\tilde{q}} - \dot{q}_0 \tilde{q} + \tilde{q}\dot{\tilde{q}} = \\ &= q\dot{q}^T + \tilde{q}\dot{\tilde{q}} + (q_0 \dot{q}_0 I - q_0 \dot{\tilde{q}} - \dot{q}_0 \tilde{q}) \\ \dot{R}_2(q)R_1^T(q) &= \begin{pmatrix} -\dot{q} & R^T(\dot{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q^T \\ R^T(q) \end{pmatrix} = \dot{q}q^T + R^T(\dot{q})R^T(q) = \\ &= \dot{q}q^T + (\dot{q}_0 I - \tilde{\dot{q}})(q_0 I - \tilde{q}) = \dot{q}q^T + q_0 \dot{q}_0 I - \dot{q}_0 \tilde{q} - q_0 \tilde{\dot{q}} + \tilde{\dot{q}}\tilde{q} = \\ &= \dot{q}q^T + \tilde{\dot{q}}\tilde{q} + (q_0 \dot{q}_0 I - q_0 \tilde{\dot{q}} - \dot{q}_0 \tilde{q}) \end{aligned}$$

e dal confronto di queste due espressioni si ricava la tesi 1.8.14.

Derivando $\mathcal{R}_{bi} = R_2(q)R_1^T(q)$ ed usando la 1.8.14 si trova poi

$$\dot{\mathcal{R}}_{bi} = \dot{R}_2(q)R_1^T(q) + R_2(q)\dot{R}_1^T(q) = 2\dot{R}_2(q)R_1^T(q) = 2R_2(q)\dot{R}_1^T(q).$$

Derivando nuovamente:

$$\ddot{\mathcal{R}}_{bi} = 2\ddot{R}_2(q)R_1^T(q) + 2\dot{R}_2(q)\dot{R}_1^T(q) = 2\dot{R}_2(q)\dot{R}_1^T(q) + 2R_2(q)\ddot{R}_1^T(q),$$

per cui

$$\ddot{R}_2(q)R_1^T(q) = R_2(q)\ddot{R}_1^T(q).$$

Si noti poi che essendo $\begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = 1$, derivando si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 & \dot{q}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0,$$

ossia, poiché $\dot{q}^T q = q^T \dot{q}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 & \dot{q}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0.$$

Così pure:

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_0 & \ddot{q}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{q}_0 & \dot{q}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0.$$

Ricordando la 1.8.12:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} S(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{2} R_2^T(q) \omega,$$

ove

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix}, \quad R_2^T(q) = \begin{pmatrix} -q^T \\ R(q) \end{pmatrix}$$

dalle 1.8.14 si trova anche che:

$$\begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} S(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} R_2^T(q) \omega$$

per qualsiasi ω . Ciò si poteva anche determinare con un calcolo diretto:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} S(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q^T \omega & -q_0 \omega^T - q^T \tilde{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = 0, \\ \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} R_2^T(q) \omega &= \left[-q_0 q^T + q^T (q_0 I + \tilde{q}) \right] \omega = 0. \end{aligned}$$

Si noti che la matrice $S(\omega)$ è antisimmetrica: $S^T(\omega) = -S(\omega)$. Inoltre vale la seguente relazione:

$$R_2(q) S(\omega) R_2^T(q) = -\tilde{\omega},$$

come si può verificare svolgendo i (lungi) calcoli e tenendo conto che:

$$\tilde{\omega} \tilde{q} = q \omega^T - q^T \omega I, \quad \tilde{q} \tilde{\omega} = \omega q^T - q^T \omega I,$$

e verificando che

$$-q_0^2 \tilde{\omega} + \left(\tilde{q} \omega q^T + q \omega^T \tilde{q} - q^T \omega \tilde{q} \right) = -q_0^2 \tilde{\omega} - q^T q \tilde{\omega} = -\tilde{\omega}.$$

Si noti inoltre che vale la relazione:

$$\dot{R}_2^T(q) = -\frac{1}{2} \left[S(\omega) R_2^T(q) + 2 \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} \omega^T \right].$$

Infatti:

$$\dot{R}_2^T(q) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} q_0 \omega^T + \frac{1}{2} \omega^T \tilde{q} \\ -\frac{1}{2} q^T \omega I + \frac{1}{2} q_0 \tilde{\omega} + \frac{1}{2} (q \times \omega) \times \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_0 \omega^T + \omega^T \tilde{q} \\ -q^T \omega I + q_0 \tilde{\omega} + \omega q^T - q \omega^T \end{pmatrix},$$

in cui si è usato il fatto che $(q \times \omega) \times = \omega q^T - q \omega^T$, e

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left[S(\omega) R_2^T(q) + 2 \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} \omega^T \right] &= -\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q^T \\ q_0 I + \tilde{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2q_0 \omega^T \\ 2q \omega^T \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_0 \omega^T + \omega^T \tilde{q} \\ \omega q^T + q_0 \tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{q} - 2q \omega^T \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_0 \omega^T + \omega^T \tilde{q} \\ -q^T \omega I + q_0 \tilde{\omega} + \omega q^T - q \omega^T \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

in cui si sono usate le 1.8.14.

Mostriamo che:

$$\dot{R}_4^T(q) R_4(q) = \frac{1}{2} S(\omega).$$

Infatti per la 1.8.12 e la 1.8.14:

$$\begin{aligned} \dot{R}_4^T(q) R_4(q) &= \begin{pmatrix} \dot{q}_0 & \dot{q}^T \\ -\dot{R}_2(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & -R_2^T(q) \\ q \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \omega^T R_2(q) \\ \frac{1}{2} [-R_2(q) S(\omega) + 2\omega \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & -R_2^T(q) \\ q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ma:

$$\frac{1}{2} \omega^T R_2(q) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = 0 \quad \text{per la 1.22}$$

$$-\frac{1}{2} \omega^T R_2(q) R_2^T(q) = -\frac{1}{2} \omega^T \quad \text{per la 1.8.12}$$

$$\frac{1}{2} [-R_2(q) S(\omega) + 2\omega \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \omega \quad \text{per calcolo diretto (lungo)}$$

$$-\frac{1}{2} [-R_2(q) S(\omega) + 2\omega \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix}] R_2^T(q) = -\frac{1}{2} \tilde{\omega} \quad \text{per le 1.8.14, 1.22.}$$

Pertanto poiché per l'ortonormalità $R_4(q) R_4^T(q) = R_4^T(q) R_4(q) = I$, si ha:

$$\dot{R}_4(q) = -R_4(q) \dot{R}_4^T(q) R_4(q) = -\frac{1}{2} R_4(q) S(\omega).$$

Dunque:

$$\dot{R}_4(q) = -\frac{1}{2} R_4(q) S(\omega).$$

Dalla 1.8.12:

$$T(q) = R_4^2(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{ib}(q) \end{pmatrix}$$

derivando rispetto al tempo e usando la 1.8.14 si ha:

$$\begin{aligned} \dot{T}(q) &= R_4(q) \dot{R}_4(q) + \dot{R}_4(q) R_4(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mathcal{R}}_{ib}(q) \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{2} R_4^2(q) S(\omega) - \frac{1}{2} R_4(q) S(\omega) R_4(q) = \\ &= -\frac{1}{2} T(q) [S(\omega) + R_4^T(q) S(\omega) R_4(q)], \end{aligned}$$

avendo considerato che $R_4(q)$ è ortonormale. Sviluppando i (lunghi) calcoli:

$$S(\omega) + R_4^T(q)S(\omega)R_4(q) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega^T \\ -\omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\tilde{\omega} \end{pmatrix},$$

per cui

$$\dot{T}(q) = T(q) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega} \end{pmatrix}.$$

Da essa si trova la legge di variazione della matrice $\mathcal{R}_{ib}(q)$:

$$\dot{\mathcal{R}}_{ib}(q) = \mathcal{R}_{ib}(q)\tilde{\omega}.$$

Siano v , w e z tre vettori espressi in RF . La loro espressione nella terna inerziale RC è

$$\mathbf{v} = \mathcal{R}_{ib}v, \quad \mathbf{w} = \mathcal{R}_{ib}w, \quad \mathbf{z} = \mathcal{R}_{ib}z.$$

Ora se

$$z = v \times w = \tilde{v}w, \quad \mathbf{z} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{w},$$

dalla seconda relazione si ha:

$$\mathcal{R}_{ib}z = \tilde{\mathbf{v}}\mathcal{R}_{ib}w,$$

da cui

$$\mathcal{R}_{ib}\tilde{v}w = \tilde{\mathbf{v}}\mathcal{R}_{ib}w.$$

Valendo questa relazione per ogni w si giunge alla conclusione che

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathcal{R}_{ib}\tilde{v}\mathcal{R}_{ib}^T = \mathcal{R}_{ib}\tilde{v}\mathcal{R}_{bi}.$$

Questa relazione vale per qualsiasi vettore, in particolare per il vettore ω :

$$\tilde{\omega} = \mathcal{R}_{ib}\tilde{\omega}\mathcal{R}_{bi},$$

essendo ω e $\tilde{\omega}$ le rappresentazioni della velocità angolare di RF rispetto a RC , espressa in RF e RC

$$\omega = \mathcal{R}_{bi}\tilde{\omega}.$$

Indicando ora con $\frac{d}{dt}$ la derivata nel riferimento inerziale RC , per la legge di Poisson:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} + \omega \times \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} + \tilde{\omega}\mathbf{v}$$

con

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathcal{R}_{ib}\dot{v}.$$

Inoltre poiché $\mathbf{v} = \mathcal{R}_{ib}v$ si ha:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt}v + \mathcal{R}_{ib}\dot{v} = \frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt}v + \dot{\mathbf{v}},$$

(v viene derivato in RF) per cui si deduce che

$$\frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt}v = \tilde{\omega}\mathbf{v} = \tilde{\omega}\mathcal{R}_{ib}v.$$

Valendo questo per ogni v , si conclude che

$$\tilde{\omega} = \frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt}\mathcal{R}_{ib}^T = \frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt}\mathcal{R}_{bi}.$$

Confrontando la 1.8.14 con la 1.8.14:

$$\frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt}\mathcal{R}_{bi} = \mathcal{R}_{ib}\tilde{\omega}\mathcal{R}_{bi},$$

e quindi

$$\frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt} = \mathcal{R}_{ib}\tilde{\omega},$$

ovvero

$$\frac{d\mathcal{R}_{bi}}{dt} = \tilde{\omega}^T\mathcal{R}_{bi} = -\tilde{\omega}\mathcal{R}_{bi}.$$

Infine, sempre dalla 1.8.14

$$\tilde{\omega} = \mathcal{R}_{bi}\tilde{\omega}\mathcal{R}_{ib},$$

per cui

$$\frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt} = \tilde{\omega}\mathcal{R}_{ib},$$

ovvero

$$\frac{d\mathcal{R}_{bi}}{dt} = -\mathcal{R}_{bi}\tilde{\omega}.$$

Data la matrice

$$R(q) = q_0I + \tilde{q} = \begin{pmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix},$$

svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\dot{R}(q)\omega = -\frac{\|\omega\|^2}{2}q.$$

Infatti essendo

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= \frac{1}{2}(-q_1\omega_1 - q_2\omega_2 - q_3\omega_3) & \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(q_3\omega_1 + q_0\omega_2 - q_1\omega_3) \\ \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(q_0\omega_1 - q_3\omega_2 + q_2\omega_3) & \dot{q}_3 &= \frac{1}{2}(-q_2\omega_1 + q_1\omega_2 + q_0\omega_3) \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \dot{R}(q)\omega &= \begin{pmatrix} \dot{q}_0 & -\dot{q}_3 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 & \dot{q}_0 & -\dot{q}_1 \\ -\dot{q}_2 & \dot{q}_1 & \dot{q}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-q_1\omega_1 - q_2\omega_2 - q_3\omega_3)\omega_1 - (-q_2\omega_1 + q_1\omega_2 + q_0\omega_3)\omega_2 \\ (-q_2\omega_1 + q_1\omega_2 + q_0\omega_3)\omega_1 + (-q_1\omega_1 - q_2\omega_2 - q_3\omega_3)\omega_2 \\ -(q_3\omega_1 + q_0\omega_2 - q_1\omega_3)\omega_1 + (q_0\omega_1 - q_3\omega_2 + q_2\omega_3)\omega_2 \\ + (q_3\omega_1 + q_0\omega_2 - q_1\omega_3)\omega_3 \\ -(q_0\omega_1 - q_3\omega_2 + q_2\omega_3)\omega_3 \\ + (-q_1\omega_1 - q_2\omega_2 - q_3\omega_3)\omega_3 \end{pmatrix} = -\frac{\|\omega\|^2}{2}q. \end{aligned}$$

1.8 Structurally Stable Attitude Tracking

1.8.1 Introduction

In this work the problem of tracking a desired trajectory for a rigid spacecraft, in presence of parameter uncertainties, is considered. In practical situations the spacecraft parameters are not completely known. This implies a deterioration of the control behavior, and must be taken into account in order to design a controller with high performances.

In [?] conditions for the controllability of rigid bodies are given, while the first applications of the nonlinear techniques can be found in [?], [?], [?], [?] for the input-output linearization and decoupling. The tracking problem for rigid bodies is analyzed in [?], and different controllers are proposed in case of perfect or imprecise parameter knowledge. A dynamic adaptive controller for tracking a desired trajectory is also proposed in [?], [?] for rigid spacecraft in presence of parameter uncertainties and disturbances acting on the structure. The input-output linearization and decoupling techniques are extended to flexible spacecraft in case of large maneuvers in [?], [?], where a servocompensator is introduced in the control system for augmenting the robustness of the control scheme in presence of parameter uncertainties. The adaptive approach for solving the tracking problem when parameters are unknown is used in [?], whereas in [?] a robust controller for slew maneuvers is designed making use of collocated actuators and sensors, in presence of model uncertainties and disturbance torques. A first example of application of the so called ‘full information’ regulation theory to spacecraft control is given in [?], where a nonlinear controller is designed for achieving low orbit stabilization and asymptotic rejection of the atmospheric drag for a two-body spinning satellite.

A central problem in control theory and applications is to design a control law to achieve asymptotic tracking with disturbance rejection in nonlinear systems. When the class of reference inputs and disturbances are generated by an autonomous differential equations, this problem is called nonlinear output regulation problem, or, alternatively, nonlinear servomechanism problem, see e.g. [?], [?].

Beginning with the pioneering works [?], [?], the nonlinear output regulation problem has been studied intensively during the last decade. Basic results on full information feedback case, error feedback case and the so-called robust output regulation are collected in [?]. For the further robust aspects of the output regulation see [?], [?] and references within there. In particular, it has been shown that the inclusion of an internal model in the controller structure was necessary and sufficient for having robust regulation [?]. Following these ideas in [?], an error feedback controller which relies on the existence of an internal model, which represents an immersion of the exosystem dynamics into an observable one, was presented. This immersion allows the generation, as in the linear case, of all the possible steady-state inputs for the admissible values of the system parameters. Following this approach, in this paper it is derived a robust regulator for the simple case of tracking of a precession trajectory. The system parameter, namely the inertia tensor, is supposed unknown. The derived controller results to ensure better performances over a regulator based on the system nominal parameters.

The paper is organized as follows. In Section 2 the mathematical model is recalled. In Section 3 the robust regulator is derived and, in Section 4, it is tested with some simulations. Some comments conclude the paper.

1.8.2 Mathematical Model of a Rigid Spacecraft and Problem Formulation

The mathematical model of a rigid spacecraft is taken from [?], [?], [?]. The kinematics are described by the unitary quaternions [?], [?]

$$q_0 = \cos \frac{\phi}{2}, \quad q = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} \text{sen} \frac{\phi}{2}$$

subject to the constraint

$$q_0^2 + q^T q = 1. \quad (1.11)$$

With ϕ we indicate the rotation angle about the Euler axis, which is determined by the unit vector $\epsilon = (\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3)^T$ [?]. The spacecraft kinematics are

$$\dot{q} = \frac{1}{2}R(q)\omega \quad (1.12)$$

where the (redundant) equation for q_0 can be derived from the constraint 1.11, and

$$R(q) = \begin{pmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}.$$

As far as the spacecraft dynamics are concerned, let $L = J\omega$ be the total angular momentum of the spacecraft, with ω the spacecraft angular velocity. From Euler theorem one obtains the dynamic equations [?], [?]

$$\dot{\omega} = J^{-1}(-\tilde{\omega}J\omega + u) \quad (1.13)$$

where u is the external torque produced by gas jets, and with \times the vector product.

The control problem is to track a given reference attitude in presence of parameter uncertainties and/or slow variations. The reference attitude is described by the unitary quaternions

$$q_{r0} = \cos \frac{\phi_r}{2}, \quad q_r = \begin{pmatrix} \epsilon_{r1} \\ \epsilon_{r2} \\ \epsilon_{r3} \end{pmatrix} \text{sen} \frac{\phi_r}{2} \quad (1.14)$$

where the angle ϕ_r and the unit vector ϵ_r determine the reference rotation. The error between the actual and the reference attitude is expressed by the error quaternions [?]

$$e = q_{r0}q - q_0q_r - q \times q_r \quad (1.15)$$

(the fourth quaternion e_0 is redundant and can be obtained from the constraint relation). The parameters that we consider unknown or slowly varying (with respect to the system dynamics) are the inertia tensor items. In fact, due to the complexity of the system, it is quite common that these parameters are not perfectly known; in any case, during the operative life, these parameters can vary (examples of causes of variation are the deployment of the appendages, the fuel consumption, etc.). Let us write

$$J = J_0 + \Delta J$$

with J_0 the nominal value of J and ΔJ the error with respect to J_0 . Note that this error is always bounded throughout the whole life of the spacecraft, and affects the tracking precision.

1.8.3 Robust Tracking for Rigid Spacecraft for Precession Motions

In this Section we solve the control problem by using the robust regulation theory. It is usual to refer to the generic system [?], [?], [?]

$$\dot{x} = f(x, w, u, \mu)$$

$$\dot{w} = s(w)$$

$$e = h(x, w, \mu)$$

where the first equation represents the plant to be controlled, the second the so-called exosystem generating the references to be tracked and/or the disturbances to be eliminated, and the third the output tracking error. With μ we indicate the unknown/slowly varying parameters, and we suppose that if $\mu = 0$ one has the nominal values.

We recall that the robust regulation problem is solvable if [?], [?], [?]

- the plant is stabilizable and detectable in the first approximation;
- there exist two mappings, the steady-state zero output submanifold $x_{ss} = \pi(w, \mu)$ and the steady-state input $u_{ss} = \gamma(w, \mu)$, solving the so-called regulation equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(w, \mu)}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w, \mu), w, \gamma(w, \mu), \mu) \\ 0 &= h(\pi(w, \mu), w, \mu) \end{aligned} \quad (1.16)$$

$\forall (w, \mu) \in W_0 \times \mathcal{P}$, with W_0, \mathcal{P} neighborhoods of $w = 0, \mu = 0$ respectively;

- the mapping $\gamma(w, \mu)$ satisfies

$$L_s^q \gamma(w, \mu) = a_0 \gamma(w, \mu) + \dots + a_{q-1} L_s^{q-1} \gamma(w, \mu) \quad (1.17)$$

$\forall (w, \mu) \in W_0 \times \mathcal{P}$, for some real numbers a_0, \dots, a_{q-1} , where $L_s \gamma$ denotes the usual Lie derivative (see [?]);

- for every λ , root of the polynomial $p(\lambda) = \lambda^q + a_{q-1} \lambda^{q-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ with non-negative real part, the matrix

$$\begin{pmatrix} A(0) - \lambda I & B(0) \\ C(0) & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} A(0) &= \partial f / \partial x|_{(0,0,0,0)} \\ B(0) &= \partial f / \partial u|_{(0,0,0,0)} \\ C(0) &= \partial h / \partial x|_{(0,0,0)} \end{aligned}$$

is nonsingular.

In the case under study we consider a reference trajectory described by the reference quaternions 1.14 with

$$\epsilon_r(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ \text{sen} \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_r(t) = \varphi_r$$

where φ_r, ω_0 are constants. Such reference quaternions describe a precession motion about the z -axis, which is a rather interesting case in attitude control. The components of the unit vector $\epsilon_r(t)$ may be considered generated by the following linear exosystem

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} w = Sw, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

and considering as initial conditions

$$w(0) = \begin{pmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

one has

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ \text{sen} \omega_0 t \end{pmatrix}.$$

Therefore,

$$q_{r0} = \cos \frac{\varphi_r}{2} = \text{const}, \quad q_r = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{sen} \frac{\varphi_r}{2}.$$

Observe that in our case

$$w_1^2(t) + w_2^2(t) = 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.18)$$

In order to put in evidence the linear part of the system (1.12), (1.13), (1.15), note that the equilibrium point of interest is

$$q_0 = 1, \quad q = 0, \quad \omega = 0.$$

Considering the translation $\varrho_0 = 1 - q_0$, the origin is an equilibrium. The kinematics 1.12 can be rewritten as

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\omega + \begin{pmatrix} -\varrho_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & -\varrho_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & -\varrho_0 \end{pmatrix} \omega,$$

while the error equation 1.15 becomes

$$e = q_{r0}q - q_r + \varrho_0q_r - q \times q_r.$$

Hence,

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q \\ \omega \end{pmatrix} + Bu + N.L. \\ e = C \begin{pmatrix} q \\ \omega \end{pmatrix} + N.L.$$

with “*N.L.*” the nonlinear terms vanishing at the origin, and

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ J^{-1} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} q_{r0}I & 0 \end{pmatrix}.$$

Clearly, the pairs $(A, B(0))$, (A, C) are stabilizable and detectable, respectively.

Second, we determine the steady-state zero output submanifold $x_{ss} = \pi(w, \mu)$ by imposing to zero the error e . From 1.15 one has

$$\pi_1(w) = \begin{pmatrix} \pi_{1,1}(w) \\ \pi_{1,2}(w) \\ \pi_{1,3}(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \text{sen} \frac{\varphi_r}{2} \\ w_2 \text{sen} \frac{\varphi_r}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Moreover, from 1.12 one gets

$$\omega = 2 \begin{pmatrix} -q^T \\ R(q) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix}$$

since the matrix $\begin{pmatrix} -q^T \\ R(q) \end{pmatrix}$ is left invertible. Hence,

$$\pi_2(w) = \begin{pmatrix} \pi_{2,1}(w) \\ \pi_{2,2}(w) \\ \pi_{2,3}(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0 w_2 \text{sen} \varphi_r \\ \omega_0 w_1 \text{sen} \varphi_r \\ -2\omega_0 \text{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Note that $\pi_1(w)$, $\pi_2(w)$ do not depend from the parameters of the system. Therefore,

$$x_{ss} = \pi(w) = \begin{pmatrix} \pi_1(w) \\ \pi_2(w) \end{pmatrix}$$

do not depend from the parameters of the system.

The steady-state input u_{ss} on $x_{ss} = \pi(w)$ can be computed from 1.13. In fact

$$u = J\dot{w} + \tilde{\omega}Jw$$

so that

$$u_{ss} = \gamma(w, \mu) = \begin{pmatrix} A_1 w_1 \\ A_2 w_2 \\ A_3 w_1 w_2 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

where

$$\begin{aligned} A_1 &= \omega_0^2 \operatorname{sen} \varphi_r \left[2(J_{22} - J_{33}) \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} - J_{11} \right] \\ A_2 &= \omega_0^2 \operatorname{sen} \varphi_r \left[2(J_{11} - J_{33}) \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} - J_{22} \right] \\ A_3 &= \omega_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_r (J_{11} - J_{22}). \end{aligned}$$

We recall that $u_{ss} = \gamma(w, \mu)$ makes invariant $\pi(w, \mu)$.

Third, we need to determine the real numbers a_0, a_1, \dots, a_{q-1} such that the condition 1.17 is satisfied. This leads to the determination of the following immersion [?]

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{11} &= \xi_{12} \\ \dot{\xi}_{12} &= -\omega_0^2 \xi_{11} \\ \dot{\xi}_{21} &= \xi_{22} \\ \dot{\xi}_{22} &= -\omega_0^2 \xi_{21} \\ \dot{\xi}_{31} &= \xi_{32} \\ \dot{\xi}_{32} &= -4\omega_0^2 \xi_{31} \\ u_{ss} &= \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \xi_{31} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In fact,

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= \gamma_1(w) = A_1 w_1 \\ \dot{\xi}_{11} &= \xi_{12} = -\omega_0 A_1 w_2 \\ \dot{\xi}_{12} &= -\omega_0^2 A_1 w_1 = -\omega_0^2 \xi_{11} \\ \xi_{21} &= \gamma_2(w) = A_2 w_2 \\ \dot{\xi}_{21} &= \xi_{22} = \omega_0 A_2 w_1 \\ \dot{\xi}_{22} &= -\omega_0^2 A_2 w_2 = -\omega_0^2 \xi_{21} \\ \xi_{31} &= \gamma_3(w) = A_3 w_1 w_2 \\ \dot{\xi}_{31} &= \xi_{32} = \omega_0 A_3 (w_1^2 - w_2^2) \\ \dot{\xi}_{32} &= -4\omega_0^2 A_3 w_1 w_2 = -4\omega_0^2 \xi_{31}. \end{aligned}$$

The corresponding polynomials are $p_1(\lambda) = p_2(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$, $p_3(\lambda) = \lambda^2 + 4\omega_0^2$.

Finally, it is easy to check that the matrix

$$\begin{pmatrix} A - \lambda I & B(0) \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

has always rank 9 for every root of $p_i(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$, with non-negative real part.

The structure of the controller which solves the RORP is the following [?], [?], [?]

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= (A + B(0)K - G_1C)\zeta_1 + G_1e \\ \dot{\zeta}_2 &= -G_2C\zeta_1 + \Phi\zeta_2 + G_2e \\ u &= K\zeta_1 + \Gamma\zeta_2\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\Phi &= \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \right\} \\ \Gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

and K and G_1, G_2 are such that the matrices

$$(A + B(0)K), \quad \begin{pmatrix} A & -B(0)\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}$$

are stable.

Osservazione 1 *The stability requirement can be obviously met along with a desired performance criterion. Since here the interest is focused on the structural stability of the closed loop system, we will impose simply that the aforementioned matrices be Hurwitz.*

1.8.4 Simulation Results

Let us consider a spacecraft characterized by the inertia matrix (considered completely unknown)

$$J_n = \begin{pmatrix} 950 & 10 & 5 \\ 10 & 600 & 30 \\ 5 & 30 & 360 \end{pmatrix}$$

and let us consider a precession maneuver with $\phi_r(t) = \varphi_r = 20^\circ$, about the z -axis, with

$$\epsilon_r = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 t \\ \text{sen}\omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\omega_0 = 0.2$ rad/s being the parameter describing the precession motion. The initial attitude is

$$\begin{pmatrix} q_0(0) \\ q(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Phi_0}{2} \\ \epsilon_0 \text{sen} \frac{\Phi_0}{2} \end{pmatrix}, \quad \Phi_0 = 60^\circ, \quad \epsilon_0 = \begin{pmatrix} -0.4243 \\ 0.5657 \\ 0.7071 \end{pmatrix}$$

while $\omega(0) = 0$.

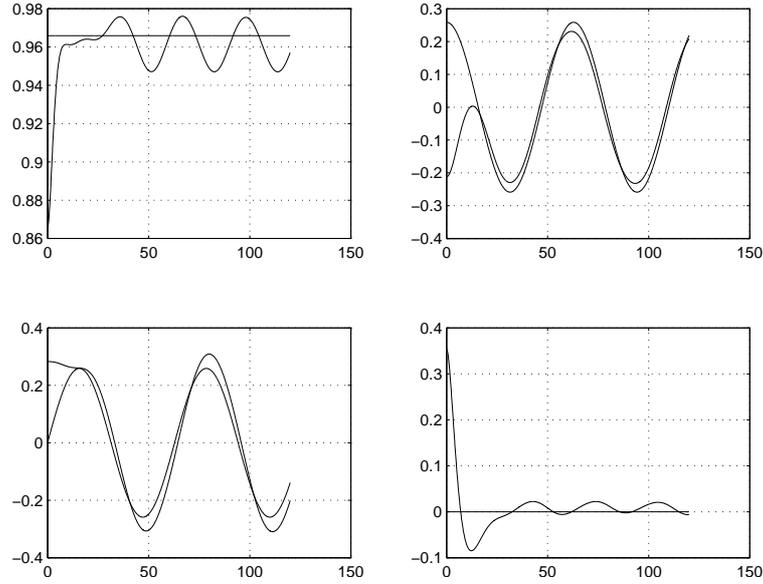
We suppose that the nominal inertia matrix J_n is diagonal

$$J_n = \text{diag} \{J_{n,11}, J_{n,22}, J_{n,33}\} = \text{diag} \{800, 400, 600\}$$

which is an acceptable hypothesis if the body fixed frame is taken to coincide with the main axes of the structure.

The eigenvalues of the matrix $A + B(0)K$ have been set choosing $k_p = 100$, $k_d = 200$, so that

$$K = (-k_p I - k_d I)$$



Quaternions q_0, q_1, q_2, q_3 with ‘full information’ regulator (s vs adimensional)

while the eigenvalues of the matrix

$$\begin{pmatrix} A & -B(0)\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} (C \ 0)$$

have been set in

$$\begin{aligned} & -1.25 \left(1.00, 1.10, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, \right. \\ & \quad \left. 1.16, 1.17, 1.18, 1.19, 1.20, 1.30, 1.21 \right) \end{aligned}$$

so that the resulting matrix is Hurwitz. We already noted that the stability requirement could be obviously met along with some additional performance criterion. The gain matrices are so given by

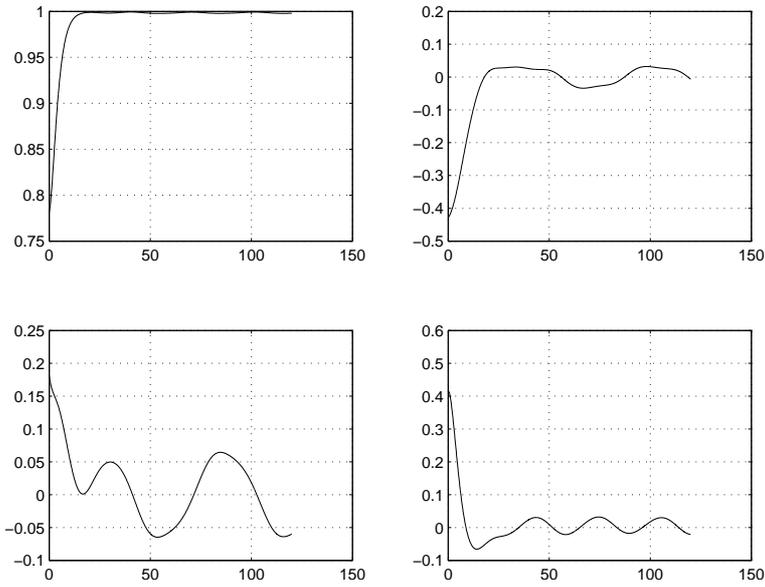
$$G_1 = \begin{pmatrix} 5.8314 & -0.0343 & 0.0081 \\ -0.0416 & 5.7851 & -0.0093 \\ 0.3048 & -0.4239 & 7.1963 \\ 25.4162 & -0.2990 & 0.0703 \\ -0.3620 & 25.0130 & -0.0808 \\ 3.4837 & -4.8454 & 41.0514 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = 10^4 \begin{pmatrix} -1.9438 & 0.0345 & -0.0081 \\ -0.6401 & 0.0159 & -0.0037 \\ 0.0209 & -0.9487 & 0.0046 \\ 0.0096 & -0.3094 & 0.0021 \\ -0.4419 & 0.6146 & -3.4244 \\ -0.3926 & 0.5459 & -2.1586 \\ -0.0812 & 0.1129 & -0.1826 \end{pmatrix}.$$

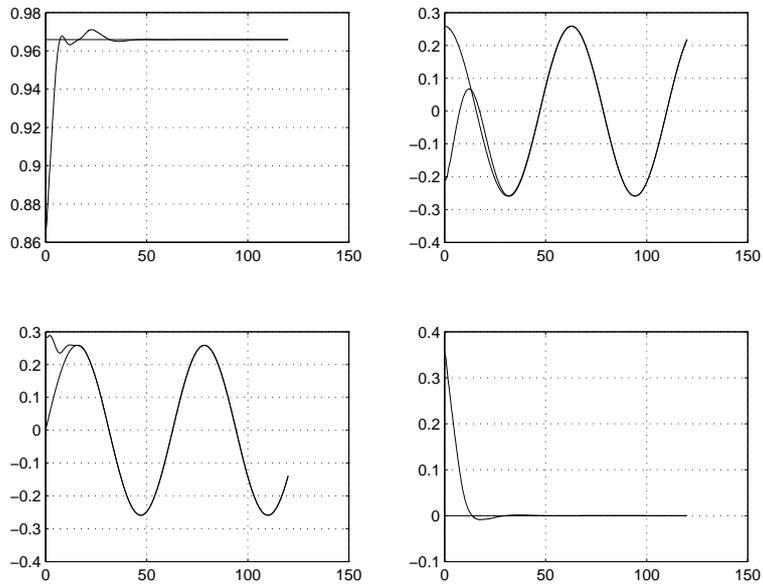
The robust regulator is compared with a ‘full information’ regulator. The simulation results are summarized in Figures 1 – 3. The behavior of the quaternions q_0, q_1, q_2, q_3 is given in Figures 1 and 2, for the full information regulator and the robust regulator, respectively. In Figure 3 the control components u_1, u_2, u_3 of the robust regulator are shown along with the steady-state input components $\gamma_1(w), \gamma_2(w), \gamma_3(w)$. Note that a saturation value at 30 N m has been considered, in order to obtain a more realistic situation.

Moreover, the robust controller has been tested also in presence of disturbances on the measured quaternions (Figure 4), with

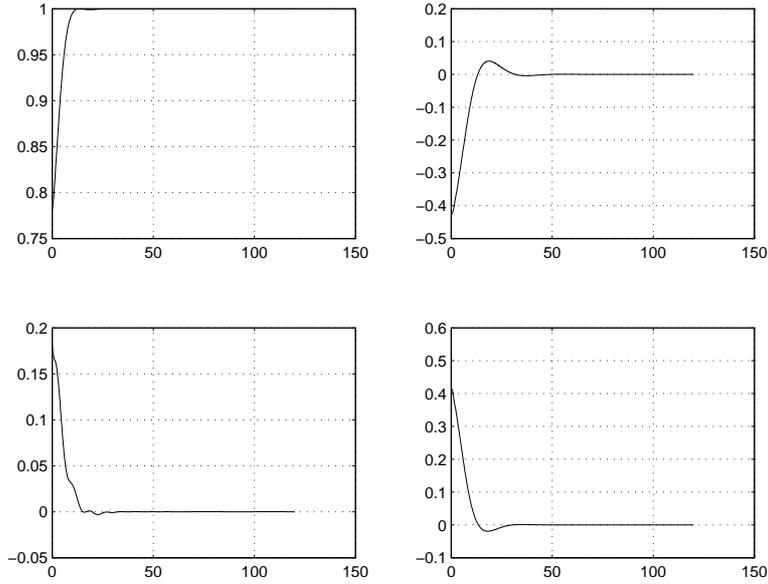
$$q_{i,m} = q_i + \mathcal{N}(t), \quad i = 0, 1, 2, 3$$



Quaternions q_0, q_1, q_2, q_3 with robust regulator controller (s vs adimensional)



Input components u_1, u_2, u_3 and steady-state controls $\gamma_1(w), \gamma_2(w), \gamma_3(w)$ (s vs Nm)



Quaternions q_0, q_1, q_2, q_3 with robust regulator controller and measurement disturbance (s vs adimensional)

with $\mathcal{N}(t)$ the normal distribution with zero mean and standard deviation equal to one. It can be shown that the robust controller performance remains quite similar to that of Figure 2, with no disturbance. Clearly the disturbance can not be rejected unless modelled in the exosystem.

The advantage of using the robust regulator with respect to a simple regulator based on the nominal parameters is shown by a reduction of the steady-state error. Note that *no information on the real inertia matrix are necessary*. The only information used are those regarding the nominal inertia matrix.

1.8.5 Conclusions

In this paper a robust regulator for the case of precession tracking is derived, and the resulting dynamic controller ensures better performances over a regulator based on the system nominal parameters. We stress again that *no information on the real inertia matrix* have been used to derive the proposed controller. Moreover, the studied case is a simple example of the potentiality of the proposed method, which can be extended to the case of disturbances acting on flexible structures.

1.8.6 Modello del satellite in forma di robot

Riferendosi alla sezione precedente, si noti anzitutto che

$$J_t = J_t(\xi), \quad \dot{J}_t = I(\xi, \dot{\xi}), \quad A_1 = A_1(\xi), \quad \dot{A}_1 = A_3(\dot{\xi}).$$

Si ponga poi

$$\begin{aligned} N(\omega, \Omega, \xi) &= \tilde{\omega} \left[J_t \omega + J_r \Omega + A_1(\xi) \dot{\xi} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\omega} J_t & \tilde{\omega} J_r & \tilde{\omega} A_1(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \Omega \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = N_1(\omega, \xi) \begin{pmatrix} \omega \\ \Omega \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$N_{11}(\omega, \xi) = \tilde{\omega} J_t, \quad N_{12}(\omega) = \tilde{\omega} J_r, \quad N_{13}(\omega, \xi) = \tilde{\omega} A_1(\xi).$$

Pertanto le equazioni 1.26 si riscrivono nella forma:

$$J_t(\xi)\dot{\omega} + J_r\dot{\Omega} + A_1(\xi)\ddot{\xi} + I(\xi, \dot{\xi})\omega + A_3(\dot{\xi})\dot{\xi} = -N_1(\omega, \xi) \begin{pmatrix} \omega \\ \Omega \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} + u_g$$

$$J_r(\dot{\omega} + \dot{\Omega}) = u_r$$

$$A_1^T(\xi)\dot{\omega} + A_2\ddot{\xi} + A_3^T(\dot{\xi})\omega = -K\xi - C\dot{\xi} - \Phi(l)\delta_1 u_p.$$

Posto:

$$q = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \vartheta_r \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{pmatrix} \omega \\ \Omega \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_g \\ u_r \\ u_p \end{pmatrix},$$

in cui ϑ e ϑ_r sono variabili cinematiche tali che $\dot{\vartheta} = \omega$, $\dot{\vartheta}_r = \Omega$, si ha:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + Sq = B^T u,$$

ove

$$M(q) = \begin{pmatrix} J_t(\xi) & J_r & A_1(\xi) \\ J_r & J_r & 0 \\ A_1^T(\xi) & 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1^T \Phi^T(l) \end{pmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} I(\xi, \dot{\xi}) + N_{11}(\omega, \xi) & N_{12}(\omega) & A_3(\dot{\xi}) + N_{13}(\omega, \xi) \\ 0 & 0 & 0 \\ A_3^T(\dot{\xi}) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}.$$

Si noti che $D = D^T \geq 0$, $S = S^T \geq 0$. Inoltre risulta che la matrice

$$\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q, \dot{q})$$

è antisimmetrica.

1.8.7 Determinazione dell'orientamento

Parametrizzazione dell'orientamento

Il teorema di Eulero afferma che lo spostamento più generale di un corpo rigido avente un punto *fisso* è una rotazione attorno ad un certo asse passante per il punto fisso.

Se ora v è un vettore di \mathbb{C}^n ed A è una matrice $n \times n$ unitaria¹⁸. Considerati i vettori $\mathbf{v} = Av$, $\mathbf{w} = Aw$, il loro prodotto scalare vale:

$$\mathbf{v}^* \mathbf{w} = (Av)^* Aw = v^* A^* Aw = v^* w.$$

Se $v = w$ questo mostra che la norma del vettore v rimane costante, per cui *una matrice unitaria A può essere pensata come una trasformazione che realizza una rotazione del vettore nello spazio n -dimensionale*. Per vettori di \mathbb{R}^n le stesse considerazioni valgono per A ortogonale.

¹⁸Una matrice A si dice unitaria se $A^{-1} = A^*$, ossia se $AA^* = A^*A = I$, in cui il simbolo “*” indica “coniugata trasposta”.

Angoli di Eulero

Si consideri una rotazione ϕ attorno all'asse x , in senso positivo (ad esempio antiorario). La matrice che descrive la rotazione è:

$$\mathcal{R}_1(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Se la rotazione fosse avvenuta attorno l'asse y la matrice della rotazione sarebbe stata:

$$\mathcal{R}_2(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix},$$

e se invece fosse avvenuta attorno l'asse z :

$$\mathcal{R}_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

é immediato vedere che queste tre matrici sono ortogonali, come ci si aspettava, hanno i tre autovalori in 1 e $e^{\pm j\phi} = \cos \phi \pm j \sin \phi$, ed il loro determinante è pari ad 1. Le trasformazioni lineari dello spazio \mathbb{R}^3 che hanno la proprietà di essere ortogonali e proprie, ossia con determinante unitario, formano la varietà $SO(3)$. Una trasformazione che sia rappresentata da una matrice così fatta, avente un autovalore pari ad 1, per il Teorema di Eulero è una trasformazione di rotazione di un angolo ϕ attorno l'asse individuato dall'autovettore corrispondente. Infatti in virtù dell'autovalore pari ad 1, si ha:

$$Av = v$$

in corrispondenza dell'autovettore v . Dunque l'asse, che rappresenta il sottospazio generato da v , viene trasformato in sé stesso durante la rotazione, ossia non si muove.

Un gruppo minimo di parametri che permette di determinare l'orientamento di un corpo è dato dagli *angoli di Eulero*. Essi non sono così pratici per i calcoli quanto i parametri simmetrici di Eulero, o quaternioni, ma hanno un significato geometrico più semplice. Sono anche usati per trovare la soluzione in forma chiusa alle equazioni del moto in casi semplici. Inoltre sono utilizzati per satelliti stabilizzati sui tre assi per i quali risulta ammissibile l'approssimazione per piccoli angoli.

Per definire gli angoli di Eulero si consideri un primo sistema di riferimento inerziale RC ed una rotazione, di angolo φ attorno ad un asse (1, 2 o 3, a seconda della particolare trasformazione). Si considera una seconda rotazione del nuovo riferimento, di un angolo ϑ attorno all'asse 1,2 o 3, ed infine una terza rotazione attorno ad un asse di un angolo ψ , che porta quest'ultimo riferimento a coincidere con il riferimento finale RT .

In corrispondenza di ciascuna di queste tre rotazioni attorno ad un asse coordinato, l'orientamento di ogni nuova terna può esprimersi in funzione della precedente per mezzo delle matrici dei coseni direttori $\mathcal{R}_i(\varphi)$, $\mathcal{R}_j(\vartheta)$ e $\mathcal{R}_k(\psi)$, in cui $i, j, k = 1, 2$ oppure 3, precedentemente definite.

La matrice dei coseni direttori per la sequenza totale di rotazioni è:

$$\mathcal{R}_{ijk}(\varphi, \vartheta, \psi) = \mathcal{R}_i(\varphi)\mathcal{R}_j(\vartheta)\mathcal{R}_k(\psi),$$

con la prima matrice di rotazione sulla destra e l'ultima sulla sinistra. La sequenza degli assi attorno ai quali avvengono le rotazioni denota il tipo di rotazione. Una delle più usate è la sequenza 3-1-3,

per la quale la matrice $\mathcal{R}_{313}(\varphi, \vartheta, \psi)$ vale:

$$\mathcal{R}_{313} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi & \cos\psi\cos\varphi + \cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi & \sin\vartheta\sin\psi \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi & \sin\vartheta\cos\psi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Gli angoli di Eulero 3–1–3 possono essere ottenuti dalla matrice $\mathcal{R}_{313}(\varphi, \vartheta, \psi)$:

$$\vartheta = \arccos r_{33}, \quad \varphi = -\arctan \frac{r_{31}}{r_{32}}, \quad \psi = \arctan \frac{r_{13}}{r_{23}},$$

in cui r_{ij} ne indicano gli elementi. Si ha una indeterminazione nel valore di ϑ ($\vartheta \in [-\pi, 0)$ ovvero $\vartheta \in [0, \pi)$); una volta risolta, restano univocamente determinati φ e ψ . Se però ϑ è un multiplo di π allora rimangono determinate solo la somma o la differenza di φ e ψ , a seconda che ϑ sia un multiplo pari o dispari di π . Usualmente in tali casi si prende $\sin\vartheta \geq 0$ o $0 \leq \vartheta < \pi$.

Un'altra sequenza utilizzata di frequente è la 3–1–2 (sequenza “yaw, roll, pitch”), per la quale la matrice $\mathcal{R}_{312}(\varphi, \vartheta, \psi)$ vale:

$$\mathcal{R}_{312} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\psi\sin\varphi & \cos\psi\sin\varphi + \sin\vartheta\sin\psi\cos\varphi & -\cos\vartheta\sin\psi \\ -\cos\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta \\ \sin\psi\cos\varphi + \sin\vartheta\cos\psi\sin\varphi & \sin\psi\sin\varphi - \sin\vartheta\cos\psi\cos\varphi & \cos\vartheta\cos\psi \end{pmatrix}.$$

Gli angoli di rotazione sono:

$$\vartheta = \arcsin r_{23}, \quad \varphi = -\arctan \frac{r_{21}}{r_{22}}, \quad \psi = -\arctan \frac{r_{13}}{r_{33}}.$$

Anche in questo caso si ha un'indeterminazione di ϑ ($\vartheta \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup [\frac{\pi}{2}, \pi)$ ovvero $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), a meno che ϑ sia un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$, nel qual caso usualmente si prende $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, che dà $\cos\vartheta \geq 0$.

Nel caso di angoli di rotazione piccoli, dalla 1.8.7 (sequenza 3–1–2) si ottiene la seguente approssimazione:

$$\mathcal{R}_{312}(\varphi, \vartheta, \psi) \simeq \begin{pmatrix} 1 & \varphi & -\psi \\ -\varphi & 1 & \vartheta \\ \psi & -\vartheta & 1 \end{pmatrix},$$

in cui gli angoli sono misurati in radianti.

Tutte le possibili sequenze di rotazioni sono 12 (non si considerano due rotazioni successive attorno ad uno stesso asse, equivalenti a una singola rotazione attorno a tale asse, e le rotazioni multiple di 2π):

$$313, 212, 121, 323, 232, 131, 312, 213, 123, 321, 231, 132,$$

e a causa dell'ambiguità in ϑ , ci sono 24 possibili sequenze di rotazioni.

Determiniamo l'espressione della matrice dei coseni direttori $\mathcal{R}(\Phi)$ che definisce una rotazione di un angolo Φ attorno all'asse di rotazione generico, ossia attorno all'asse di Eulero, di versore \vec{e} , passante per l'origine del sistema di riferimento RC (punto fisso). L'angolo Φ viene considerato positivo se è in senso orario rispetto al versore \vec{e} , ossia se è in senso opposto a quello determinato con la regola della mano destra. Per comprendere il perché di questa convenzione si consideri una rotazione Φ in senso orario attorno all'asse z del riferimento RI rispetto al riferimento RC , descritta dalla matrice:

$$\mathcal{R}(\Phi) = \begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice può essere pensata come un operatore che *trasforma vettori di RC in vettori di RF*:

$$r' = \mathcal{R}(\Phi)r.$$

Si noti che il vettore r non cambia, è il riferimento che ruota, e cambiano solo le componenti. Ma $\mathcal{R}(\Phi)$ può essere visto anche come un operatore che *trasforma un vettore in un altro ruotato rispetto al primo ed espresso nello stesso riferimento*. È equivalente far ruotare il sistema di coordinate in senso antiorario e far ruotare il vettore r in senso orario di un angolo Φ , fino ad avere un vettore r' . In altre parole la relazione 1.8.7 può essere interpretata come un'operazione sulla terna di riferimento oppure sul vettore. Spesso si vede $\mathcal{R}(\Phi)$ da quest'ultimo punto di vista, ossia come un operatore che trasforma r in un altro vettore r' espresso nello stesso riferimento. In ogni caso se $\mathcal{R}(\Phi)$ corrisponde ad una rotazione Φ in senso antiorario quando applicata ad un sistema di riferimento, essa corrisponde ad una rotazione in senso orario quando applicata ad un vettore. Se dunque $\mathcal{R}(\Phi)$ viene vista come una trasformazione di vettori in un certo riferimento, Φ verrà considerato positivo se orario rispetto a $\vec{\epsilon}$, e corrisponderà ad una rotazione antioraria (regola della mano destra) del sistema di riferimento.

Dopo la rotazione il vettore \vec{r} si trasforma nel vettore \vec{r}' dato da:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \overrightarrow{PP'} = \vec{r} + \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HP'},$$

con:

$$\overrightarrow{QP'} = -\vec{\epsilon} \times (\vec{\epsilon} \times \overrightarrow{OP'}) = -\vec{\epsilon} \times (\vec{\epsilon} \times \vec{r})$$

$$\overrightarrow{PH} = -(1 - \cos\Phi)\overrightarrow{OP} = (1 - \cos\Phi)\vec{\epsilon} \times (\vec{\epsilon} \times \vec{r})$$

$$\overrightarrow{HP'} = -|\overrightarrow{QP'}| \operatorname{sen}\Phi \frac{\vec{\epsilon} \times \overrightarrow{QP'}}{|\overrightarrow{QP'}|} = -\operatorname{sen}\Phi \vec{\epsilon} \times \overrightarrow{OP} = -\operatorname{sen}\Phi \vec{\epsilon} \times \vec{r}$$

Dunque si ottiene la seguente formula della rotazione:

$$\vec{r}' = \vec{r} + (1 - \cos\Phi) \vec{\epsilon} \times (\vec{\epsilon} \times \vec{r}) - \operatorname{sen}\Phi \vec{\epsilon} \times \vec{r}.$$

Adottando la rappresentazione matriciale, per cui:

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon} \times \vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & 0 & -\epsilon_1 \\ -\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \\ \vec{\epsilon} \times (\vec{\epsilon} \times \vec{v}) &= \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & 0 & -\epsilon_1 \\ -\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) & \epsilon_1\epsilon_2 & \epsilon_1\epsilon_3 \\ \epsilon_1\epsilon_2 & -(\epsilon_1^2 + \epsilon_3^2) & \epsilon_2\epsilon_3 \\ \epsilon_1\epsilon_3 & \epsilon_2\epsilon_3 & -(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ove si è usata la rappresentazione diadica di $\vec{\epsilon}$, si ottiene¹⁹:

$$r' = \mathcal{R}(\Phi)r = \left[I + (1 - \cos\Phi) \tilde{\epsilon}^2 - \operatorname{sen}\Phi \tilde{\epsilon} \right] r = \mathcal{R}(\Phi)r,$$

con $\mathcal{R}(\Phi)$ data da

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1^2 + (\epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)\cos\Phi & \epsilon_1\epsilon_2(1 - \cos\Phi) + \epsilon_3\operatorname{sen}\Phi & \epsilon_1\epsilon_3(1 - \cos\Phi) - \epsilon_2\operatorname{sen}\Phi \\ \epsilon_1\epsilon_2(1 - \cos\Phi) - \epsilon_3\operatorname{sen}\Phi & \epsilon_2^2 + (\epsilon_1^2 + \epsilon_3^2)\cos\Phi & \epsilon_1\epsilon_3(1 - \cos\Phi) + \epsilon_1\operatorname{sen}\Phi \\ \epsilon_1\epsilon_3(1 - \cos\Phi) + \epsilon_2\operatorname{sen}\Phi & \epsilon_1\epsilon_3(1 - \cos\Phi) - \epsilon_1\operatorname{sen}\Phi & \epsilon_3^2 + (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)\cos\Phi \end{pmatrix}.$$

¹⁹Se si considerano positive le rotazioni in senso opposto si ha:

$$r' = \left[I + (1 - \cos\Phi) \tilde{\epsilon}^2 + \operatorname{sen}\Phi \tilde{\epsilon} \right] r.$$

Si osservi che per qualsiasi vettore v :

$$\tilde{v}^2 = vv^T - I,$$

che particolareggia al caso di vettori la 1.8.12, valida nel caso di quaternioni, ossia al caso $q_0 = 0$. Pertanto si ha anche:

$$\mathcal{R}(\Phi) = I + (1 - \cos\Phi) \tilde{\epsilon}^2 - \sin\Phi \tilde{\epsilon} = \cos\Phi I + (1 - \cos\Phi) \epsilon\epsilon^T - \sin\Phi \tilde{\epsilon}.$$

Questa è una *parametrizzazione mediante l'asse di Eulero*, che dipende da tre parametri, ossia dalle tre componenti del versore dell'asse, legate dalla relazione $|\tilde{\epsilon}| = 1$, e dall'angolo Φ .

È immediato verificare che $\tilde{\epsilon}$ individua l'asse di rotazione:

$$\mathcal{R}(\Phi)\tilde{\epsilon} = \left[I + (1 - \cos\Phi) \tilde{\epsilon}^2 - \sin\Phi \tilde{\epsilon} \right] \tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon},$$

ossia $\tilde{\epsilon}$ è l'autovettore con autovalore unitario di $\mathcal{R}(\Phi)$, posseduto da ogni matrice reale propria ortogonale 3×3 come $\mathcal{R}(\Phi)$. Questa relazione dice quindi che $\tilde{\epsilon}$ non viene cambiato dalla matrice della rotazione $\mathcal{R}(\Phi)$, e che $\tilde{\epsilon}$ ha le stesse componenti sia nel sistema di riferimento inerziale RC sia nel sistema di riferimento RT solidale col corpo.

La matrice dei coseni direttori $\mathcal{R}(\Phi)$ diventa una delle matrici $\mathcal{R}_i(\Phi)$ viste prima quando il versore $\tilde{\epsilon}$ giace lungo l'asse i .

Determiniamo ora le componenti di $\tilde{\epsilon}$ e l'angolo di rotazione Φ a partire dalla matrice di rotazione $\mathcal{R}(\Phi)$. Si osserva che se $\sin\Phi \neq 0$, ossia se:

$$\Phi \neq h\pi, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

allora:

$$\epsilon_1 = \frac{(r_{23} - r_{32})}{2 \sin\Phi}, \quad \epsilon_2 = \frac{(r_{31} - r_{13})}{2 \sin\Phi}, \quad \epsilon_3 = \frac{(r_{12} - r_{21})}{2 \sin\Phi},$$

con r_{ij} gli elementi di $\mathcal{R}(\Phi)$ e dove l'angolo di rotazione è calcolabile a partire dalla traccia di $\mathcal{R}(\Phi)$:

$$\text{tr}[\mathcal{R}(\Phi)] = 1 + 2 \cos\Phi,$$

per cui

$$\Phi = \arccos \frac{\text{tr}[\mathcal{R}(\Phi)] - 1}{2},$$

in cui si considera $\Phi \in [-\pi, \pi)$. Si noti che si ottengono due valori per l'angolo di rotazione:

$$\Phi \in [-\pi, 0) \quad \text{ovvero} \quad \Phi \in [0, \pi).$$

Parametri simmetrici di Eulero o quaternioni unitari

I *parametri simmetrici di Eulero* o *quaternioni unitari*²⁰ sono definiti dalle relazioni:

$$q_0 = \cos \frac{\Phi}{2}, \quad q(t) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} \sin \frac{\Phi}{2}$$

e verificano l'equazione di vincolo:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

²⁰I quaternioni furono introdotti per descrivere il moto di un corpo rigido da Whittaker nel 1937. Gibbs fu comunque il primo a metterli in forma di vettore, sebbene l'idea fosse ben più vecchia.

Ovviamente Φ definisce l'angolo della rotazione attorno all'asse di Eulero individuato dal versore $\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \end{pmatrix}^T$.

Questi quattro parametri possono essere visti come le componenti di un *quaternione*, definito dalla quaterna (q_0, q_1, q_2, q_3) :

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k = \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix},$$

ove i, j, k sono numeri iperimmaginari tali che:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

e dove q_0 è la parte reale o scalare, e $q = q_1i + q_2j + q_3k$ è la parte immaginaria o vettoriale. Un vettore $v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ viene espresso, in questa notazione, come un quaternione con $v_0 = 0$:

$$\mathbf{v} = v_1i + v_2j + v_3k = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Il *coniugato* o *inverso* di \mathbf{q} è:

$$\mathbf{q}^* = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k = \begin{pmatrix} q_0 \\ -q \end{pmatrix},$$

e la norma di \mathbf{q} è ovviamente pari ad 1:

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{\mathbf{q}\mathbf{q}^*} = \sqrt{\mathbf{q}^*\mathbf{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1.$$

La *moltiplicazione* di due quaternioni \mathbf{q}, \mathbf{e} è definita come per i numeri complessi, ad eccezione del fatto che i prodotti di i, j, k non sono commutativi:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_r = \mathbf{q}\mathbf{e} &= (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(e_0 + e_1i + e_2j + e_3k) = \\ &= (q_0e_0 - q_1e_1 - q_2e_2 - q_3e_3) + \\ &\quad + (q_0e_1 + q_1e_0 + q_2e_3 - q_3e_2)i + \\ &\quad + (q_0e_2 - q_1e_3 + q_2e_0 + q_3e_1)j + \\ &\quad + (q_0e_3 + q_1e_2 - q_2e_1 + q_3e_0)k = \\ &= (e_0q_0 - e^Tq, e_0q + q_0e - \tilde{e}q) \end{aligned}$$

e utilizzando la notazione matriciale si ottiene la 1.8.12.

Un quaternione può essere usato per rappresentare la rotazione di un corpo rigido, definita da una matrice di rotazione $\mathcal{R}(\Phi)$, data dalla 1.8.7. Infatti poiché:

$$\begin{aligned} \sin \Phi &= 2 \cos \frac{\Phi}{2} \sin \frac{\Phi}{2} \\ \cos \Phi &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\Phi}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos \Phi = 2 \sin^2 \frac{\Phi}{2} \end{aligned}$$

utilizzando i quaternioni 1.8.7 la matrice dei coseni direttori 1.8.7 diventa:

$$\mathcal{R}(\Phi) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}.$$

che definisce quindi la rotazione di un angolo Φ , positiva se in verso orario, attorno all'asse di Eulero di versore \vec{e} , passante per l'origine del sistema di riferimento RC (punto fisso). Se quindi $\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$ definisce l'assetto di un satellite rispetto ad un riferimento inerziale RC , la matrice che descrive la rotazione che porta RC a coincidere con il riferimento RI solidale con il satellite è data dalla 1.8.12.

Se poi \mathbf{q} ed \mathbf{e} rappresentano due rotazioni, definite dalle matrici $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$, la rotazione definita dal prodotto $\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ è rappresentata da un quaternion \mathbf{q}_r , che risulta essere pari a $\mathbf{q}\mathbf{e}$, e quindi la sua espressione è data dalla 1.8.12. Per mostrare ciò occorrerebbe eguagliare ambo i membri della identità $\mathcal{R} = \mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$, con la matrice di rotazione \mathcal{R} associata a \mathbf{q}_r in cui sono utilizzate le espressioni date dalla 1.8.12. Si noti il differente ordine di moltiplicazione dei quaternioni rispetto a quello delle matrici a cui corrispondono:

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}_r) = \mathcal{R}_2(\mathbf{e})\mathcal{R}_1(\mathbf{q}) \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{q}_r = \mathbf{q}\mathbf{e}.$$

In base alla 1.8.12 dato un vettore v , a cui corrisponde il quaternion $\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$, è facile verificare che il quaternion corrispondente al vettore ottenuto mediante la sua rotazione, attraverso la matrice \mathcal{R} che corrisponde al quaternion \mathbf{q} , è dato da:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' = \mathbf{q}^*\mathbf{v}\mathbf{q} &= \begin{pmatrix} 0 \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} q_0 & q^T \\ -q & q_0I - \tilde{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -v^T \\ v & \tilde{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} q_0 & q^T \\ -q & q_0I - \tilde{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q^T v \\ (q_0I - \tilde{q})v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ [q_0^2I + qq^T + (-2q_0I + \tilde{q})\tilde{q}]v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e quindi, come noto:

$$v' = [q_0^2I + qq^T + (-2q_0I + \tilde{q})\tilde{q}]v = \mathcal{R}v.$$

Dalla matrice 1.8.7, che definisce una rotazione Φ attorno all'asse \vec{e} , è possibile ricavare il valore dei quaternioni. Infatti essi sono calcolabili mediante uno dei seguenti quattro gruppi di relazioni:

1° gruppo

$$\begin{aligned} q_0 &= \pm \frac{1}{2} [1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}]^{\frac{1}{2}} \\ q_1 &= \frac{1}{4q_0} (r_{23} - r_{32}) \\ q_2 &= \frac{1}{4q_0} (r_{31} - r_{13}) \\ q_3 &= \frac{1}{4q_0} (r_{12} - r_{21}) \end{aligned}$$

2° gruppo

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{4q_1} (r_{23} - r_{32}) \\ q_1 &= \pm \frac{1}{2} [1 + r_{11} - r_{22} - r_{33}]^{\frac{1}{2}} \\ q_2 &= \frac{1}{4q_1} (r_{12} + r_{21}) \\ q_3 &= \frac{1}{4q_1} (r_{13} + r_{31}) \end{aligned}$$

3° gruppo

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{4q_2}(r_{31} - r_{13}) \\ q_1 &= \frac{1}{4q_2}(r_{12} + r_{21}) \\ q_2 &= \pm \frac{1}{2} \left[1 - r_{11} + r_{22} - r_{33} \right]^{\frac{1}{2}} \\ q_3 &= \frac{1}{4q_2}(r_{23} + r_{32}) \end{aligned}$$

4° gruppo

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{4q_3}(r_{21} - r_{12}) \\ q_1 &= \frac{1}{4q_3}(r_{13} + r_{31}) \\ q_2 &= \frac{1}{4q_3}(r_{23} + r_{32}) \\ q_3 &= \pm \frac{1}{2} \left[1 - r_{11} - r_{22} + r_{33} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

In tali espressioni vi è una ambiguità di segno. Si nota però dall'espressione di \mathcal{R} che, cambiando simultaneamente i segni di tutti e quattro i parametri simmetrici di Eulero, la matrice dei coseni direttori non cambia. Ciò corrisponde a cambiare di segno all'angolo di rotazione e al versore. La rotazione così ottenuta è uguale alla precedente. Dunque si ottengono valori equivalenti.

Questi quattro modi di calcolare i parametri simmetrici di Eulero a partire dalla matrice dei coseni direttori $\mathcal{R}(\Phi)$ sono matematicamente equivalenti; ovviamente le inaccurattezze numeriche possono essere minimizzate evitando di utilizzare quel gruppo di equazioni in cui il parametro al denominatore è prossimo allo zero²¹.

Dati gli angoli di Eulero 3-1-3, è possibile ricavare i parametri simmetrici di Eulero mediante le relazioni:

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \\ q_1 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2} \\ q_2 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \\ q_3 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\varphi + \psi}{2}. \end{aligned}$$

Se poi si considerano piccoli angoli di Eulero nella rotazione, allora i quaternioni sono legati agli angoli di Eulero dalle relazioni:

$$q_0 \simeq 1, \quad q_1 \simeq \frac{\vartheta}{2}, \quad q_2 \simeq \frac{\psi}{2}, \quad q_3 \simeq \frac{\varphi}{2},$$

come è facile ottenere confrontando la matrice di rotazione 1.8.7 con la matrice 1.8.7.

²¹Un altro metodo per calcolare i parametri simmetrici di Eulero a partire dalla matrice dei coseni direttori $A(\Phi)$ è contenuto in [?].

Vettore di Gibbs

La matrice dei coseni direttori può anche essere parametrizzata per mezzo del *vettore di Gibbs*²², definito dalle relazioni:

$$\begin{aligned} g_1 &= \epsilon_1 \tan \frac{\Phi}{2} = \frac{q_1}{q_0} \\ g_2 &= \epsilon_2 \tan \frac{\Phi}{2} = \frac{q_2}{q_0} \\ g_3 &= \epsilon_3 \tan \frac{\Phi}{2} = \frac{q_3}{q_0} \end{aligned}$$

sicché la matrice dei coseni direttori assume la forma:

$$\mathcal{R}(\Phi) = \frac{1}{1 + g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} \begin{pmatrix} 1 + g_1^2 - g_2^2 - g_3^2 & 2(g_1g_2 + g_3) & 2(g_1g_3 - g_2) \\ 2(g_1g_2 - g_3) & 1 - g_1^2 + g_2^2 - g_3^2 & 2(g_2g_3 + g_1) \\ 2(g_1g_3 + g_2) & 2(g_2g_3 - g_1) & 1 - g_1^2 - g_2^2 + g_3^2 \end{pmatrix}.$$

Il vettore di Gibbs non è molto usato perché diventa infinito per Φ che tende a $\pi + 2h\pi$, $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Le componenti del vettore di Gibbs si possono ricavare a partire dalla matrice dei coseni direttori $\mathcal{R}(\Phi)$:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{r_{23} - r_{32}}{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \\ g_2 &= \frac{r_{31} - r_{13}}{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \\ g_3 &= \frac{r_{12} - r_{21}}{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}. \end{aligned}$$

Si noti che non ci sono ambiguità di segno e che tali parametri sono tra loro indipendenti.

Date due rotazioni indipendenti, corrispondenti ai vettori g e g_e , il vettore di Gibbs relativo al prodotto delle due rotazioni vale:

$$g_r = \frac{g + g_e + \tilde{g}g_e}{1 - g^T g_e},$$

com'è facile ricavare dalla 1.8.12

$$\frac{q_r}{q_{r0}} = \frac{e_0 q + q_0 e + \tilde{q}e}{e_0 q_0 - q^T e}$$

ponendo

$$g = \frac{q}{q_0}, \quad g_r = \frac{q_r}{q_{r0}}, \quad g_e = \frac{e}{e_0}.$$

Determinazione dell'orientamento

V. pag 420 del Wertz (paragrafo 12.2)

1.8.8 Dinamica dell'assetto

Le equazioni della dinamica dell'assetto si possono dividere in equazioni cinematiche ed equazioni dinamiche del moto. La cinematica studia il moto indipendentemente dalle forze che lo determinano. Le equazioni cinematiche sono equazioni differenziali del primo ordine che specificano l'evoluzione nel tempo dei parametri che descrivono l'assetto del corpo. Esse contengono la velocità angolare ω del corpo. La dinamica studia la dipendenza del moto dalle forze e momenti agenti sul corpo. Le equazioni dinamiche del moto esprimono la dipendenza di ω dal tempo. Esse sono indispensabili per la simulazione e la predizione dell'assetto quando le misure giroscopiche di ω non sono disponibili.

²²Gibbs nel 1901 lo chiamò "vettore semitangente di versione". Nel 1843, prima dell'introduzione della nozione vettoriale, Cayley usò le tre componenti e accreditò la loro introduzione a Rodriguez.

Equazioni cinematiche

Supponiamo che l'assetto sia parametrizzato mediante i quaternioni. Siano q e q'' i quaternioni che rappresentano l'assetto del corpo rigido rispetto ad un sistema di riferimento inerziale RC al tempo t e $t + \Delta t$ (riferimenti RG_t e $RG_{t+\Delta t}$). Sia poi q' il quaternioni che rappresenta l'assetto del corpo al tempo $t + \Delta t$ rispetto all'assetto che il corpo ha al tempo t .

Se $\Delta\Phi$ è la rotazione necessaria per portare il corpo dall'assetto rappresentato da q a quello rappresentato da q'' :

$$\begin{pmatrix} q_0' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Delta\Phi}{2} \\ \epsilon_1 \operatorname{sen} \frac{\Delta\Phi}{2} \\ \epsilon_2 \operatorname{sen} \frac{\Delta\Phi}{2} \\ \epsilon_3 \operatorname{sen} \frac{\Delta\Phi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Delta\Phi}{2} \\ \epsilon \operatorname{sen} \frac{\Delta\Phi}{2} \end{pmatrix},$$

ove $\epsilon = (\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3)^T$ è il versore dell'asse di Eulero attorno al quale avviene la rotazione $\Delta\Phi$, espresso in RG_t . La rotazione $\Delta\Phi$ avvenga in un tempo Δt . Per la legge di moltiplicazione dei quaternioni 1.8.12:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_0'' \\ q'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0' & -q'^T \\ q' & q_0' I - \tilde{q}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\Delta\Phi}{2} & -\epsilon^T \operatorname{sen} \frac{\Delta\Phi}{2} \\ \epsilon \operatorname{sen} \frac{\Delta\Phi}{2} & \cos \frac{\Delta\Phi}{2} I - \tilde{\epsilon} \operatorname{sen} \frac{\Delta\Phi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e posto:

$$q_0'' = q_0(t + \Delta t), \quad q'' = q(t + \Delta t), \quad q_0 = q_0(t), \quad q = q(t),$$

si ha:

$$\begin{pmatrix} q_0(t + \Delta t) \\ q(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Delta\Phi}{2} & -\epsilon^T \operatorname{sen} \frac{\Delta\Phi}{2} \\ \epsilon \operatorname{sen} \frac{\Delta\Phi}{2} & \cos \frac{\Delta\Phi}{2} I - \tilde{\epsilon} \operatorname{sen} \frac{\Delta\Phi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q(t) \end{pmatrix}.$$

Indicata con ω il modulo della velocità angolare:

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} = \frac{d\Phi}{dt},$$

e utilizzando le approssimazioni per i piccoli angoli:

$$\cos \frac{d\Phi}{2} \approx 1, \quad \operatorname{sen} \frac{d\Phi}{2} \approx \frac{d\Phi}{2} = \frac{1}{2} \omega dt,$$

si ha:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_0(t + dt) \\ q(t + dt) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon^T \frac{1}{2} \omega dt \\ \epsilon \frac{1}{2} \omega dt & I - \tilde{\epsilon} \frac{1}{2} \omega dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^T \omega dt \\ \epsilon \omega dt & -\tilde{\epsilon} \omega dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

in cui:

$$\vec{\omega} = \tilde{\epsilon} \omega$$

è il vettore velocità angolare. Dunque:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{q}_0(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{q_0(t+\Delta t) - q_0(t)}{\Delta t} \\ \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q_0(t+\Delta t) - q_0(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} S(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{2} R_2^T(q) \omega.$$

Se $S(\omega)$ è costante, tale equazione può essere integrata:

$$q = e^{S(\omega)/2} q(0).$$

Se poi il versore ϵ è costante ma il vettore velocità angolare ω varia, si ha:

$$q = e^{\int_0^t S(\omega(\tau))/2 d\tau} q(0).$$

1.8.9 Predizione dell'assetto

Vi sono due metodi di base per modellare o predire l'evoluzione nel tempo di un satellite:

- integrare le equazioni cinematiche e dinamiche (modellistica dinamica);
- usare sensori di velocità o giroscopi per sostituire il modello dinamico ed integrare le sole equazioni cinematiche (modellistica giroscopica).

Le equazioni cinematiche sono, in termini di quaternioni $\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$:

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2} q^T \omega, \quad \dot{q} = \frac{1}{2} R(q) \omega, \quad R(q) = q_0 I + \tilde{q}.$$

Le equazioni dinamiche di un satellite rigido sono date dal teorema di Eulero:

$$\dot{\xi} = -\tilde{\omega} \xi + u_g + d,$$

con $\xi = J\omega$ il momento angolare, J l'inerzia, ω la velocità angolare, u_g l'ingresso e d i disturbi agenti sul satellite.

Se sono presenti le reaction wheels, detto $J_r(\omega + \Omega)$ il momento angolare dovuto ad esse:

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= -\tilde{\omega} [J\omega + J_r(\omega + \Omega)] + u_g - u_r + d \\ J_r(\dot{\omega} + \dot{\Omega}) &= u_r \end{aligned}$$

ove u_r è la coppia netta applicata dai motori alle reaction-wheels.

Come detto le equazioni relative ad ω possono essere integrate numericamente ovvero analogicamente mediante dei giroscopi.

Metodi di integrazione**Integrazione diretta**

Le equazioni del moto, costituenti un sistema di equazioni differenziali del primo ordine:

$$\dot{x} = f(t, x),$$

con f nota, possono essere integrate numericamente ottenendo una serie di valori $\{x_n\}$. Si richiede che

$$\lim_{h \rightarrow 0} = x(t)$$

in cui h è il passo di integrazione. La differenza $x_n - x(t)$ è l'errore di troncamento; se si richiede sia esso di ordine h^{p+1} ad ogni passo, allora il metodo di integrazione è di ordine p . L'errore di arrotondamento è poi l'errore addizionale dovuto all'accuratezza finita dei calcoli. Un algoritmo è instabile se gli errori (di troncamento, di arrotondamento o dovuti a condizioni iniziali inesatte) introdotti ad ogni passo si propagano senza limiti durante l'integrazione.

L'errore di troncamento è generalmente un fattore che limita l'accuratezza dell'integrazione, e può essere diminuito considerando metodi di integrazione di ordine più elevato oppure diminuendo h . È utile far variare h durante l'integrazione per adattarsi all'frequenze caratteristiche del problema. Il tempo di calcolo è usualmente proporzionale al numero di funzioni $f_n = f(t_n, x_n)$ da valutare.

Nei metodi di integrazione ad un passo per valutare x_{n+1} bastano n_n ed f_n . Sono semplici da applicare, poiché bastano x_0 e f_0 , h può essere variato senza calcoli aggiuntivi. I metodi di Runge-Kutta sono metodi ad un passo, e sono ad r stadi, ossia ogni passo richiede r valutazioni della funzione. Per $r = 1, \dots, 4$ l'errore di troncamento è di ordine h^r , per $r = 5, 6, 7$ è di ordine h^{r-1} ed infine per $r \geq 8$ è di ordine $h^{\leq r-2}$. Per questo il metodo del quarto ordine a 4 stadi è il più popolare. Tra le possibili scelte dei parametri in questo caso, la più comune è:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &= f(t_n + h, x_n + hk_3) \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

che si riduce alla formula di Simpson

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6} \left[f(t_n) + 4f\left(t_n + \frac{1}{2}h\right) + f(t_n + h) \right]$$

se f non dipende da x . Il difetto principale dei metodi di Runge-Kutta è che debbono essere valutate molte funzioni.

Nei metodi di integrazione a più passi si richiede la conoscenza di x_j, f_j per qualche $j < n$, oltre che x_n, f_n per calcolare x_{n+1} . Tali metodi non sono autoavvianti (si possono usare quelli di Runge-Kutta per i primi k passi) e la variazione di h può essere fatta ma occorre calcolare altri valori intermedi; infine occorre memorizzare più dati intermedi. Il vantaggio principale è che occorre calcolare una sola funzione per passo.

Soluzione approssimata in forma chiusa delle equazioni cinematiche

Se le equazioni dinamiche sono integrate con giroscopi ed occorre integrare solo quelle cinematiche, se ω può essere considerata costante sull'intervallo di integrazione, allora le equazioni cinematiche riscritte

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}S(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}, \quad S(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix}$$

possono essere campionate, fornendo così

$$\begin{pmatrix} q_0(k+1) \\ q(k+1) \end{pmatrix} = e^{\delta S(\omega)/2} \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix}.$$

Poiché:

$$S^2(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^T\omega & 0 \\ 0 & -\omega\omega^T + \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} = -\|\omega\|^2 I_4$$

e dunque

$$S^{2k}(\omega) = (-1)^k \|\omega\|^{2k} I_4, \quad S^{2k+1}(\omega) = (-1)^k \|\omega\|^{2k} S(\omega),$$

si ha:

$$\begin{aligned} e^{\delta S(\omega)/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}S(\omega) \right)^n \frac{\delta^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{1}{2}S(\omega)\right)^{2k}}{(2k)!} + \frac{\left(\frac{1}{2}S(\omega)\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2}\|\omega\|\delta\right)^{2k}}{(2k)!} I_4 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2}\|\omega\|\delta\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{1}{\|\omega\|} S(\omega) = \\ &= \cos\left(\frac{1}{2}\|\omega\|\delta\right) I_4 + \frac{1}{\|\omega\|} \text{sen}\left(\frac{1}{2}\|\omega\|\delta\right) \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per i giroscopi satellitari tipicamente $\delta \in (100, 400)$ ms.

L'errore commesso facendo tale approssimazione è calcolabile considerando che

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_0(k+1) \\ q(k+1) \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} \dot{q}_0|_k \\ \dot{q}|_k \end{pmatrix} + \frac{\delta^2}{2!} \begin{pmatrix} \ddot{q}_0|_k \\ \ddot{q}|_k \end{pmatrix} + \dots = \\ &= \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}S(\omega)|_k \delta \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix} + \\ &\quad + \frac{\delta^2}{2!} \left[\frac{1}{2}\dot{S}(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + \frac{1}{2^2}S^2(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} \right]_k + \\ &\quad + \frac{\delta^3}{3!} \left[\frac{1}{2}\ddot{S}(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + \frac{1}{2^2}\dot{S}^2(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + \frac{1}{2^2}\dot{S}^2(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \quad \quad \left. + \frac{1}{2^3}S^3(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} \right]_k + \dots = \\ &= \left[I + \frac{1}{2}S(\omega(k))\delta + \frac{\left(\frac{1}{2}S(\omega(k))\delta\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}S(\omega(k))\delta\right)^3}{3!} + \dots \right] \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix} + \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}\dot{S}(\omega)|_k \frac{\delta^2}{2!} + \left(\frac{1}{2}\dot{S}(\omega)|_k S(\omega)|_k + \frac{1}{2}S(\omega)|_k \dot{S}(\omega)|_k \right) \frac{\delta^3}{3!} + \right. \\ &\quad \quad \quad \left. + \frac{1}{2^2}\ddot{S}(\omega)|_k \frac{\delta^3}{3!} + \dots \right] \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix} = \\ &= \left[e^{\delta S(\omega(k))/2} + \text{Errore} \right] \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

I giroscopi forniscono una velocità angolare media sul periodo di campionamento:

$$\bar{S} = \frac{1}{\delta} \int_{t_k}^{t_{k+1}} S(\omega(\tau)) d\tau = S(\omega(k)) + \frac{\delta}{2} \dot{S}(\omega)|_k + \frac{\delta^2}{6} \ddot{S}(\omega)|_k + \dots$$

Pertanto la quantità calcolabile è in realtà:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_0(k+1) \\ q(k+1) \end{pmatrix} &= \left[I + \frac{1}{2} \bar{S} \delta + \frac{(\frac{1}{2} \bar{S} \delta)^2}{2!} + \frac{(\frac{1}{2} \bar{S} \delta)^3}{3!} + \dots \right] \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix} + \\ &+ \left[\frac{1}{2^3} \left(\dot{S}(\omega)|_k S(\omega)|_k - S(\omega)|_k \dot{S}(\omega)|_k \right) \frac{\delta^3}{3!} + \dots \right] \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix} = \\ &= \left[e^{\delta \bar{S}/2} + \text{Errore effettivo} \right] \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avendo riordinato i termini in modo differente. Dunque l'errore effettivo è dell'ordine di δ^3 , e non di δ^2 . Esso si annulla per

$$\dot{S}(\omega)|_k S(\omega)|_k = S(\omega)|_k \dot{S}(\omega)|_k,$$

ossia quando i vettori $\omega(k)$ e $\dot{\omega}|_k$ sono paralleli. Pertanto il termine in δ^3 si annulla quando l'asse di rotazione è fisso, anche se la rotazione non è uniforme.

Altre approssimazioni per il calcolo di $\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$ sono date in [?].

1.8.10 Disturbi ambientali

Momento dovuto al gradiente di gravità

Caratteristiche del campo gravitazionale terrestre

Due masse puntiformi M , m , separate da una distanza \vec{r} , si attraggono secondo la legge di gravitazione di Newton:

$$\vec{F}_G = \frac{GM_{\oplus}m}{r^2} \hat{r} = \mu \frac{m}{r^2} \hat{r},$$

con $G = 6.672 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{Kg s}^2}$ la costante gravitazionale. Se $M = M_{\oplus}$ è la massa della Terra, μ è la costante gravitazionale della Terra, che vale

$$\mu = \mu_{\oplus} = GM_{\oplus} = 3.986 \times 10^{14} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}.$$

Il potenziale gravitazionale della Terra è poi:

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_{\oplus}}{r} = \frac{GM_{\oplus}}{r},$$

da cui $\vec{F} = -m\nabla\mathcal{U}$. Si potrebbe mostrare che \mathcal{U} soddisfa l'equazione di Laplace $\nabla^2\mathcal{U} = 0$. Scrivendo l'equazione in coordinate sferiche si otterrebbe come soluzione:

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_{\oplus}}{r} + B(r, \phi, \lambda),$$

in cui ϕ è la latitudine e λ la longitudine. Il termine $B(r, \phi, \lambda)$ è un'appropriato termine, costituito dalla somma di due serie, che corregge il potenziale gravitazionale, legato alla non simmetrica distribuzione della massa della Terra²³.

L'accuratezza della funzione potenziale, ossia il numero di termini delle serie in essa contenuti, ha effetto sulla dinamica orbitale, più che sulla dinamica d'assetto. A causa delle incertezze sugli altri disturbi, per l'analisi dell'effetto su un satellite della coppia dovuta al gradiente di gravità è di solito sufficiente includere il coefficiente dell'armonica zonale che tiene conto l'asfericità della Terra, a causa dello schiacciamento dei poli:

$$\mathcal{U}(r, \phi, \lambda) = \frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[1 - \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 J_2 \frac{3 \text{sen}^2 \phi - 1}{2} \right],$$

con J_2 che varia a seconda dell'altezza del satellite.

Per satelliti con grandi appendici flessibili, stabilizzati a tre assi o mediante il gradiente di gravità, l'effetto di J_2 diventa significativo in tutte le manovre d'assetto. Si noti che

$$\mathcal{U}_{J_2} = \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 J_2 \frac{3 \text{sen}^2 \phi - 1}{2}$$

grande rispetto agli altri contributi qui trascurati, è però solo lo 0.05 % del valore $\mathcal{U}^* = 1$, come si

²³Si vedano gli Appunti di Astrodinamica Applicata oppure [?], Paragrafo 5, pag. 124 e Appendice G, pag. 775.

vede dalla seguente tabella:

Altitudine (Km)	μ_{\oplus}/r (Km ² /s ²)	\mathcal{U}^*	\mathcal{U}_{J_2}
0	62.495	1	0.54×10^{-3}
200	60.595	1	0.51×10^{-3}
500	57.952	1	0.46×10^{-3}
1000	54.025	1	0.40×10^{-3}
2000	47.576	1	0.31×10^{-3}
10000	24.337	1	0.82×10^{-4}
36000	9.401	1	0.13×10^{-4}

in cui 36000 Km è approssimativamente l'orbita geostazionaria.

Si può vedere che le correzioni sono meno significative ad grandi altitudini, e quando ci si avvicina all'orbita geostazionaria le attrazioni della luna e del sole possono diventare più importanti.

Modello del momento dovuto al gradiente di gravità

Qualsiasi oggetto asimmetrico di dimensioni finite è soggetto ad un momento gravitazionale, a causa della variazione della forza gravitazionale della terra agente su di esso. Se il campo gravitazionale fosse uniforme, e non proporzionale all'inverso del quadrato della distanza, tale azione non ci sarebbe.

Si supponga che il tensore d'inerzia J sia noto ed espresso nel riferimento RI la cui origine è nel centro geometrico del satellite, che non coincide necessariamente con il centro di massa. Si supponga poi la terra sferica. La forza gravitazionale $d\vec{F}$, agente sull'elemento di satellite dm determinato dal vettore \vec{R} nel riferimento geocentrico RC , vale:

$$d\vec{F} = -\mu \frac{\vec{R}}{R^3} dm.$$

Il momento attorno al centro geometrico del satellite, dovuto a $d\vec{F}$, vale:

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F},$$

con \vec{r} il vettore che individua la posizione di dm rispetto al centro geometrico. Il momento dovuto al gradiente di gravità si scrive dunque integrando sul volume occupata dal satellite:

$$\vec{M}_G = \int_S d\vec{M} = \int_S \vec{r} \times d\vec{F} = - \int_S \vec{r} \times \mu \frac{\vec{R}}{R^3} dm = \int_S \mu \vec{R} \times \vec{r} \frac{1}{R^3} dm$$

ove

$$\vec{R} = \vec{R}_S + \vec{r}.$$

Per satelliti artificiali reali $R_S \gg r$, per cui:

$$\begin{aligned} R^{-3} &= [\vec{R} \cdot \vec{R}]^{-3/2} = [(\vec{R}_S + \vec{r}) \cdot (\vec{R}_S + \vec{r})]^{-3/2} = [R_S^2 + 2\vec{R}_S \cdot \vec{r} + r^2]^{-3/2} = \\ &= \left[R_S^2 \left(1 + \frac{2\vec{R}_S \cdot \vec{r}}{R_S^2} + \frac{r^2}{R_S^2} \right) \right]^{-3/2} \simeq R_S^{-3} \left(1 - \frac{3\vec{R}_S \cdot \vec{r}}{R_S^2} \right) = \frac{1}{R_S^3} - \frac{3\vec{R}_S \cdot \vec{r}}{R_S^3}, \end{aligned}$$

avendo trascurato $\frac{r^2}{R_S^2}$ e avendo considerato che $(1+x)^n \cong 1+nx$ per $x \ll 1$. Posto poi $\vec{R}_S \cong \vec{R}$:

$$\begin{aligned}\vec{M}_G &\cong \int_S \mu \vec{R}_S \times \vec{r} \frac{1}{R^3} dm \cong \int_S \mu \vec{R}_S \times \vec{r} \left(\frac{1}{R_S^3} - \frac{3\vec{R}_S \cdot \vec{r}}{R_S^3} \right) dm = \\ &= \mu \frac{\vec{R}_S}{R_S^3} \times \int_S \vec{r} dm + \frac{3\mu}{R_S^3} \int_S \vec{r} \times \frac{\vec{R}_S}{R_S} \frac{\vec{R}_S}{R_S} \cdot \vec{r} dm \\ &= \frac{\mu M}{R_S^2} \hat{R}_S \times \vec{q} + \frac{3\mu}{R_S^3} \int_S \vec{r} \times \hat{R}_S \hat{R}_S \cdot \vec{r} dm,\end{aligned}$$

in cui \vec{q} individua il centro di massa del satellite e

$$\int_S \vec{r} dm = \int_S (\vec{q} + \vec{r}') dm = \rho M,$$

avendo considerato che per definizione di centro di massa

$$\int_S \vec{r}' dm = 0,$$

ed essendo \vec{r}' la posizione di dm rispetto al centro di massa del satellite.

Se il centro geometrico coincide con il centro di massa del satellite:

$$\vec{M}_G \cong \frac{3\mu}{R_S^3} \int_S \vec{r} \times \hat{R}_S \hat{R}_S \cdot \vec{r} dm.$$

Coppia dovuta alla resistenza aerodinamica

L'interazione della parte alta dell'atmosfera con la superficie del satellite produce una coppia attorno il centro di massa. Per satelliti al di sotto di circa 400 Km questa è la coppia predominante. La forza dovuta all'impatto delle molecole dell'atmosfera sulla superficie del satellite è modellabile come un urto anelastico senza riflessione, e l'energia delle particelle incidenti è generalmente tutta assorbita. Le particelle, una volta raggiunto l'equilibrio termico con la superficie, sfuggono infatti con una velocità termica uguale a quella delle particelle della superficie. Poiché tale velocità è sostanzialmente inferiore a quella delle molecole incidenti, l'impatto è modellabile come se le particelle incidenti perdessero tutta la loro energia nella collisione.

La forza $d\vec{F}$ agente sulla superficie elementare dS , avente normale \hat{n} uscente da essa, è data da:

$$d\vec{F} = -\frac{1}{2} C_d \rho v^2 \cos \vartheta_a \hat{v} dS,$$

in cui \hat{v} è il versore nella direzione della velocità di traslazione \vec{v} dell'elemento di superficie, relativa al flusso incidente, e ρ è la densità atmosferica. Inoltre C_d è il coefficiente di resistenza (drag); questo è un numero adimensionale, compreso tra 1 e 2^{24} , ed è funzione della struttura della superficie e dell'angolo di attacco locale $\vartheta_a = \arccos(\hat{n} \cdot \hat{v})$.

La coppia aerodinamica agente sul satellite e dovuta alla resistenza aerodinamica vale:

$$\vec{M}_A = \int_S \vec{r} \times d\vec{F} = \int_S \frac{1}{2} C_d \rho v^2 (\hat{n} \cdot \hat{v}) \hat{v} \times \vec{r} dS,$$

in cui \vec{r} è il vettore che va dal centro di massa del satellite all'elemento di superficie dS . L'integrale è calcolato su tutta la superficie del satellite per la quale $\cos \vartheta_a = \hat{n} \cdot \hat{v} > 0$. Nell'ipotesi di corpo rigido, detta $\vec{\omega}$ la velocità angolare del satellite, la velocità di traslazione dell'elemento di superficie dS vale:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

²⁴Se C_d non è disponibile, $C_d = 2$ è una buona stima per satelliti con dimensioni grandi rispetto a percorso libero medio delle molecole atmosferiche.

in cui \vec{v}_0 è la velocità del centro di massa relativamente all'atmosfera. Poiché $|\vec{\omega} \times \vec{r}|$ è piccolo rispetto a v_0 , si possono trascurare tutti i termini del secondo ordine in $\vec{\omega}$. Si ha così:

$$\begin{aligned} \vec{M}_A \simeq & \frac{1}{2} C_d \rho v_0^2 \int_S (\hat{n} \cdot \hat{v}_0) \hat{v}_0 \times \vec{r} dS + \\ & + \frac{1}{2} C_d \rho v_0 \int_S \left[\hat{n} \cdot (\omega \times \vec{r}) \hat{v}_0 \times \vec{r} + (\hat{n} \cdot \hat{v}_0) (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{r} \right] dS. \end{aligned}$$

Il primo termine di \vec{M}_A è la coppia dovuta allo spostamento del centro di pressione del satellite rispetto al centro di massa. Il secondo è la coppia di dissipazione dovuta alla rotazione del satellite. Per satelliti con $\omega r \ll v_0$ esso è circa quattro ordini di grandezza più piccolo del primo termine, e può essere trascurato.

Coppia di disturbo magnetico

1.8.11 Disturbi agenti sul satellite

Bla bla

Disturbo gravitazionale

Disturbo aerodinamico

I satelliti lavorano al limite dell'atmosfera o al di là di essa. La loro energia verrebbe prima o poi dissipata dal drag atmosferico, e il satellite inizierebbe a cadere verso la terra. Vi è dunque un limite superiore intrinseco nell'ampiezza delle forze e momenti agenti sui veicoli spaziali. Vi è una banda di altezza per la quale il satellite ha un suo utile tempo di vita, sebbene le coppie atmosferiche non sono trascurabili e possono anzi essere dominanti. Sebbene tale banda sia piuttosto stretta, in quanto la densità diminuisce rapidamente con l'altezza, il costo di collocare carichi utili in orbite più alte e le richieste di missione di molti satelliti per l'osservazione della terra, determinano l'inserzione di importanti classi di satelliti ad orbite relativamente basse.

Ad altezze ove le orbite non decadono immediatamente a causa del drag atmosferico, il percorso libero medio molecolare λ è grande in confronto alle dimensioni tipiche di un satellite. Il percorso libero medio è la distanza percorsa da una molecola prima di avere una collisione con un'altra molecola. Anche per le più basse orbite possibili, λ è dell'ordine di 1 Km. Pertanto si può supporre che le molecole che si avvicinano alla superficie del satellite non interferiscono con quelle che provengono dalla superficie. In altre parole i due flussi di molecole, verso e dal satellite, possono essere supposti indipendenti. Questo porta al modello a flussi molecolari liberi²⁵, che si basa sulla teoria cinetica dei gas.

Quando le molecole arrivano alla superficie del satellite e quando la lasciano si determinano due trasferimenti di momento al satellite. Il modello a flussi molecolari liberi permette di determinare il trasferimento complessivo di momento in modo additivo.

²⁵Questo modello si distingue da quello a flusso continuo.

Si considerino ora i seguenti parametri di Eulero o quaternioni unitari

$$q_0 = \cos \frac{\phi}{2}, \quad q = \epsilon \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}$$

soggetti al vincolo

$$\begin{aligned} q_0^2 + q^T q &= 1. \\ \dot{q}_0 &= -\frac{1}{2} \omega^T q \\ \dot{q} &= \frac{1}{2} R(q) \omega \end{aligned}$$

ove

$$R(q) = q_0 I + \tilde{q}$$

\dot{q}_0 ridondante per via del vincolo

(q_0, q) esprime un errore di RF rispetto a RF_r .

Th. di Eulero per la derivazione di funzioni: In ϵ (inserire) $\dot{L} = -\omega \times L + M^{eit}$ ponendo $L = J\omega, M^{eit} = u$ (N.B: si esprime tutto in RF così J rimane costante)

$$J\dot{\omega} = -\omega \times J\omega + u$$

$$\dot{\omega} = J^{-1}[-\omega \times J\omega + u]$$

$N(\omega) = \omega \times J\omega$ termine giroscopico

$$\chi = \begin{pmatrix} q_0 \\ q \\ \omega \end{pmatrix} \quad \chi_e = \begin{pmatrix} q_0 = 1 \\ q = 0 \\ \omega = 0 \end{pmatrix}$$

osserviamo che se $q \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0$.

Nella V metterò $q_0 - 1$, si poteva anche cambiare variabile: $\eta_0 = q_0 - 1 \Rightarrow \dot{\eta}_0 = -\frac{1}{2} \omega^T q$.

$$\dot{\chi} = f(x) + g(x)u = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \omega^T q \\ \frac{1}{2} R(q) \omega \\ J^{-1}[-\omega \times J\omega] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J^{-1} \end{pmatrix} u$$

Si noti che:

$$J \Big|_{\begin{pmatrix} q_0 = 1 \\ q = 0 \\ \omega = 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$q^T \omega = q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2 + q_3 \omega_3$$

$$R(q) = \begin{pmatrix} q_0 \omega_1 - q_3 \omega_2 + q_2 \omega_3 \\ q_3 \omega_1 + q_0 \omega_2 - q_1 \omega_3 \\ -q_2 \omega_1 + q_1 \omega_2 + q_0 \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\omega \times J\omega = \begin{pmatrix} -\omega_3(J_{12}\omega_1 + J_{22}\omega_2 + J_{23}\omega_3) + \omega_2(J_{13}\omega_1 + J_{23}\omega_2 + J_{33}\omega_3) \\ \omega_3(J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3) - \omega_1(J_{13}\omega_1 + J_{23}\omega_2 + J_{33}\omega_3) \\ -\omega_2(J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3) + \omega_1(J_{12}\omega_1 + J_{22}\omega_2 + J_{23}\omega_3) \end{pmatrix}$$

⇒ Non possiamo utilizzare la linearizzazione

Stabilizzazione rigida

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{2}R(q)\omega \\ \dot{\omega} &= J^{-1}[-\omega \times J\omega + u] \quad J > 0 \\ u &= -(k_p q + k_d \omega) + \underbrace{\tilde{\omega} J \omega}_{\text{opzionale, } J \text{ noto}} \\ V &= \frac{k_p}{2}[q^T q + (1 - q_0)^2] + \frac{1}{2}\omega^T J \omega \quad \Leftarrow \begin{array}{l} \chi^T J \chi > 0 \forall x \neq 0 \quad k_p > 0 \\ \chi^T J \chi = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array} \\ \dot{V} &= k_p q^T \dot{q} + \omega^T [-\omega \times J\omega + u] = -k_d \omega^T \omega \leq 0 \end{aligned}$$

⇓

q, ω bounded obvious for q , not for ω

$E = \{x \in R^n / \omega \equiv 0\}$ $\omega \equiv 0$
 $\dot{\omega} \equiv 0 = J^{-1}(0 - k_p q) \Rightarrow q = 0 \quad (\exists J) \quad \mathcal{E}^+ = \dots$ Osserviamo che $V > 0$ anche se non è richiesto dalla sella.

Adattativo rigido J non è noto ma si vuole cancellare $N(\omega)$

$$\begin{aligned} \omega \times J\omega &= q(\omega) \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ J_{33} \\ J_{12} \\ J_{13} \\ J_{23} \end{pmatrix} \\ \omega \times J\omega &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3 \\ J_{12}\omega_1 + J_{22}\omega_2 + J_{23}\omega_3 \\ J_{13}\omega_1 + J_{23}\omega_2 + J_{33}\omega_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega_3(J_{12}\omega_1 + J_{22}\omega_2 + J_{23}\omega_3) + \omega_2(J_{13}\omega_1 + J_{23}\omega_2 + J_{33}\omega_3) \\ \omega_3(J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3) - \omega_1(J_{13}\omega_1 + J_{23}\omega_2 + J_{33}\omega_3) \\ -\omega_2(J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3) + \omega_1(J_{12}\omega_1 + J_{22}\omega_2 + J_{23}\omega_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_2\omega_3 & \omega_2\omega_3 & -\omega_1\omega_3 & \omega_1\omega_2 & \omega_2^2 - \omega_3^2 \\ \omega_1\omega_3 & 0 & -\omega_1\omega_3 & \omega_2\omega_3 & -\omega_1^2 + \omega_3^2 & -\omega_1\omega_2 \\ -\omega_1\omega_2 & \omega_1\omega_2 & 0\omega_1^2 - \omega_2^2 & -\omega_2\omega_3 & \omega_1\omega_3 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ J_{33} \\ J_{12} \\ J_{13} \\ J_{23} \end{pmatrix} \\ \dot{q} &= \frac{1}{2}R(q)\omega\dot{\omega} = J^{-1}[-\varphi(\omega)\vartheta + u] \quad u = -k_p q - k_d \omega + \varphi(\omega)\hat{\vartheta} \\ V_1 &= V + \frac{1}{2}(\vartheta - \hat{\vartheta})^T \Gamma^{-1}(\vartheta - \hat{\vartheta}) \\ \dot{V}_1 &= -\|\omega\|^2 - \underbrace{\omega^T \varphi(\omega)(\vartheta - \hat{\vartheta})}_{(\vartheta - \hat{\vartheta})^T \varphi^T(\omega)\omega} - (\vartheta - \hat{\vartheta})^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\vartheta}} \quad \dot{\hat{\vartheta}} = -\Gamma \varphi^T(\omega)\omega \\ \dot{V}_1 &= -k_d \|\omega\|^2 \leq 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

Tracing Rigido

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= \frac{1}{2}R(e)\omega_e & \omega &= \omega_e + \omega_r \\
\dot{\omega}_e &= \dot{\omega} - \dot{\omega}_e = J^{-1}[-\omega \times J\omega + u] - \dot{\omega}_r \\
&= J^{-1}[-(\omega_e + \omega_r) \times J(\omega_e + \omega_r) + u] - \dot{\omega}_r \\
&= J^{-1}[-\omega_e \times J\omega_e + u] - [\dot{\omega}_r + J^{-1}(\omega_e \times J\omega_r + \omega_r \times J(\omega_e + \omega_r))] \\
u &= v + J[\dot{\omega}_r + J^{-1}(\omega_e \times J\omega_r + \omega_r \times (\omega_e + \omega_r))] \\
\dot{e} &= \frac{1}{2}R(e)\omega_e \\
\dot{\omega}_e &= J^{-1}[-\omega_e \times J\omega_e + v] \\
v &= -k_p q - k_d \omega + \omega_e \times J\omega_e \\
V &= \dots \Rightarrow \omega_e = 0, q = 0
\end{aligned}$$

L'adattativo è più complicato poichè non cancella $N_1(t, \omega_e) \Rightarrow$ avrei un ϵ tempo variante per cui la sella non è applicabile. Esistono strumenti alternativi.

Non si misura ω

\hat{q} stima fittizia di q

$$\begin{aligned}
V &= k_p[(q_0 - 1)^2 + q^T q] + \frac{1}{2}\omega^T J\omega + \frac{1}{2}(q - \hat{q})^T (q - \hat{q}) \\
\dot{V} &= k_p \omega^T q + \omega^T [-\tilde{\omega} J\omega + u] + (q - \hat{q})^T [\frac{1}{2}R(q)\omega - \dot{\hat{q}}] \\
\dot{V} &= \omega^T [k_p q + u] + (q - \hat{q})^T [\frac{1}{2}R(q)\omega - \dot{\hat{q}}] \\
u &= -k_p q - \frac{1}{2}R^T(q)(q - \hat{q}) \\
&\Downarrow \\
\dot{V} &= -\frac{1}{2}\omega^T R^T(q - \hat{q}) + (q - \hat{q})^T \frac{1}{2}R(q)\omega - (q - \hat{q})^T \dot{\hat{q}} \\
\dot{V} &= -(q - \hat{q})^T \dot{\hat{q}} \\
\text{Se } \dot{\hat{q}} &= -\lambda(q - \hat{q}) \Rightarrow \dot{V} = -\lambda \|q - \hat{q}\|^2 \leq 0 \\
E &= \{x \in R^n / q - \hat{q} \equiv 0\} \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}R(q)\omega = \dot{\hat{q}} \exists \dot{\hat{q}} = -\lambda(q - \hat{q}) = 0
\end{aligned}$$

Si hanno due possibilità:

$$\begin{aligned}
1) q_0 &\neq 0 \Rightarrow \exists R^{-1}(q) \Rightarrow \omega = 0 \\
2) q_0 &= 0 \Rightarrow q \neq 0 \text{ e non esiste } R^{-1}(q). u = -k_p q + \overbrace{0}^{(q-\hat{q})} \neq 0
\end{aligned}$$

si può avere una coppia di equilibrio $(\chi_e, u_e) = 0$ se $u_e = 0$, ossia se $q=0$. Dunque questo caso è escluso.

Flessibile

$$\begin{aligned}
& M\ddot{\xi} + C_1\dot{\xi} + k_1\xi = -\delta_1\dot{\omega} \\
\exists T / & \left(\begin{array}{l} TMT^{-1} = I \\ Tk_1T^{-1} = \text{diag}\{\} \\ (TC_1T^{-1} \text{ non è diagonale ma la si prende tale}) \end{array} \right) \\
& \eta = T\xi \Rightarrow \ddot{\eta} + C\dot{\eta} + k\eta = -\delta\dot{\omega} \\
& \delta = T^{-1}\delta_1 \Rightarrow J\dot{\omega} + \delta^T\ddot{\eta} = -\tilde{\omega}(J\omega + \delta^T\dot{\eta}) + u \\
& \psi = \dot{\eta} + \delta\omega \\
& \Downarrow \\
& \dot{\eta} = \psi - \delta\omega \\
& \dot{\psi} = -(C\dot{\eta} + k\eta) = -(C\psi + k\eta - C\delta\omega) \\
& (J - \delta^T\delta)\dot{\omega} + \delta^T\dot{\psi} = -\tilde{\omega}(J\omega + \delta^T\psi - \delta^T\delta\omega) + u \\
& J_{mb}\dot{\omega} = -\tilde{\omega}(J_{mb}\omega + \delta^T\psi) + \delta^T(C\psi + k\eta - C\delta\omega) + u \\
& J_{mb}\dot{\omega} = -\tilde{\omega}J_{mb}\omega - \delta^TC\delta\dot{\omega} + u + \underbrace{[-\tilde{\omega}\delta^T\psi + \delta^T(C\psi + k\eta)]}_{\text{disturbo}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{1}{2}R(q)\omega \\
J_{mb}\dot{\omega} &= -\tilde{\omega}J_{mb}\omega - \delta^TC\delta\omega + u + [-\tilde{\omega}\delta^Td_1(t) + d_2(t)] \quad (\text{Vedere richiamo Th. della Stabilità})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= K_p[(q_0 - 1)^2 + q^Tq] + \frac{1}{2}\omega^TJ_{mb}\omega > 0 \\
\dot{V} &= \omega^T[k_pq - \tilde{\omega}J_{mb}\omega - \delta^TC\delta\omega + u - \tilde{\omega}\delta^Td_1(t) + d_2(t)] \\
& u = -K_pq - k_d\omega(\tilde{\omega}J_{mb}\omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -k_d\|\omega\|^2 - \underbrace{\omega^T\delta^TC\delta\omega}_{\text{se } \delta^TC\delta > 0 \text{ basta che } u = -k_pq} + \omega^Td_2
\end{aligned}$$

$$\dot{V} \leq -(k_d + \lambda_{\min})\|\omega\|^2 + \omega^Td_2$$

Se $d_2 = 0 \Rightarrow$ come prima. Se $d_2 \neq 0$ e $\|d_2\| \leq \alpha$:

$$\omega^Td_2 \leq \|\omega\|\|d_2\| \leq \alpha\|\omega\|$$

\Downarrow

$$\dot{V} \leq -\gamma\|\omega\|^2 + \alpha\|\omega\| \quad \gamma = k_d + \lambda_{\min}$$

$$\dot{V} \leq 0 \text{ se } \|\omega\| \geq \frac{\alpha}{\gamma} \quad \dot{V} > 0 \text{ se } \|\omega\| < \frac{\alpha}{\gamma}$$

Collegamenti con il Th della Stabilità Totale

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 0; \quad \dot{x} = f(x) + g(t, x)$$

Ipotesi: se $x = 0$ è asintoticamente stabile per $\dot{x} = f(x) \exists V \in C^1$ e $\alpha_i \in k_\infty$ (basta k):

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V \leq \alpha_2(\|x\|) \text{ e } \frac{\partial V}{\partial x}f \leq -\alpha_3\|x\|, \text{ e se } \|x_0\| \leq \delta_1, \|g(t, x)\| \leq \delta_2 \Rightarrow \|x(t)\| \leq \epsilon \forall t \text{ in } U \text{ opportuno.}$$

Dim:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}R(q)\omega \\ J_{mb}^{-1}[-\tilde{\omega}J_{mb}\omega - \delta^TC\delta\omega] \end{pmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ J_{mb}^{-1}[-\omega \times \delta^Td_1(t) + d_2(t)] \end{pmatrix}}_{g(x,t)}$$

basta che sia $\|\alpha_2\| < \delta_1$ in quanto $\tilde{\omega}\delta^Td_1$ si annulla nell'origine, ma non d_2 , che è il disturbo persistente.

La condizione $\|J_{mb}^{-1}[-\omega \times \delta^Td_1(t) + d_2(t)]\| \leq \delta_2$ è dunque sovrabbondante rispetto a $\|\alpha_2\| < \delta_1$. —

1.8.12 Modello matematico di un satellite rigido

Un appropriato modello matematico per studiare i problemi di controllo di un satellite può essere dedotto dalle equazioni che descrivono la dinamica di assetto. Queste equazioni sono divise in due gruppi: le equazioni cinematiche, che descrivono il moto del satellite, senza tenere in conto le forze che causano tale moto, e le equazioni dinamiche, che mostrano come le forze e i momenti esterni influenzano la variazione della velocità angolare del satellite.

Sia RC un fissato riferimento inerziale di origine O , e $R\Gamma$ un riferimento non inerziale che ruota solidariamente con un corpo rigido, con origine $\Omega \equiv O$. Come usuale, O coincide con il centro di massa del corpo principale del satellite.

Sia $R\Gamma_r$ una terna di riferimento, desiderata, con origine in $\Omega_d \equiv O$; genericamente essa non è fissa e non è inerziale. Senza perdita di generalità si suppone che tale terna $R\Gamma$ coincide con RC per $t = 0$.

Il problema di controllo di assetto può essere qualitativamente espresso come segue: trovare, se possibile, un'azione di controllo tale che $R\Gamma$ tende asintoticamente a coincidere con $R\Gamma_r$.

L'azione di controllo può essere realizzata con gas jets, collocati sul main body, o da reaction wheels. I primi sono tipicamente usati per grandi manovre di assetto, mentre i secondi sono impiegati per manovre di assetto fini.

Equazione cinematica

L'equazione cinematica specifica il l'evoluzione nel tempo di un insieme di parametri che definiscono l'assetto del satellite rispetto a un fissato riferimento inerziale.

Il teorema di Eulero afferma che il più generico spostamento di un corpo rigido che lascia fisso un punto è una rotazione attorno ad un certo asse, l'asse di Eulero, passante per il punto fisso.

Esistono molte parametrizzazioni che descrivono l'assetto di un corpo rigido nello spazio. Un insieme minimo di parametri è dato dagli angoli di Eulero φ , γ e ψ , che descrive le tre rotazioni necessarie per portare $R\Gamma$ a coincidere con la terna di riferimento $R\Gamma_r$ [?]. Ogni rotazione può essere rappresentata da una matrice ortogonale²⁶, che rappresenta una trasformazione di uno spazio tridimensionale in sé. Per esempio la rotazione di un angolo φ attorno all'asse x è rappresentato dalla matrice:

$$\mathcal{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Se φ, γ, ψ è una sequenza di rotazioni attorno agli assi i, j, k , l'operatore dell'assetto, che definisce lo spazio delle trasformazioni, è dato da:

$$\mathcal{R}_{ijk}(\varphi, \gamma, \psi) = \mathcal{R}_k(\psi)\mathcal{R}_j(\gamma)\mathcal{R}_i(\varphi).$$

Nonostante essi non siano definiti univocamente, gli angoli di Eulero sono usati frequentemente per rappresentare l'assetto principalmente perché hanno un'immediata interpretazione in termini di angoli di rollio, beccheggio, imbardata (angoli di roll, pitch e yaw).

Le rappresentazioni minime hanno lo svantaggio dell'esistenza di configurazioni dei parametri per le quali le equazioni cinematiche hanno delle singolarità analitiche. Un'ulteriore svantaggio è la loro complessità computazionale, in quanto coinvolgono il calcolo di funzioni trigonometriche. Per tali ragioni

²⁶Una matrice A si dice ortogonale se $A^{-1} = A^T$, ossia se $AA^T = A^T A = I$, ove I indica la matrice unità.

è preferibile una parametrizzazione non minima che eviti tali singolarità e sia più efficiente dal punto di vista computazionale.

La parametrizzazione non minima che fa uso dei quattro parametri di Eulero, o quaternioni unitari, è la più considerata. Per definire l'assetto del corpo rispetto a una terna inerziale RC , è necessario definire l'angolo di rotazione Φ e la direzione dell'asse di Eulero attorno al quale la terna RF , fissa con il corpo, deve ruotare per raggiungere la terna di riferimento RF_r che rappresenta l'assetto desiderato. Indicando con ϵ_i , $i = 1, 2, 3$, le componenti del versore dell'asse di Eulero, espresso nel riferimento inerziale RC , i quattro quaternioni unitari sono definiti come segue:

$$q_0 = \cos \frac{\Phi}{2}, \quad q(t) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} \operatorname{sen} \frac{\Phi}{2}.$$

Essi sono ovviamente soggetti al vincolo $\sum_{i=0}^3 q_i^2(t) = 1$. I riferimenti RC , RF e RF_r possono essere rispettivamente rappresentati dai quaternioni:

$$\hat{q}_{RC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}, \quad \hat{q}_r = \begin{pmatrix} q_{r0} \\ q_{r1} \\ q_{r2} \\ q_{r3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{r0} \\ q_r \end{pmatrix}.$$

Se $\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$ è il quaternion che rappresenta l'orientamento di RF rispetto a RC , allora $\begin{pmatrix} q_0 \\ -q \end{pmatrix}$ rappresenta quello di RC relativamente a RF . Inoltre $\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -q_0 \\ -q \end{pmatrix}$ descrivono lo stesso orientamento, ma se $\Phi \in [-\pi, \pi)$ allora q_0 è non negativo e la rappresentazione dei quaternioni è unica.

Nel seguito i pedici “i”, “b”, “r” saranno usati per denotare, rispettivamente, “inerziale”, “body” e “riferimento”. Le matrici dei coseni direttori \mathcal{R}_{bi} e \mathcal{R}_{ri} , che descrivono le rotazioni che portano RC su RF e su RF_r rispettivamente, sono ortogonali. L'espressione di \mathcal{R}_{bi} è[?][?]:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{bi} &= I - 2(q_0 I - \tilde{q})\tilde{q} = 2qq^T - 2q_0\tilde{q} + (2q_0^2 - 1)I = q_0^2 I + qq^T + (-2q_0 I + \tilde{q})\tilde{q} \\ &= R_2(q)R_1^T(q) \\ &= \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avendo utilizzato la relazione:

$$\tilde{q}^2 = qq^T - (1 - q_0^2)I,$$

cioè è la composizione di due trasformazioni lineari date da[?]:

$$\begin{aligned} R_1(q) &= \begin{pmatrix} -q & R(q) \end{pmatrix} && \text{matrice } 3 \times 4 \\ R_2(q) &= \begin{pmatrix} -q & R^T(q) \end{pmatrix} && \text{matrice } 3 \times 4 \end{aligned}$$

con $R(q) = q_0 I + \tilde{q}$ una matrice 3×3 , I la matrice identità 3×3 , e \tilde{v} la rappresentazione diadica del generico vettore $v = (v_1 \ v_2 \ v_3)^T$, data dalla matrice antisimmetrica:

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa rappresentazione permette di riscrivere il prodotto vettoriale in forma matriciale: $v \times w = \tilde{v}w$. Analogamente per \mathcal{R}_{ri} :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{ri} &= I - 2(q_{r0}I - \tilde{q}_r)\tilde{q}_r = 2q_r q_r^T - 2q_{r0}\tilde{q}_r + (2q_{r0}^2 - 1)I = q_{r0}^2 I + q_r q_r^T + (-2q_{r0}I + \tilde{q}_r)\tilde{q}_r = \\ &= R_2(q_r)R_1^T(q_r),\end{aligned}$$

ove le matrici sono come quelle definite in 1.8.12.

I vettori q e q_r sono autovettori di \mathcal{R}_{bi} e \mathcal{R}_{ri} , con autovalori unitari; infatti poiché $\tilde{q}q = q \times q = 0$, $\tilde{q}_r q_r = q_r \times q_r = 0$, si ha:

$$\mathcal{R}_{bi}q = \mathcal{R}_{bi}^T q = q, \quad \mathcal{R}_{ri}q_r = \mathcal{R}_{bi}^T q_r = q_r.$$

Tale fatto è naturale poiché per ogni matrice reale ortogonale $n \times n$ con determinante pari ad 1, se n è dispari allora ha almeno un autovettore con autovalore unitario, ossia esiste un versore ϵ che non viene cambiato dalla matrice di rotazione \mathcal{R} : $\mathcal{R}\epsilon = \epsilon$, e pertanto ϵ ha le stesse componenti sia nella terna fissa che in quella rotante, ossia ϵ giace lungo l'asse di rotazione. Questo è alla base del teorema di Eulero.

Quindi q ha le stesse coordinate sia in RC che in $R\Gamma$, mentre q_r ha le stesse componenti sia in RC che in $R\Gamma_r$.

Indicando con $\begin{pmatrix} e_0 \\ e \end{pmatrix}$ il quaternione relativo alla rotazione che porta $R\Gamma$ su $R\Gamma_r$, descritto dalla matrice di rotazione:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{rb} &= \mathcal{R}_{ri}\mathcal{R}_{bi}^T = \mathcal{R}_{ri}\mathcal{R}_{ib} = \\ &= 2ee^T - 2e_0\tilde{e} + (2e_0^2 - 1)I = e_0^2 I + ee^T + (-2e_0I + \tilde{e})\tilde{e} = \\ &= R_2(e)R_1^T(e),\end{aligned}$$

ed usando la legge di moltiplicazione dei quaternioni, si ha:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} q_{r0} \\ q_r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 e_0 - q_1 e_1 - q_2 e_2 - q_3 e_3 \\ q_0 e_1 + q_1 e_0 + q_2 e_3 - q_3 e_2 \\ q_0 e_2 - q_1 e_3 + q_2 e_0 + q_3 e_1 \\ q_0 e_3 + q_1 e_2 - q_2 e_1 + q_3 e_0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} q_0 & -q^T \\ q & q_0 I + \tilde{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & -e^T \\ e & e_0 I - \tilde{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix},\end{aligned}$$

in cui le matrici che moltiplicano $\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} e_0 \\ e \end{pmatrix}$ sono ortogonali. Dall'ultima espressione si trova:

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & q^T \\ -q & q_0 I - \tilde{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{r0} \\ q_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{r0} & q_r^T \\ q_r & -q_{r0} I + \tilde{q}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$$

N.B. e descrive l'errore tra $R\Gamma_r$ e $R\Gamma$. L'errore tra $R\Gamma$ e $R\Gamma_r$, ossia il quaternione che descrive la rotazione che porta $R\Gamma_r$ su $R\Gamma$, è

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & q^T \\ q & -q_0 I - \tilde{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{r0} \\ q_r \end{pmatrix}$$

ed è quello che uso nelle simulazioni.

ovvero

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ e \end{pmatrix} = R_3^T(q) \begin{pmatrix} q_{r0} \\ q_r \end{pmatrix} = R_4^T(q_r) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{r0}q_0 + q_r^T q_r \\ q_0 q_r - q_{r0}q + \tilde{q}q_r \end{pmatrix},$$

con:

$$R_3(q) = \left(\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} \quad R_2^T(q) \right), \quad R_4(q) = \left(\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} \quad -R_2^T(q) \right)$$

due matrici ortonormali 4×3 ; infatti:

$$\tilde{q}^2 = qq^T + (q_0^2 - 1)I = qq^T - q^T q I$$

$$R^T(q)R(q) = R(q)R^T(q) = I - qq^T$$

$$R_1^T(q)R_1(q) = R_2^T(q)R_2(q) = I_4 - \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}^T$$

con I_4 la matrice identità 4×4 . Quindi:

$$R_3(q)R_3^T(q) = R_3^T(q)R_3(q) = I_4,$$

$$R_4(q)R_4^T(q) = R_4^T(q)R_4(q) = I_4.$$

Si noti inoltre che

$$R_4^2(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_1(q)R_2^T(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{ib}(q) \end{pmatrix}.$$

Anche l'errore e ha le stesse coordinate sia in $R\Gamma$ che $R\Gamma_r$, ma non in RC . Infatti dalle 1.8.12:

$$e = q_0q_r - q_{r0}q + \tilde{q}q_r = R_2(q) \begin{pmatrix} q_{r0} \\ q_r \end{pmatrix} = -R_2(q_r) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix},$$

ed è facile verificare che:

$$\mathcal{R}_{ri}^T e = -R_2(q_r) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = q_0q_r - q_{r0}q + \tilde{q}q_r \neq e$$

$$\mathcal{R}_{bi}^T e = R_2(q) \begin{pmatrix} q_{r0} \\ q_r \end{pmatrix} = q_0q_r - q_{r0}q - \tilde{q}q_r \neq e$$

$$\mathcal{R}_{ri}\mathcal{R}_{bi}^T e = \mathcal{R}_{rb}e = \mathcal{R}_{rb}^T e = e,$$

con:

$$\mathcal{R}_{rb} = R_1(q_r)R_2^T(q_r)R_2(q)R_1^T(q),$$

e dove è stato usato il fatto che $R_1(q)$, $R_2(q)$ hanno $R_1^T(q)$, $R_2^T(q)$ come inverse destre:

$$R_1(q)R_1^T(q) = I, \quad R_2(q)R_2^T(q) = I.$$

Dalla 1.8.12 è facile vedere che $R\Gamma$ e $R\Gamma_r$ coincidono se e solo se $e = 0$ [?]. Infatti se $e = 0$, e quindi $e_0 = 1$ a causa della relazione di vincolo, si ha:

$$q_0q_{r0} + q^T q_r = 1$$

$$\tilde{q}q_r = q_{r0}q - q_0q_r.$$

Ma $\tilde{q}q_r = q \times q_r$ e $q_{r0}q - q_0q_r$ sono ortogonali l'un l'altro, e quindi la seconda delle 1.8.12 è vera se e solo se entrambi i vettori sono nulli; pertanto $q_r = \frac{q_{r0}}{q_0}q$ (si noti che q_0 deve essere), che sostituito nella relazione di vincolo dà:

$$q_{r0}^2 + q_r^T q_r = q_{r0}^2 + \frac{q_{r0}^2}{q_0^2} q^T q = \frac{q_{r0}^2}{q_0^2} (q_0^2 + q^T q) = \frac{q_{r0}^2}{q_0^2} = 1,$$

cioé:

$$q_{r0} = \pm q_0 \quad \Rightarrow \quad q_r = \pm q.$$

Ma $\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -q_0 \\ -q \end{pmatrix}$ rappresentano lo stesso assetto e quindi $R\Gamma \equiv R\Gamma_r$. Viceversa se $\begin{pmatrix} q_{r0} \\ q_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$, poiché:

$$R_1(q) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = R_2(q) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = 0,$$

allora:

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ e \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} \quad R_1^T(q) \right)^T \begin{pmatrix} q_{r0} \\ q_r \end{pmatrix} \Big|_{\substack{q_{r0}=q_0 \\ q_r=q}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La parametrizzazione data dai quaternioni è conveniente non solo perché si ha una rappresentazione libera da inerenti singolarità geometriche, che invece si hanno con gli angoli di Eulero, ma anche perché la matrice dell'assetto è algebrica nelle componenti dei quaternioni, per cui non si bisogno di funzioni trascendenti. Inoltre le rotazioni in successione seguono le regole di moltiplicazione dei quaternioni; tale calcolo implica solo 16 moltiplicazioni e 12 addizioni (vedi la 1.8.12) anziché le 27 moltiplicazioni e le 18 addizioni del prodotto di due matrici di rotazione. Questi fatti rendono i quaternioni adatti per calcoli in tempo reale a bordo del satellite.

Inoltre la parametrizzazione che usa gli angoli di Eulero ha l'inconveniente che le manovre di rotazione devono essere ottenute come una sequenza di rotazioni attorno a tre assi, con un tempo di manovra più lungo di un fattore 2 o 3 rispetto alla rotazione singola attorno un asse. Ciò è importante nel caso di rapidi cambi di assetto. Rotazioni singole sono importanti anche dal punto di vista di consumo ottimo del carburante.

La parametrizzazione mediante quaternioni è adatta a caratterizzare la legge di controllo necessaria per realizzare una fissata manovra d'assetto. Questo viene fatto specificando, in termini di errore d'assetto, il quaterniono della terna $R\Gamma$ rispetto al quaterniono della terna di riferimento $R\Gamma_r$.

Se $\omega = (\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3)^T$ è il vettore della velocità angolare del satellite, espresso nella terna non inerziale $R\Gamma$, e $\bar{\omega}_r = (\bar{\omega}_{r1} \quad \bar{\omega}_{r2} \quad \bar{\omega}_{r3})^T$ la velocità angolare di $R\Gamma_r$, espressa in $R\Gamma_r$, allora la velocità angolare di $R\Gamma_r$ rispetto a $R\Gamma$, espressa in $R\Gamma$, è:

$$\omega_e = \omega - \mathcal{R}_{br} \bar{\omega}_d = \omega - \omega_r,$$

con

$$\omega_r = \mathcal{R}_{br} \bar{\omega}_r$$

la velocità angolare di $R\Gamma_r$ espressa in $R\Gamma$. Indicando con $\tilde{\omega}_e$ la rappresentazione diadica:

$$\tilde{\omega}_e = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{e3} & \omega_{e2} \\ \omega_{e3} & 0 & -\omega_{e1} \\ -\omega_{e2} & \omega_{e1} & 0 \end{pmatrix},$$

l'equazione cinematica, espressa in $R\Gamma$, che dà le relazioni tra la velocità d'errore ω_e e la velocità di variazione dei quaternioni d'errore e_0, e , assume la forma[?]:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_e^T \\ \omega_e & -\tilde{\omega}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ e \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^T \\ R(e) \end{pmatrix} \omega_e = \frac{1}{2} R_2^T(e) \omega_e.$$

Equazione dinamica

L'equazione dinamica di un satellite rigido può essere ottenuta usando il teorema di Eulero, che fornisce la dinamica della velocità angolare:

$$\dot{L}_{tot} = -\tilde{\omega} L_{tot} + u_g$$

purché i momenti dovuti alle reaction wheels siano stati preventivamente modellati. In 1.8.12:

- u_g indica il vettore del momento esterno agente sul satellite;
- L_{tot} rappresenta il momento angolare totale del sistema.

Queste quantità sono espresse nella terna non inerziale RF .

La dinamica delle wheels è descritta dall'equazione:

$$\dot{\Omega} = -\dot{\omega} + J_r^{-1}u_r,$$

dove:

- $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \end{pmatrix}^T$ è la velocità angolare delle reaction wheels rispetto al satellite, espressa nella terna non inerziale RF ;
- u_r rappresenta il vettore del momento di reazione;
- J_r è il tensore (3×3) d'inerzia simmetrico delle reaction wheels.

Anche tutte queste quantità sono espresse nella terna non inerziale RF .

Il momento angolare totale è la seguente espressione:

$$L_{tot}(\omega, \Omega) = J_{tot}\omega + J_r\Omega,$$

con J_{tot} il tensore d'inerzia simmetrico (3×3) della struttura, espresso nella terna RF :

$$J_{tot} = J_{mb} + J_r,$$

come somma dei tensori d'inerzia del main body e delle reaction wheels, tutti espressi nella terna non inerziale RF fissa al main body.

Se $\omega = \omega_e + \omega_r$ viene sostituita in 1.8.12, 1.8.12 e 1.8.12, si trova:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_e &= J_{mb}^{-1} \left[-N(\omega_e, \Omega, \omega_r) + u_g - u_r \right] - \dot{\omega}_r \\ \dot{\Omega} &= J_{mb}^{-1} \left[N(\omega_e, \Omega, \omega_r) - u_g + J_{tot}J_r^{-1}u_r \right] + \dot{\omega}_r \end{aligned}$$

dove:

$$N(\omega_e, \Omega, \omega_r) = N_1(\omega_e) + N_2(\omega_e, \Omega) + N_3(\omega_e, \Omega, \omega_r)$$

$$N_1(\omega_e) = \omega_e \times J_{tot}\omega_e,$$

$$N_2(\omega_e, \Omega) = \omega_e \times J_r\Omega$$

$$\begin{aligned} N_3(\omega_e, \Omega, \omega_r) &= \omega_e \times J_{tot}\omega_r + \omega_r \times J_{tot}\omega_e + \\ &\quad + \omega_r \times J_{tot}\omega_r + \omega_r \times J_r\Omega \end{aligned}$$

e dove $\dot{\omega}_r$ esprime l'accelerazione di RF_r rispetto a RF , ed è espressa in RF .

Modello matematico del satellite rigido

Il modello matematico del satellite rigido[?][?][?] è costituito dalle equazioni 1.8.12, 1.8.12:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}S(\omega_e) \begin{pmatrix} e_0 \\ e \end{pmatrix} = \frac{1}{2}R_2^T(e)\omega_e \\ \dot{\omega}_e &= J_{mb}^{-1} \left[-N(\omega_e, \Omega, \omega_r) + u_g - u_r \right] - \dot{\omega}_r \\ \dot{\Omega} &= J_{mb}^{-1} \left[N(\omega_e, \Omega, \omega_r) - u_g + J_{tot}J_r^{-1}u_r \right] + \dot{\omega}_r \end{aligned}$$

ove:

$$S(\omega_e) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_e^T \\ \omega_e & -\tilde{\omega}_e \end{pmatrix}.$$

Si noti la dipendenza esplicita delle equazioni del modello dal tempo, tramite $\dot{\omega}_r$. Tale dipendenza può essere tolta ridefinendo il controllo $u_g = \bar{u}_g + J_{mb}\dot{\omega}_r + N_3(\omega_e, \Omega, \omega_r)$. Le espressioni di ω_r e $\dot{\omega}_r$ sono calcolate a partire dai quaternioni di riferimento q_{r0} , q_r e dalle loro derivate:

$$\begin{aligned} \omega_r &= \mathcal{R}_{br}\bar{\omega}_r, & \dot{\omega}_r &= \mathcal{R}_{br}\dot{\bar{\omega}}_r, \\ \bar{\omega}_r &= 2R_2(q_r) \begin{pmatrix} \dot{q}_{r0} \\ \dot{q}_r \end{pmatrix}, & \dot{\bar{\omega}}_r &= \dot{\omega}_r = 2R_2(q_r) \begin{pmatrix} \ddot{q}_{r0} \\ \ddot{q}_r \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ove **NO**: $\mathcal{R}_{br} = \mathcal{R}_{bi}\mathcal{R}_{ir} = R_2(q)R_1^T(q)R_1(q_r)R_2^T(q_r) = R_1(e)R_2^T(e)$??

$$\mathcal{R}_{br} = \mathcal{R}_{bi}\mathcal{R}_{ir} = R_1(q)R_2^T(q)R_2(q_r)R_1^T(q_r) = R_2(e)R_1^T(e)$$

è la matrice di rotazione che trasforma i vettori espressi in $R\Gamma_r$ in vettori espressi in $R\Gamma$, con

$$\begin{aligned} \dot{q}_{r0} &= -\frac{\dot{\Phi}_r}{2} \operatorname{sen} \frac{\Phi_r}{2} \\ \dot{q}_r &= \dot{\epsilon}_r \operatorname{sen} \frac{\Phi_r}{2} + \epsilon_r \frac{\dot{\Phi}_r}{2} \cos \frac{\Phi_r}{2} \\ \ddot{q}_{r0} &= -\frac{\ddot{\Phi}_r}{2} \operatorname{sen} \frac{\Phi_r}{2} - \frac{\dot{\Phi}_r^2(t)}{4} \cos \frac{\Phi_r}{2} \\ \ddot{q}_r &= \ddot{\epsilon}_r \operatorname{sen} \frac{\Phi_r}{2} + \dot{\epsilon}_r \dot{\Phi}_r \cos \frac{\Phi_r}{2} + \epsilon_r \frac{\ddot{\Phi}_r}{2} \cos \frac{\Phi_r}{2} - \epsilon_r \frac{\dot{\Phi}_r^2(t)}{4} \operatorname{sen} \frac{\Phi_r}{2}, \end{aligned}$$

con ϵ_r , Φ_r il versore dell'asse di Eulero e l'angolo di rotazione. Condizioni imposte su ω_r e $\dot{\omega}_r$ si riflettono quindi in condizioni su $\dot{\epsilon}_r$, $\ddot{\epsilon}_r$, $\dot{\Phi}_r$ and $\ddot{\Phi}_r$.

1.8.13 Determinazione della velocità angolare[?]

Libro di Hughes, pag 24

Sia $\mathcal{R}(\Phi)$ la matrice dei coseni direttori che definisce una rotazione di un angolo Φ attorno all'asse di rotazione generico, ossia attorno all'asse di Eulero, di versore ϵ , passante per l'origine del sistema di riferimento RC (punto fisso). In termini di ϵ e Φ tale matrice si scrive (si veda anche più avanti)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\Phi) &= I + (1 - \cos\Phi) \tilde{\epsilon}^2 - \operatorname{sen}\Phi \tilde{\epsilon} \\ &= \cos\Phi I + (1 - \cos\Phi) \epsilon\epsilon^T - \operatorname{sen}\Phi \tilde{\epsilon} \end{aligned}$$

ove $\tilde{\epsilon}^2 = \epsilon\epsilon^T - \epsilon^T\epsilon I = \epsilon\epsilon^T - I$.

Determiniamo ω a partire da $\dot{\Phi}$ e $\dot{\epsilon}$.

1.8.14 Alcune proprietà interessanti[?][?]

Data la matrice $\mathcal{R}_{bi} = R_2(q)R_1^T(q)$ data dalla 1.8.12, con $R_1(q)$, $R_2(q)$ date dalle 1.8.12, si noti che

$$\begin{aligned} R_1(q) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -q & R(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = 0 \\ R_2(q) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -q & R^T(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

per cui

$$\dot{R}_1(q) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + R_1(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{R}_1(q) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = -R_1(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix}$$

e

$$\dot{R}_2(q) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = -R_2(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix}.$$

Inoltre è facile verificare che

$$\begin{aligned} \dot{R}_1(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\dot{q} & \dot{R}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{q} & \dot{q}_0 I + \tilde{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0 \\ \dot{R}_2(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\dot{q} & \dot{R}^T(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{q} & \dot{q}_0 I - \tilde{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Ora mostriamo che

$$R_2(q) \dot{R}_1^T(q) = \dot{R}_2(q) R_1^T(q).$$

Infatti si noti innanzitutto che $\tilde{q} = \dot{q}$ e che

$$q\dot{q}^T + \tilde{q}\dot{\tilde{q}} = \dot{q}q^T + \dot{\tilde{q}}\tilde{q}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} R_2(q) \dot{R}_1^T(q) &= \begin{pmatrix} -q & R^T(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{q}^T \\ R^T(\dot{q}) \end{pmatrix} = q\dot{q}^T + R^T(q) R^T(\dot{q}) = \\ &= q\dot{q}^T + (q_0 I - \tilde{q})(\dot{q}_0 I - \tilde{q}) = q\dot{q}^T + q_0 \dot{q}_0 I - q_0 \dot{\tilde{q}} - \dot{q}_0 \tilde{q} + \tilde{q}\dot{\tilde{q}} = \\ &= q\dot{q}^T + \tilde{q}\dot{\tilde{q}} + (q_0 \dot{q}_0 I - q_0 \dot{\tilde{q}} - \dot{q}_0 \tilde{q}) \\ \dot{R}_2(q) R_1^T(q) &= \begin{pmatrix} -\dot{q} & R^T(\dot{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q^T \\ R^T(q) \end{pmatrix} = \dot{q}q^T + R^T(\dot{q}) R^T(q) = \\ &= \dot{q}q^T + (\dot{q}_0 I - \tilde{q})(q_0 I - \tilde{q}) = \dot{q}q^T + q_0 \dot{q}_0 I - \dot{q}_0 \tilde{q} - q_0 \dot{\tilde{q}} + \tilde{q}\dot{\tilde{q}} = \\ &= \dot{q}q^T + \tilde{q}\dot{\tilde{q}} + (q_0 \dot{q}_0 I - q_0 \dot{\tilde{q}} - \dot{q}_0 \tilde{q}) \end{aligned}$$

e dal confronto di queste due espressioni si ricava la tesi 1.8.14.

Derivando $\mathcal{R}_{bi} = R_2(q) R_1^T(q)$ ed usando la 1.8.14 si trova poi

$$\dot{\mathcal{R}}_{bi} = \dot{R}_2(q) R_1^T(q) + R_2(q) \dot{R}_1^T(q) = 2\dot{R}_2(q) R_1^T(q) = 2R_2(q) \dot{R}_1^T(q).$$

Derivando nuovamente:

$$\ddot{\mathcal{R}}_{bi} = 2\ddot{R}_2(q) R_1^T(q) + 2\dot{R}_2(q) \dot{R}_1^T(q) = 2\dot{R}_2(q) \dot{R}_1^T(q) + 2R_2(q) \ddot{R}_1^T(q),$$

per cui

$$\ddot{R}_2(q) R_1^T(q) = R_2(q) \ddot{R}_1^T(q).$$

Si noti poi che essendo $\begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = 1$, derivando si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 & \dot{q}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0,$$

ossia, poiché $\dot{q}^T q = q^T \dot{q}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 & \dot{q}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0.$$

Così pure:

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_0 & \ddot{q}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{q}_0 & \dot{q}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0.$$

Ricordando la 1.8.12:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} S(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{2} R_2^T(q) \omega,$$

ove

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix}, \quad R_2^T(q) = \begin{pmatrix} -q^T \\ R(q) \end{pmatrix}$$

dalle 1.8.14 si trova anche che:

$$\begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} S(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} R_2^T(q) \omega$$

per qualsiasi ω . Ciò si poteva anche determinare con un calcolo diretto:

$$\begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} S(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^T \omega & -q_0 \omega^T - q^T \tilde{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix} R_2^T(q) \omega = \left[-q_0 q^T + q^T (q_0 I + \tilde{q}) \right] \omega = 0.$$

Si noti che la matrice $S(\omega)$ è antisimmetrica: $S^T(\omega) = -S(\omega)$. Inoltre vale la seguente relazione:

$$R_2(q) S(\omega) R_2^T(q) = -\tilde{\omega},$$

come si può verificare svolgendo i (lungli) calcoli e tenendo conto che:

$$\tilde{\omega} \tilde{q} = q \omega^T - q^T \omega I, \quad \tilde{q} \tilde{\omega} = \omega q^T - q^T \omega I,$$

e verificando che

$$-q_0^2 \tilde{\omega} + \left(\tilde{q} \omega q^T + q \omega^T \tilde{q} - q^T \omega \tilde{q} \right) = -q_0^2 \tilde{\omega} - q^T q \tilde{\omega} = -\tilde{\omega}.$$

Si noti inoltre che vale la relazione:

$$\dot{R}_2^T(q) = -\frac{1}{2} \left[S(\omega) R_2^T(q) + 2 \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} \omega^T \right].$$

Infatti:

$$\dot{R}_2^T(q) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} q_0 \omega^T + \frac{1}{2} \omega^T \tilde{q} \\ -\frac{1}{2} q^T \omega I + \frac{1}{2} q_0 \tilde{\omega} + \frac{1}{2} (q \times \omega) \times \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_0 \omega^T + \omega^T \tilde{q} \\ -q^T \omega I + q_0 \tilde{\omega} + \omega q^T - q \omega^T \end{pmatrix},$$

in cui si è usato il fatto che $(q \times \omega) \times = \omega q^T - q \omega^T$, e

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left[S(\omega) R_2^T(q) + 2 \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} \omega^T \right] &= -\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q^T \\ q_0 I + \tilde{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2q_0 \omega^T \\ 2q \omega^T \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_0 \omega^T + \omega^T \tilde{q} \\ \omega q^T + q_0 \tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{q} - 2q \omega^T \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_0 \omega^T + \omega^T \tilde{q} \\ -q^T \omega I + q_0 \tilde{\omega} + \omega q^T - q \omega^T \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

in cui si sono usate le 1.8.14.

Mostriamo che:

$$\dot{R}_4^T(q)R_4(q) = \frac{1}{2}S(\omega).$$

Infatti per la 1.8.12 e la 1.8.14:

$$\begin{aligned} \dot{R}_4^T(q)R_4(q) &= \begin{pmatrix} \dot{q}_0 & \dot{q}^T \\ -\dot{R}_2(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} & -R_2^T(q) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega^T R_2(q) \\ \frac{1}{2}[-R_2(q)S(\omega) + 2\omega \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} & -R_2^T(q) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ma:

$$\frac{1}{2}\omega^T R_2(q) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = 0 \quad \text{per la 1.22}$$

$$-\frac{1}{2}\omega^T R_2(q)R_2^T(q) = -\frac{1}{2}\omega^T \quad \text{per la 1.8.12}$$

$$\frac{1}{2}[-R_2(q)S(\omega) + 2\omega \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\omega \quad \text{per calcolo diretto (lungo)}$$

$$-\frac{1}{2}[-R_2(q)S(\omega) + 2\omega \begin{pmatrix} q_0 & q^T \end{pmatrix}]R_2^T(q) = -\frac{1}{2}\tilde{\omega} \quad \text{per le 1.8.14, 1.22.}$$

Pertanto poiché per l'ortonormalità $R_4(q)R_4^T(q) = R_4^T(q)R_4(q) = I$, si ha:

$$\dot{R}_4(q) = -R_4(q)\dot{R}_4^T(q)R_4(q) = -\frac{1}{2}R_4(q)S(\omega).$$

Dunque:

$$\dot{R}_4(q) = -\frac{1}{2}R_4(q)S(\omega).$$

Dalla 1.8.12:

$$T(q) = R_4^2(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{ib}(q) \end{pmatrix}$$

derivando rispetto al tempo e usando la 1.8.14 si ha:

$$\begin{aligned} \dot{T}(q) &= R_4(q)\dot{R}_4(q) + \dot{R}_4(q)R_4(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mathcal{R}}_{ib}(q) \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{2}R_4^2(q)S(\omega) - \frac{1}{2}R_4(q)S(\omega)R_4(q) = \\ &= -\frac{1}{2}T(q)[S(\omega) + R_4^T(q)S(\omega)R_4(q)], \end{aligned}$$

avendo considerato che $R_4(q)$ è ortonormale. Sviluppando i (lungi) calcoli:

$$S(\omega) + R_4^T(q)S(\omega)R_4(q) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega^T \\ -\omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\tilde{\omega} \end{pmatrix},$$

per cui

$$\dot{T}(q) = T(q) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega} \end{pmatrix}.$$

Da essa si trova la legge di variazione della matrice $\mathcal{R}_{ib}(q)$:

$$\dot{\mathcal{R}}_{ib}(q) = \mathcal{R}_{ib}(q)\tilde{\omega}.$$

Siano v , w e z tre vettori espressi in RF . La loro espressione nella terna inerziale RC è

$$\mathbf{v} = \mathcal{R}_{ib}v, \quad \mathbf{w} = \mathcal{R}_{ib}w, \quad \mathbf{z} = \mathcal{R}_{ib}z.$$

Ora se

$$z = v \times w = \tilde{v}w, \quad \mathbf{z} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{w},$$

dalla seconda relazione si ha:

$$\mathcal{R}_{ib}z = \tilde{\mathbf{v}}\mathcal{R}_{ib}w,$$

da cui

$$\mathcal{R}_{ib}\tilde{v}w = \tilde{\mathbf{v}}\mathcal{R}_{ib}w.$$

Valendo questa relazione per ogni w si giunge alla conclusione che

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathcal{R}_{ib}\tilde{v}\mathcal{R}_{ib}^T = \mathcal{R}_{ib}\tilde{v}\mathcal{R}_{bi}.$$

Questa relazione vale per qualsiasi vettore, in particolare per il vettore ω :

$$\tilde{\omega} = \mathcal{R}_{ib}\tilde{\omega}\mathcal{R}_{bi},$$

essendo $\tilde{\omega}$ e ω le rappresentazioni della velocità angolare di RF rispetto a RC , espressa in RF e RC :

$$\omega = \mathcal{R}_{bi}\tilde{\omega}.$$

Indicando ora con $\frac{d}{dt}$ la derivata nel riferimento inerziale RC , per la legge di Poisson:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} + \omega \times \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} + \tilde{\omega}\mathbf{v}$$

con

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathcal{R}_{ib}\dot{v}.$$

Inoltre poiché $\mathbf{v} = \mathcal{R}_{ib}v$ si ha:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt}v + \mathcal{R}_{ib}\dot{v} = \frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt}v + \dot{\mathbf{v}},$$

(v viene derivato in RF) per cui si deduce che

$$\frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt}v = \tilde{\omega}\mathbf{v} = \tilde{\omega}\mathcal{R}_{ib}v.$$

Valendo questo per ogni v , si conclude che

$$\tilde{\omega} = \frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt}\mathcal{R}_{ib}^T = \frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt}\mathcal{R}_{bi}.$$

Confrontando la 1.8.14 con la 1.8.14:

$$\frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt}\mathcal{R}_{bi} = \mathcal{R}_{ib}\tilde{\omega}\mathcal{R}_{bi},$$

e quindi

$$\frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt} = \mathcal{R}_{ib}\tilde{\omega},$$

ovvero

$$\frac{d\mathcal{R}_{bi}}{dt} = \tilde{\omega}^T\mathcal{R}_{bi} = -\tilde{\omega}\mathcal{R}_{bi}.$$

Infine, sempre dalla 1.8.14

$$\tilde{\omega} = \mathcal{R}_{bi}\tilde{\omega}\mathcal{R}_{ib},$$

per cui

$$\frac{d\mathcal{R}_{ib}}{dt} = \tilde{\omega}\mathcal{R}_{ib},$$

ovvero

$$\frac{d\mathcal{R}_{bi}}{dt} = -\mathcal{R}_{bi}\tilde{\omega}.$$

Data la matrice

$$R(q) = q_0I + \tilde{q} = \begin{pmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix},$$

svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\dot{R}(q)\omega = -\frac{\|\omega\|^2}{2}q.$$

Infatti essendo

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= \frac{1}{2}(-q_1\omega_1 - q_2\omega_2 - q_3\omega_3) & \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(q_3\omega_1 + q_0\omega_2 - q_1\omega_3) \\ \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(q_0\omega_1 - q_3\omega_2 + q_2\omega_3) & \dot{q}_3 &= \frac{1}{2}(-q_2\omega_1 + q_1\omega_2 + q_0\omega_3) \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \dot{R}(q)\omega &= \begin{pmatrix} \dot{q}_0 & -\dot{q}_3 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 & \dot{q}_0 & -\dot{q}_1 \\ -\dot{q}_2 & \dot{q}_1 & \dot{q}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-q_1\omega_1 - q_2\omega_2 - q_3\omega_3)\omega_1 - (-q_2\omega_1 + q_1\omega_2 + q_0\omega_3)\omega_2 \\ (-q_2\omega_1 + q_1\omega_2 + q_0\omega_3)\omega_1 + (-q_1\omega_1 - q_2\omega_2 - q_3\omega_3)\omega_2 \\ -(q_3\omega_1 + q_0\omega_2 - q_1\omega_3)\omega_1 + (q_0\omega_1 - q_3\omega_2 + q_2\omega_3)\omega_2 \\ + (q_3\omega_1 + q_0\omega_2 - q_1\omega_3)\omega_3 \\ -(q_0\omega_1 - q_3\omega_2 + q_2\omega_3)\omega_3 \\ + (-q_1\omega_1 - q_2\omega_2 - q_3\omega_3)\omega_3 \end{pmatrix} = -\frac{\|\omega\|^2}{2}q. \end{aligned}$$

1.8.15 Osservazione sulle ruote di reazione in un satellite rigido

Siano $\bar{u}_r, -\bar{u}_r$ i momenti scambiati tra main body e reaction wheels e u_g quello dovuto ai gas jets sul main body. Le equazioni dinamiche per il main body e le reaction wheels si scrivono

$$\begin{aligned} J_{mb}\dot{\omega} &= -\tilde{\omega}J_{mb}\omega + u_g + \bar{u}_r \\ J_r(\dot{\omega} + \dot{\Omega}) &= -\tilde{\omega}J_r(\omega + \Omega) - \bar{u}_r \end{aligned}$$

essendo le equazioni scritte nel riferimento $R\Gamma$ fisso con il main body, che ruota con velocità angolare ω rispetto a quello inerziale RC .

I vettori sono espressi in $R\Gamma$ e si utilizza la legge di Poisson di derivazione

$$\frac{dv}{dt} = \dot{v} + \tilde{\omega}v$$

con $\frac{dv}{dt}$ e \dot{v} la derivata assoluta e relativa di v . Infine $\omega + \Omega$ è la velocità di rotazione (componente per componente) delle reaction wheels, espressa in $R\Gamma$, essendo Ω quella relativa al main body. Si noti che se $\Omega \equiv 0$ le reaction wheels sono bloccate ed è come avere un main body con momento d'inerzia $J_{mb} + J_r$.

Le reaction wheels possono essere più di una per ogni asse, nel qual caso si considerano le somme delle componenti su ciascun asse. Inoltre non è necessario che l'asse di simmetria di una reaction wheel passi per un asse di RF . In altre parole, se si ha una reaction wheel non orientata come un asse di RF che ruota con velocità $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \end{pmatrix}^T$, essa equivale a tre reaction wheels, orientate come gli assi di RF , che ruotano con velocità pari alle componenti Ω_i .

Sommando le equazioni dinamiche si ha

$$J_{mb}\dot{\omega} + J_r(\dot{\omega} + \dot{\Omega}) = -\tilde{\omega}J_{mb} - \tilde{\omega}J_r(\omega + \Omega)\omega + u_g$$

e posto

$$\begin{aligned} u_r &:= J_r(\dot{\omega} + \dot{\Omega}) \\ N(\omega, \Omega) &= -\tilde{\omega}(J_{tot}\omega + J_r\Omega) \\ J_{tot} &= J_{mb} + J_r \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} J_{mb}\dot{\omega} &= -N(\omega, \Omega) + u_g - u_r \\ J_r(\dot{\omega} + \dot{\Omega}) &= u_r \end{aligned}$$

da cui si ricava il modello del satellite rigido.

Si noti che come u_g è il momento esplicito dai gas jets sul main body, così u_r è il momento esplicito dai motori delle reaction wheels sul main body. Il momento \bar{u}_r scambiato tra main body e reaction wheels è diverso da u_r . Confrontando le 1.8.15 e 1.8.15:

$$u_r = -\tilde{\omega}J_r(\omega + \Omega) - \bar{u}_r.$$

Questa differenza è dovuta all'effetto giroscopico legato alla rotazione delle reaction wheels. Se si suppone che i motori non esplichino momento, e le ruote siano libere di girare, ed una reaction wheel ruotasse ad una certa velocità Ω , per il fatto che tutto il satellite ruota con una velocità ω si ha un momento giroscopico agente sul main body $-\tilde{\omega}J_r(\omega + \Omega)$.

Il momento u_r è poi il momento esplicito dai motori delle reaction wheels al netto del termine giroscopico ed eventualmente di disturbi o dissipazioni, qui non considerate, ed è funzione della tensione d'alimentazione e della velocità Ω a cui ruotano le reaction wheels (infatti per applicare un momento occorre variare Ω). Si noti che una reaction wheel può fornire un momento tanto maggiore quanto maggiore è l'accelerazione che il motore può imprimere alla ruota.

L'equazione dinamica del main body può essere riscritta come

$$J_{mb}\dot{\omega} = -\tilde{\omega}J_{mb}\omega - \tilde{\omega}J_r(\omega\Omega) + u_g - u_r = M^e$$

con

$\tilde{\omega}J_{mb}\omega$ il momento giroscopico dovuto alla rotazione del main body;

$\tilde{\omega}J_r(\omega + \Omega)$ il momento giroscopico dovuto alla rotazione delle reaction wheels;

u_g il momento dovuto ai gas jets;

u_r il momento dovuto ai motori delle reaction wheels;

M^e la somma dei momenti esterni al main body.

Questa è la comodità di scrivere le equazioni dinamiche nella forma 1.8.15 piuttosto che nella forma 1.8.15

1.8.16 Stabilizzazione di un satellite rigido

Il modello matematico del satellite rigido è costituito dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{q}_0 &= -\frac{1}{2}q^T\omega \\ \dot{q} &= \frac{1}{2}R(q)\omega \\ \dot{\omega} &= J_{mb}^{-1}\left[-\tilde{\omega}\xi + u_g - u_r\right] \\ \dot{\xi} &= -\tilde{\omega}\xi + u_g\end{aligned}$$

in cui $\xi = J_{tot}\omega + J_r\Omega$

Si consideri la funzione di Lyapunov

$$V = k_p\left[(1 - q_0)^2 + q^Tq\right] + \frac{1}{2}\omega^T J_{mb}\omega + \frac{1}{2}\xi^T\xi.$$

Derivandola:

$$\dot{V} = \omega^T\left[k_pq - \tilde{\omega}\xi + u_g - u_r\right] + \xi^T u_g$$

e posto

$$u_g = -k_g\xi, \quad u_r = k_pq + k_d\omega - k_g\xi$$

si ha

$$\dot{V} = -k_d\|\omega\|^2 - k_d\|\xi\|^2.$$

Per il teorema di La Salle le traiettorie del sistema tendono al più grande insieme invariante contenuto nell'insieme

$$\mathcal{E} = \{x \mid \dot{V} = 0\} = \{\omega \equiv 0, \xi \equiv 0\}.$$

Ma dalle equazioni dinamiche del sistema controreazionato si ha

$$\dot{\omega} \equiv 0 = J_{mb}^{-1}\left[-\tilde{\omega}\xi - k_pq - k_d\omega\right] = J_{mb}^{-1}\left[-k_pq\right],$$

ossia deve essere $q \equiv 0$. Dunque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} q \\ \omega \\ \xi \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} q \\ \omega \\ \Omega \end{pmatrix} = 0.$$

Nel caso in cui non vi siano gas jets:

$$u_g = 0, \quad u_r = k_pq + k_d\omega$$

risolve il problema, mentre se le reaction wheels sono presenti ma non sono attive

$$V = k_p\left[(1 - q_0)^2 + q^Tq\right] + \frac{1}{2}\omega^T J_{mb}\omega + \frac{1}{2}(\omega + \Omega)^T J_r(\omega + \Omega),$$

essendo $J_r(\dot{\omega} + \dot{\Omega}) = u_r = 0$, per cui con

$$u_g = -k_pq - k_d\omega, \quad u_r = 0$$

si ha

$$\dot{V} = \omega^T\left[k_pq - \tilde{\omega}\xi + u_g - u_r\right] = \omega^T\left[k_pq + u_g\right] = -k_d\|\omega\|^2,$$

per cui si ricava che $q \rightarrow 0$ (per La Salle) e che Ω resta limitata (per Lyapunov).

1.8.17 Stabilizzazione globale robusta di un satellite rigido[?]

Sia dato un satellite rigido senza reaction wheels

$$\begin{aligned}\dot{q}_0 &= -\frac{1}{2}q^T\omega \\ \dot{q} &= \frac{1}{2}R(q)\omega \\ \dot{\omega} &= J^{-1}\left[-\tilde{\omega}J\omega + u_g\right]\end{aligned}$$

con $J = J_{mb}$, $R(q) = q_0I + \tilde{q}$. Considerata la funzione di Lyapunov

$$V = \gamma(1 - q_0)^2 + q^TK_pq + \frac{1}{2}\omega^TJ\omega$$

ove $K_p = K_p^T > 0$, lungo le traiettorie del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \gamma(1 - q_0)\omega^Tq + q^TK_pR(q)\omega + \omega^T\left[-\tilde{\omega}J\omega + u_g\right] = \\ &= \omega^T\left[R^T(q)K_p + \gamma(1 - q_0)I\right]q + \omega^T\left[-\tilde{\omega}J\omega + u_g\right]\end{aligned}$$

ossia:

$$\dot{V} = \omega^T\left\{\left[R^T(q)K_p + \gamma(1 - q_0)I\right]q - \tilde{\omega}J\omega + u_g\right\}.$$

Si ponga:

$$u_g = -\left[R^T(q)K_p + \gamma(1 - q_0)I\right]q - K_d\omega + v,$$

con $v = 0$ oppure $v = \tilde{\omega}J\omega$. Si noti che in questo secondo caso occorre conoscere J . Si ha allora:

$$\dot{V} = -\omega^TK_d\omega \leq 0$$

con $\dot{V} = 0$ se e solo se $\omega \equiv 0$. Dunque si ha anche (per $\omega = 0$):

$$\dot{\omega} = 0 = -\left[R^T(q)K_p + \gamma(1 - q_0)I\right]q.$$

Mostriamo che questo implica che $q_0 = \pm 1$ e $q = 0$. Si noti che questi due gruppi di valori individuano lo stesso assetto. Premoltiplicando per q^T :

$$q^T\left[(q_0I - \tilde{q})K_p + \gamma(1 - q_0)I\right]q = q^T\left[q_0K_p + \gamma(1 - q_0)I\right]q = q^TM(q)q = 0,$$

con

$$M(q) = q_0K_p - \gamma(1 - q_0)I.$$

Gli autovalori di $M(q)$ sono le soluzioni di

$$\begin{aligned}|\lambda I - M(q)| &= |\lambda I - q_0K_p - \gamma(1 - q_0)I| = |(\lambda - \gamma(1 - q_0))I - q_0K_p| = \\ &= |\bar{\lambda}I - q_0K_p| = 0\end{aligned}$$

$\bar{\lambda} = \lambda - \gamma(1 - q_0)$, ossia sono pari agli autovalori di q_0K_p , e quindi a quelli di K_p moltiplicati per q_0 , traslati di $\gamma(1 - q_0)$:

$$\lambda_i^M = q_0\lambda_i^{K_p} + \gamma(1 - q_0) = q_0(\lambda_i^{K_p} - \gamma) + \gamma.$$

Pensando alla forma canonica di Jordan, la matrice $M(q)$ è singolare se e solo se uno dei suoi autovalori è nullo. Perché ciò accada si deve avere che

$$q_0 = -\frac{\gamma}{\lambda_i^{K_p} - \gamma}.$$

Ma $\lambda_i^{K_p} > 0$ poiché $K_p > 0$. Si hanno i seguenti casi:

- se $\lambda_i^{K_p} \in (0, \gamma)$ oppure $\lambda_i^{K_p} \in (\gamma, 2\gamma)$ allora $q_0 > 1$, il che è impossibile;
- se $\lambda_i^{K_p} = \gamma$ allora $\lambda_i^M = \gamma \neq 0$;
- se $\lambda_i^{K_p} = 2\gamma$ allora $\lambda_i^M = (q_0 + 1)\gamma$, e tale autovalore si annulla se e solo se $q_0 = -1$.

Si può concludere lo studio della singolarità di $M(q)$ dicendo che per $\lambda_i^{K_p} \in (0, 2\gamma]$ la matrice $M(q)$ è non singolare per $q_0 \neq -1$, mentre è singolare per $q_0 = -1$. Se $q_0 \neq -1$ allora perché risulti $q^T M(q) q = 0$ è necessario e sufficiente che $q = 0$, e quindi $q_0 = 1$. Se $q_0 = -1$ dalla relazione di vincolo $q_0^2 + q^T q = 1$ si deduce che deve essere $q = 0$. Quindi in entrambi i casi si deve avere $q = 0$. Poiché $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ denotano lo stesso assetto, si ha un solo punto di equilibrio possibile:

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si noti che per $\lambda_i^{K_p} > 2\gamma$ vi sono valori possibili per q_0 tali che $\lambda_i^M = 0$, e dunque $u_g = 0$ per $\omega = 0$, ma corrispondono a punti d'equilibrio non desiderati ($q \neq 0$).

Esempi di controllori simili sono in ?? e ??.

1.8.18 Modello matematico di un satellite flessibile

The spacecraft is supposed to be constituted by a rigid main body and a flexible boom, carrying a payload. The piezoelectric actuators are here used to actively dump the negative effects of vibrations induced by maneuvers, which could destabilize the spacecraft behavior in presence of saturation on inputs. The faced problems are the tracking of a desired trajectory and the execution of large attitude maneuvers. It is shown that the first reduces to an attitude maneuver problem of a time-variant system, the time-variant term depending on the desired trajectory. The kinematics are hence described in terms of error quaternions of the actual attitude with respect a desired one. The used actuators are gas jets and/or reaction wheels, together with piezoelectric films bounded to the flexible boom. Their expansion or contraction, due to the applied electric field aligned or opposed with the film polarization axis, determines longitudinal bending stresses used to counteract the undesirable boom's vibrations.

The kinematic equations will be given in terms of unitary quaternions ([?], [?], [?]) expressing the attitude error of the reference \mathcal{R} fixed with the main body, having the origin in the point of attachment of the flexible boom with the main body, with respect to a desired reference frame \mathcal{R}_d :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_0(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^T(t) \\ R(e(t)) \end{pmatrix} (\omega(t) - \omega_d(t)),$$

where $e(t) = \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix}$, $\omega(t)$, $\omega_d(t)$ are the angular velocities of \mathcal{R} , \mathcal{R}_d , and

$$R(e(t)) = \begin{pmatrix} e_0(t) & -e_3(t) & e_2(t) \\ e_3(t) & e_0(t) & -e_1(t) \\ -e_2(t) & e_1(t) & e_0(t) \end{pmatrix} = e_0(t)I + \tilde{e}(t), \quad \tilde{e} = \begin{pmatrix} 0 & -e_3(t) & e_2(t) \\ e_3(t) & 0 & -e_1(t) \\ -e_2(t) & e_1(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Note that $\sum_{i=0}^3 q_i^2(t) = 1$.

The dynamic equations are derived by the energetic approach ([?], [?], [?]). The total kinetic energy $T(t)$ of the flexible spacecraft is the sum of the kinetic energies $T_{mb}(t)$, $T_f(t)$, $T_p(t)$ associated to the main body, the flexible boom and the object placed on the tip of the boom:

$$\begin{aligned} T_{mb}(t) &= \frac{1}{2}m_{mb}v^T(t)v(t) + \frac{1}{2}\omega^T(t)J_{mb}\omega(t) + \frac{1}{2}(\omega^T(t) + \Omega^T(t))J_r(\omega(t) + \Omega(t)), \\ T_f(t) &= \frac{1}{2}\int_b v_f^T(z,t)v_f(z,t) dm + \frac{1}{2}\int_b [\dot{\vartheta}^T(z,t) dJ \dot{\vartheta}(z,t)] \\ T_p(t) &= \frac{1}{2}m_p v_f^T(l,t)v_f(l,t) + \frac{1}{2}(\omega(t) + \dot{\vartheta}(l,t))^T J_{p1}(\omega(t) + \dot{\vartheta}(l,t)) \end{aligned}$$

where m_{mb} and J_{mb} represent the mass and the symmetric inertia tensor of the main body, while $v(t)$, $\omega(t)$ are the linear and angular velocities of the main body. Moreover, J_r is symmetric inertia matrix of the reaction wheels and $\Omega(t)$ is their angular velocity with respect to the main body. Hereinafter $v(t)$ is supposed equal to zero. In $T_f(t)$ the displacement along the boom's axis is considered negligible, while $v_f(z,t)$ is the total velocity of the mass element of the flexible appendage, of coordinate z , mass dm and inertia dJ , and $\vartheta(z,t)$ is the vector of its bending and torsion deformations. Finally, m_p and J_{p1} are the object's mass and inertia tensor expressed in \mathcal{R}' (see figure ??), and l the length of the boom. All these quantities are expressed in the noninertial frame \mathcal{R} .

Considering only $N = N_1 + N_2 + N_3$ bending and torsional modes $\xi(t)$, the displacements can be approximated as follows:

$$\begin{aligned} u_x(z,t) &= \sum_{i=1}^{N_1} \Phi_{xi}(z)\xi_{xi}(t) = \Phi_x^T(z)\xi_x(t), \\ u_y(z,t) &= \sum_{i=1}^{N_2} \Phi_{yi}(z)\xi_{yi}(t) = \Phi_y^T(z)\xi_y(t), \\ \vartheta_z(z,t) &= \sum_{i=1}^{N_3} \Phi_{zi}(z)\xi_{zi}(t) = \Phi_z^T(z)\xi_z(t), \end{aligned} \quad \xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_x(t) \\ \xi_y(t) \\ \xi_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_N(t) \end{pmatrix}.$$

The total kinetic energy can be written as follows (see appendix 1 for matrices $A_1(t)$, A_2):

$$T(t) = \frac{1}{2}\omega^T(t)J_t(t)\omega(t) + \omega^T(t)J_r\Omega(t) + \frac{1}{2}\Omega^T(t)J_r\Omega(t) + \omega^T(t)A_1(t)\dot{\xi}(t) + \frac{1}{2}\dot{\xi}^T(t)A_2\dot{\xi}(t),$$

with $J_t(t)$ the total inertia matrix.

The potential energy is due to the flexibility of the boom. Following [?], the contribution for the boom in transverse vibration and in torsion is

$$U = \frac{1}{2}\xi^T(t)K\xi(t),$$

with $K = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{pmatrix}$ the stiffness matrix, where $K_1 = \text{diag} \{\omega_{x1}^2, \dots, \omega_{xN_1}^2\}$, $K_2 = \text{diag} \{\omega_{y1}^2, \dots, \omega_{yN_2}^2\}$, $K_3 = \text{diag} \{\omega_{z1}^2, \dots, \omega_{zN_3}^2\}$. The effect of the (nonconservative) viscous damping forces can be taken into account by supposing that they are proportional to the generalized velocities and by introducing the Rayleigh's dissipation function (??), determining a function $U_d = \frac{1}{2}\dot{\xi}^T(t)C\dot{\xi}(t)$, with $C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}$, $C_1 = \text{diag} \{2\zeta_{x1}\omega_{x1}, \dots, 2\zeta_{xN_1}\omega_{xN_1}\}$, $C_2 = \text{diag} \{2\zeta_{y1}\omega_{y1}, \dots, 2\zeta_{yN_2}\omega_{yN_2}\}$, $C_3 = \text{diag} \{2\zeta_{z1}\omega_{z1}, \dots, 2\zeta_{zN_3}\omega_{zN_3}\}$, and ζ_i the damping associated to the i^{th} mode.

The boom is covered with two piezoelectric layers reacting to the x and y -direction bends. These layers are homogeneous, isotropic, perfectly bonded to the boom, with constant thickness and with same width as the boom's edge. If $u_{px}(t)$, $u_{py}(t)$ are the voltages applied to the films, the bending moments around the neutral axis of the composite boom are given by ([?], [?], [?]) $M_y(t) = -c_{px}u_{px}(t)$, $M_x(t) = -c_{py}u_{py}(t)$, with c_{px} , c_{py} constants depending on the geometry and the nature of materials ([?]). Here it is supposed that each film is not sensibly influenced by the flecion induced by the other.

The equations of motion are derived by applying Lagrange's equations ([?]):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i(t), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_j} - \frac{\partial L}{\partial \phi_j} = u_{rj}(t), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_k} - \frac{\partial L}{\partial \xi_k} + \frac{\partial U_d}{\partial \dot{\xi}_k} = W_k(t),$$

$i, j = 1, 2, 3$, $k = 1, \dots, N$, where $F_i(t)$, $u_{rj}(t)$, $W_k(t)$ are the generalized forces, external and/or not derivable from a potential function, associated to the corresponding generalized coordinates $q_i(t)$, $\phi_j(t)$, $\xi_k(t)$, with $\dot{\phi}(t) = \Omega(t)$, and $L = T - U$ the lagrangian function. From the definition of

$$\text{generalized forces, we obtain } F(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}} \right)^T u_g(t), \quad W(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) \\ \vdots \\ W_N(t) \end{pmatrix} = -\Phi(l)\delta_1 u_p(t).$$

Here $u_g(t)$ is the torque acting on the main body and due to the gas jets, $u_r(t)$ is the torque imposed by the reaction wheels, $u_p(t) = \begin{pmatrix} u_{px}(t) \\ u_{py}(t) \end{pmatrix}$ is the vector of the tensions applied to the piezoelectric layers, and $\delta_1 = \begin{pmatrix} c_{px} & 0 \\ 0 & c_{py} \end{pmatrix}$, $\Phi(l) = \begin{pmatrix} \Phi_x(l) & 0 \\ 0 & \Phi_y(l) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($N \times 2$ matrix).

As far as the first of 1.8.18 is concerned, firstly note that by the chain rule one has:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}} \right)^T \left(\frac{\partial L}{\partial \omega} \right)^T, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = \left(\frac{\partial \omega}{\partial q} \right)^T \left(\frac{\partial L}{\partial \omega} \right)^T,$$

with $\left(\frac{\partial L}{\partial \omega} \right)^T = J_t(t)\omega(t) + J_r\Omega(t) + A_1(t)\dot{\xi}(t)$ and

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}} \right)^T = 2R^{-T}(q(t)), \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial q} \right)^T = \frac{\omega^T(t)q(t)}{q_0(t)}R^{-T}(q(t)) - \frac{\tilde{\omega}(t)}{q_0(t)},$$

as derivable from 1.8.18, with $R^{-1}(q(t)) = \frac{q(t)q^T(t)}{q_0(t)} + R^T(q(t))$ and $q_0(t) = \sqrt{1 - \|q(t)\|^2}$. Hence from the first of 1.8.18 one has:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega} \right)^T = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}} \right)^{-T} \left[- \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left(\frac{\partial \omega}{\partial q} \right)^T \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \omega} \right)^T + F(t) \right]$$

where by calculation one works out:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}} \right)^T = \frac{1}{q_0(t)}R^{-T}(q(t)) \left(\omega(t)q^T(t) + q_0(t)\tilde{\omega}(t) \right), \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}} \right)^{-T} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left(\frac{\partial \omega}{\partial q} \right)^T \right) = \tilde{\omega}(t).$$

Here $N(\omega(t), \Omega(t), \dot{\xi}(t)) = \tilde{\omega}(t) \left(\frac{\partial L}{\partial \omega} \right)^T = \tilde{\omega}(t) \left[J_t(t)\omega(t) + J_r\Omega(t) + A_1(t)\dot{\xi}(t) \right]$ is the gyroscopic term. Therefore, from 1.8.18 and considering the second and third of 1.8.18, rewritten as:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \Omega} \right)^T &= u_r(t), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right)^T &= \left(\frac{\partial L}{\partial \xi} \right)^T - \left(\frac{\partial U_d}{\partial \dot{\xi}} \right)^T + W(t), \end{aligned}$$

one obtains the spacecraft dynamic equations:

$$\begin{aligned} J_t(t)\dot{\omega}(t) + J_r\dot{\Omega}(t) + A_1(t)\ddot{\xi}(t) + \dot{J}_t(t)\omega(t) + \dot{A}_1(t)\dot{\xi}(t) &= -N(\omega(t), \Omega(t), \dot{\xi}(t)) + u_g(t) \\ J_r(\dot{\omega}(t) + \dot{\Omega}(t)) &= u_r(t) \\ A_1^T(t)\dot{\omega}(t) + A_2\ddot{\xi}(t) + \dot{A}_1^T(t)\omega(t) &= -K\xi(t) - C\dot{\xi}(t) - \Phi(l)\delta_1 u_p(t). \end{aligned}$$

From 1.8.18 and 1.26 the mathematical model of the spacecraft is derived:

$$\begin{aligned} \dot{e}_0 &= -\frac{1}{2}e^T(\omega - \omega_d) \\ \dot{e} &= \frac{1}{2}R(e)(\omega - \omega_d) \\ \dot{\omega} &= J_1^{-1} \left[-\bar{N}(\omega, \Omega, z) - \dot{J}_t\omega - \delta^T z + \delta^T \dot{\omega} + \delta^T (\bar{C}z + \bar{K}\eta) + u_g - u_r + \Delta_1 u_p \right] \\ \dot{\Omega} &= -J_1^{-1} \left[-\bar{N}(\omega, \Omega, z) - \dot{J}_t\omega - \delta^T z + \delta^T \dot{\omega} + \right. \\ &\quad \left. + \delta^T (\bar{C}z + \bar{K}\eta) + u_g - (J_1 + J_r)J_r^{-1}u_r + \Delta_1 u_p \right] \\ \dot{\eta} &= z \\ \dot{z} &= \delta J_1^{-1} \bar{N}(\omega, \Omega, z) - (I + \delta J_1^{-1} \delta^T) (\bar{C}z + \bar{K}\eta) + \delta J_1^{-1} \delta^T z + \\ &\quad + (\delta J_1^{-1} \dot{J}_t - \dot{\delta} - \delta J_1^{-1} \delta^T \dot{\delta}) \omega - \delta J_1^{-1} (u_g - u_r) - (\delta_2 + \delta J_1^{-1} \Delta_1) u_p \end{aligned}$$

with $J_1(t) = J_t(t) - J_r - \delta^T(t)\delta(t)$, $\bar{N} = N(\omega(t), \Omega(t), A_{21}^{-1}z(t))$, $\delta(t) = A_{21}^{-1}A_1^T(t)$, $\bar{C} = A_{21}^{-1}CA_{21}^{-1}$, $\bar{K} = A_{21}^{-1}KA_{21}^{-1}$, $\delta_2 = A_{21}^{-1}\Phi(l)\delta_1$, $\Delta_1(t) = \delta^T(t)\delta_2$, and where $\xi(t) = A_{21}^{-1}\eta(t)$, A_{21} the square root of the positive definite symmetric matrix A_2 .

This is a time-variant model, which will be used in the following as a simulation model, for verifying the effectiveness of the control law, derived on the basis of a simplified model. This approximated model, easier to manipulate, can be derived from 1.27 by considering small displacements and a smaller number of elastic modes. Hence (see appendix 1):

$$\begin{aligned} J_b(t) &\cong J_{b0}, & A_1(t) &\cong A_{10}, \\ J_p(t) &\cong J_{p0}, & \delta(t) &\cong A_{21}^{-1}A_{10}^T = \delta_0, \\ J_t(t) &\cong J_{mb} + J_r + J_{b0} + J_{p0} = J_{t0}, \end{aligned}$$

and $(\frac{\partial L}{\partial \omega})^T \cong J_{t0}\omega(t) + J_r\Omega(t) + \delta_0^T \dot{\eta}(t)$, so that the relationships in 1.26 become ([?], [?]):

$$\begin{aligned} J_{t0}\dot{\omega}(t) + J_r\dot{\Omega}(t) + \delta_0^T \ddot{\eta}(t) &= -\tilde{\omega}(J_{t0}\omega(t) + J_r\Omega(t) + \delta_0^T \dot{\eta}(t)) + u_g(t) \\ J_r(\dot{\omega}(t) + \dot{\Omega}(t)) &= u_r(t) \\ \ddot{\eta}(t) + \bar{C}\dot{\eta}(t) + \bar{K}\eta(t) &= -\delta_0\dot{\omega}(t) - \delta_2 u_p(t). \end{aligned}$$

The variable chosen to describe the dynamics of the spacecraft are the quaternions $e_0(t)$ and $e(t)$, the spacecraft error angular velocity $\omega_e(t) = \omega(t) - \omega_d(t)$, the reaction wheels angular velocity $\Omega(t)$, the modal displacements $\eta(t)$ relative to the main body and the variable:

$$\psi(t) = \delta_0\omega_e(t) + \dot{\eta}(t)$$

representing the difference between the total modal velocity $\delta_0\omega(t) + \dot{\eta}(t)$ and $\omega_d(t)$ expressed in modal coordinates. This further on simplifies the computational developments of the next sections,

maintaining a physical meaning of the state variables. Hence, we obtain:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_0(t) &= -\frac{1}{2}e^T(t)\omega_e(t) \\
\dot{e}(t) &= \frac{1}{2}R(e(t))\omega_e(t) \\
\dot{\omega}_e(t) &= J_{10}^{-1} \left[-N(\omega_e(t), \Omega(t), \psi(t), \omega_d(t)) + \delta_0^T (\bar{C}\psi(t) + \bar{K}\eta(t)) + \right. \\
&\quad \left. - \delta_0^T \bar{C} \delta_0 \omega_e(t) + u_g(t) - u_r(t) + \Delta_{10} u_p(t) \right] - \dot{\omega}_d(t) \\
\dot{\Omega}(t) &= -\dot{\omega}_e(t) + J_r^{-1} u_r(t) - \dot{\omega}_d(t) \\
\dot{\eta}(t) &= \psi(t) - \delta_0 \omega_e(t) \\
\dot{\psi}(t) &= -(\bar{C}\psi(t) + \bar{K}\eta(t)) + \bar{C} \delta_0 \omega_e(t) - \delta_2 u_p(t) - \delta_0 \dot{\omega}_d(t)
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
J_{10} &= J_{t0} - J_r - \delta_0^T \delta_0 \\
N(\omega_e(t), \Omega(t), \psi(t), \omega_d(t)) &= (\tilde{\omega}_e(t) + \tilde{\omega}_d(t)) \left((J_{t0} - \delta_0^T \delta_0) \omega_e(t) + J_r \Omega(t) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_0^T \psi(t) + J_{t0} \omega_d(t) \right)
\end{aligned}$$

and $\Delta_{10} = \delta_0^T \delta_2$. This model will be used in the following section in order to derive the desired control laws.

Note that model 1.8.18 is similar to that used in [?], [?], with the main differences due to the term of the piezoelectric actuators and the different choice of state variables.

If the reaction wheels are not present the correspondent dynamics must be eliminated. This leads to the elimination of the dynamics of the variable $\Omega(t)$ in the model and to set $u_r(t)$ and J_r to zero in the expressions of J_{10} and of the gyroscopic term N :

$$\begin{aligned}
J_{10} &= J_{t0} - \delta_0^T \delta_0 \\
N &= (\tilde{\omega}_e(t) + \tilde{\omega}_d(t)) \left(J_{10} \omega_e(t) + \delta_0^T \psi(t) + J_{t0} \omega_d(t) \right) = N(\omega_e(t), \psi(t), \omega_d(t)).
\end{aligned}$$

The outputs to be controlled are the quaternion vector $y_1(t) = e(t)$ and the physical displacement vector $y_2(t) = \Phi^T(l) A_{21}^{-1} \eta(t)$ of the tip of the flexible appendage, where $\Phi(l)$ transforms the modal coordinates into real ones. The control must ensure the convergence to zero of both the outputs, namely must be able to track the desired attitude with zero tip displacement.

1.8.19 Modello del satellite in forma di robot

Riferendosi alla sezione precedente, si noti anzitutto che

$$J_t = J_t(\xi), \quad \dot{J}_t = I(\xi, \dot{\xi}), \quad A_1 = A_1(\xi), \quad \dot{A}_1 = A_3(\dot{\xi}).$$

Si ponga poi

$$\begin{aligned}
N(\omega, \Omega, \xi) &= \tilde{\omega} \left[J_t \omega + J_r \Omega + A_1(\xi) \dot{\xi} \right] = \\
&= \left(\tilde{\omega} J_t \quad \tilde{\omega} J_r \quad \tilde{\omega} A_1(\xi) \right) \begin{pmatrix} \omega \\ \Omega \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = N_1(\omega, \xi) \begin{pmatrix} \omega \\ \Omega \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$N_{11}(\omega, \xi) = \tilde{\omega} J_t, \quad N_{12}(\omega) = \tilde{\omega} J_r, \quad N_{13}(\omega, \xi) = \tilde{\omega} A_1(\xi).$$

Pertanto le equazioni 1.26 si riscrivono nella forma:

$$J_t(\xi)\dot{\omega} + J_r\dot{\Omega} + A_1(\xi)\ddot{\xi} + I(\xi, \dot{\xi})\omega + A_3(\dot{\xi})\dot{\xi} = -N_1(\omega, \xi) \begin{pmatrix} \omega \\ \Omega \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} + u_g$$

$$J_r(\dot{\omega} + \dot{\Omega}) = u_r$$

$$A_1^T(\xi)\dot{\omega} + A_2\ddot{\xi} + A_3^T(\dot{\xi})\omega = -K\xi - C\dot{\xi} - \Phi(l)\delta_1 u_p.$$

Posto:

$$q = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \vartheta_r \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{pmatrix} \omega \\ \Omega \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_g \\ u_r \\ u_p \end{pmatrix},$$

in cui ϑ e ϑ_r sono variabili cinematiche tali che $\dot{\vartheta} = \omega$, $\dot{\vartheta}_r = \Omega$, si ha:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + Sq = B^T u,$$

ove

$$M(q) = \begin{pmatrix} J_t(\xi) & J_r & A_1(\xi) \\ J_r & J_r & 0 \\ A_1^T(\xi) & 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1^T \Phi^T(l) \end{pmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} I(\xi, \dot{\xi}) + N_{11}(\omega, \xi) & N_{12}(\omega) & A_3(\dot{\xi}) + N_{13}(\omega, \xi) \\ 0 & 0 & 0 \\ A_3^T(\dot{\xi}) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}.$$

Si noti che $D = D^T \geq 0$, $S = S^T \geq 0$. Inoltre risulta che la matrice

$$\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q, \dot{q})$$

è antisimmetrica.

1.8.20 Predizione dell'assetto[?]

Wertz, Paragrafo 17, pag. 558

Vi sono due metodi di base per modellare o predire l'evoluzione nel tempo di un satellite:

- integrare le equazioni cinematiche e dinamiche (modellistica dinamica);
- usare sensori di velocità o giroscopi per sostituire il modello dinamico ed integrare le sole equazioni cinematiche (modellistica giroscopica).

Le equazioni cinematiche sono, in termini di quaternioni $\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$:

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2}q^T\omega, \quad \dot{q} = \frac{1}{2}R(q)\omega, \quad R(q) = q_0I + \tilde{q}.$$

Le equazioni dinamiche di un satellite rigido sono date dal teorema di Eulero:

$$\dot{\xi} = -\tilde{\omega}\xi + u_g + d,$$

con $\xi = J\omega$ il momento angolare, J l'inerzia, ω la velocità angolare, u_g l'ingresso e d i disturbi agenti sul satellite.

Se sono presenti le reaction wheels, detto $J_r(\omega + \Omega)$ il momento angolare dovuto ad esse:

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= -\tilde{\omega}[J\omega + J_r(\omega + \Omega)] + u_g - u_r + d \\ J_r(\dot{\omega} + \dot{\Omega}) &= u_r \end{aligned}$$

ove u_r è la coppia netta applicata dai motori alle reaction-wheels.

Come detto le equazioni relative ad ω possono essere integrate numericamente ovvero analogicamente mediante dei giroscopi.

Metodi di integrazione

Integrazione diretta

Le equazioni del moto, costituenti un sistema di equazioni differenziali del primo ordine:

$$\dot{x} = f(t, x),$$

con f nota, possono essere integrate numericamente ottenendo una serie di valori $\{x_n\}$. Si richiede che

$$\lim_{h \rightarrow 0} = x(t)$$

in cui h è il passo di integrazione. La differenza $x_n - x(t)$ è l'errore di troncamento; se si richiede sia esso di ordine h^{p+1} ad ogni passo, allora il metodo di integrazione è di ordine p . L'errore di arrotondamento è poi l'errore addizionale dovuto all'accuratezza finita dei calcoli. Un algoritmo è instabile se gli errori (di troncamento, di arrotondamento o dovuti a condizioni iniziali inesatte) introdotti ad ogni passo si propagano senza limiti durante l'integrazione.

L'errore di troncamento è generalmente un fattore che limita l'accuratezza dell'integrazione, e può esser diminuito considerando metodi di integrazione di ordine più elevato oppure diminuendo h . È utile far variare h durante l'integrazione per adattarsi all' frequenze caratteristiche del problema. Il tempo di calcolo è usulmente proporzionale al numero di funzioni $f_n = f(t_n, x_n)$ da valutare.

Nei metodi di integrazione ad un passo per valutare x_{n+1} bastano n_n ed f_n . Sono semplici da applicare, poiché bastano x_0 e f_0 , h può essere variato senza calcoli aggiuntivi. I metodi di Runge–Kutta sono metodi ad un passo, e sono ad r stadi, ossia ogni passo richiede r valutazioni della funzione. Per $r = 1, \dots, 4$ l'errore di troncamento è di ordine h^r , per $r = 5, 6, 7$ è di ordine h^{r-1} ed infine per $r \geq 8$ è di ordine $h^{\leq r-2}$. Per questo il metodo del quarto ordine a 4 stadi è il più popolare. Tra le possibili scelte dei parametri in questo caso, la più comune è:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &= f(t_n + h, x_n + hk_3) \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

che si riduce alla formula di Simpson

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6} \left[f(t_n) + 4f\left(t_n + \frac{1}{2}h\right) + f(t_n + h) \right]$$

se f non dipende da x . Il difetto principale dei metodi di Runge–Kutta è che debbono essere valutate molte funzioni.

Nei metodi di integrazione a più passi si richiede la conoscenza di x_j, f_j per qualche $j < n$, oltre che x_n, f_n per calcolare x_{n+1} . Tali metodi non sono autoavvianti (si possono usare quelli di Runge–Kutta per i primi k passi) e la variazione di h può essere fatta ma occorre calcolare altri valori intermedi; infine occorre memorizzare più dati intermedi. Il vantaggio principale è che occorre calcolare una sola funzione per passo.

Soluzione approssimata in forma chiusa delle equazioni cinematiche

Se le equazioni dinamiche sono integrate con giroscopi ed occorre integrare solo quelle cinematiche, se ω può essere considerata costante sull'intervallo di integrazione, allora le equazioni cinematiche riscritte

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}S(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}, \quad S(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix}$$

possono essere campionate, fornendo così

$$\begin{pmatrix} q_0(k+1) \\ q(k+1) \end{pmatrix} = e^{\delta S(\omega)/2} \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix}.$$

Poiché:

$$S^2(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^T\omega & 0 \\ 0 & -\omega\omega^T + \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} = -\|\omega\|^2 I_4$$

e dunque

$$S^{2k}(\omega) = (-1)^k \|\omega\|^{2k} I_4, \quad S^{2k+1}(\omega) = (-1)^k \|\omega\|^{2k} S(\omega),$$

si ha:

$$\begin{aligned}
e^{\delta S(\omega)/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} S(\omega) \right) \frac{\delta^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{1}{2} S(\omega) \right)^{2k}}{(2k)!} + \frac{\left(\frac{1}{2} S(\omega) \right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2} \|\omega\| \delta \right)^{2k}}{(2k)!} I_4 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2} \|\omega\| \delta \right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{1}{\|\omega\|} S(\omega) = \\
&= \cos \left(\frac{1}{2} \|\omega\| \delta \right) I_4 + \frac{1}{\|\omega\|} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \|\omega\| \delta \right) \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Per i giroscopi satellitari tipicamente $\delta \in (100, 400)$ ms.

L'errore commesso facendo tale approssimazione è calcolabile considerando che

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} q_0(k+1) \\ q(k+1) \end{pmatrix} &= \\
&= \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} \dot{q}_0|_k \\ \dot{q}|_k \end{pmatrix} + \frac{\delta^2}{2!} \begin{pmatrix} \ddot{q}_0|_k \\ \ddot{q}|_k \end{pmatrix} + \dots = \\
&= \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} S(\omega)|_k \delta \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix} + \\
&\quad + \frac{\delta^2}{2!} \left[\frac{1}{2} \dot{S}(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + \frac{1}{2^2} S^2(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} \right]_k + \\
&\quad + \frac{\delta^3}{3!} \left[\frac{1}{2} \dot{S}(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + \frac{1}{2^2} \dot{S}^2(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + \frac{1}{2^2} \dot{S}^2(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} + \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + \frac{1}{2^3} S^3(\omega) \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} \right]_k + \dots = \\
&= \left[I + \frac{1}{2} S(\omega(k)) \delta + \frac{\left(\frac{1}{2} S(\omega(k)) \delta \right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2} S(\omega(k)) \delta \right)^3}{3!} + \dots \right] \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix} + \\
&\quad + \left[\frac{1}{2} \dot{S}(\omega)|_k \frac{\delta^2}{2!} + \left(\frac{1}{2} \dot{S}(\omega)|_k S(\omega)|_k + \frac{1}{2} S(\omega)|_k \dot{S}(\omega)|_k \right) \frac{\delta^3}{3!} + \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + \frac{1}{2^2} \ddot{S}(\omega)|_k \frac{\delta^3}{3!} + \dots \right] \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix} = \\
&= \left[e^{\delta S(\omega(k))/2} + \text{Errore} \right] \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

I giroscopi forniscono una velocità angolare media sul periodo di campionamento:

$$\bar{S} = \frac{1}{\delta} \int_{t_k}^{t_{k+1}} S(\omega(\tau)) d\tau = S(\omega(k)) + \frac{\delta}{2} \dot{S}(\omega)|_k + \frac{\delta^2}{6} \ddot{S}(\omega)|_k + \dots$$

Pertanto la quantità calcolabile è in realtà:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} q_0(k+1) \\ q(k+1) \end{pmatrix} &= \left[I + \frac{1}{2} \bar{S} \delta + \frac{\left(\frac{1}{2} \bar{S} \delta \right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2} \bar{S} \delta \right)^3}{3!} + \dots \right] \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix} + \\
&\quad + \left[\frac{1}{2^3} \left(\dot{S}(\omega)|_k S(\omega)|_k - S(\omega)|_k \dot{S}(\omega)|_k \right) \frac{\delta^3}{3!} + \dots \right] \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix} = \\
&= \left[e^{\delta \bar{S}/2} + \text{Errore effettivo} \right] \begin{pmatrix} q_0(k) \\ q(k) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

avendo riordinato i termini in modo differente. Dunque l'errore effettivo è dell'ordine di δ^3 , e non di δ^2 . Esso si annulla per

$$\dot{S}(\omega)|_k S(\omega)|_k = S(\omega)|_k \dot{S}(\omega)|_k,$$

ossia quando i vettori $\omega(k)$ e $\dot{\omega}|_k$ sono paralleli. Pertanto il termine in δ^3 si annulla quando l'asse di rotazione è fisso, anche se la rotazione non è uniforme.

Altre approssimazioni per il calcolo di $\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$ sono date in [?].

1.8.21 Disturbi ambientali[?]

Wertz, Paragrafo 5, pag. 113, e Paragrafo 17, pag. 566

Momento dovuto al gradiente di gravità

Caratteristiche del campo gravitazionale terrestre

Due masse puntiformi M , m , separate da una distanza \vec{r} , si attraggono secondo la legge di gravitazione di Newton:

$$\vec{F}_G = \frac{GM_{\oplus}m}{r^2} \hat{r} = \mu \frac{m}{r^2} \hat{r},$$

con $G = 6.672 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{Kg s}^2}$ la costante gravitazionale. Se $M = M_{\oplus}$ è la massa della Terra, μ è la costante gravitazionale della Terra, che vale

$$\mu = \mu_{\oplus} = GM_{\oplus} = 3.986 \times 10^{14} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}.$$

Il potenziale gravitazionale della Terra è poi:

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_{\oplus}}{r} = \frac{GM_{\oplus}}{r},$$

da cui $\vec{F} = -m\nabla\mathcal{U}$. Si potrebbe mostrare che \mathcal{U} soddisfa l'equazione di Laplace $\nabla^2\mathcal{U} = 0$. Scrivendo l'equazione in coordinate sferiche si otterrebbe come soluzione:

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_{\oplus}}{r} + B(r, \phi, \lambda),$$

in cui ϕ è la latitudine e λ la longitudine. Il termine $B(r, \phi, \lambda)$ è un'appropriato termine, costituito dalla somma di due serie, che corregge il potenziale gravitazionale, legato alla non simmetrica distribuzione della massa della Terra²⁷.

L'accuratezza della funzione potenziale, ossia il numero di termini delle serie in essa contenuti, ha effetto sulla dinamica orbitale, più che sulla dinamica d'assetto. A causa delle incertezze sugli altri disturbi, per l'analisi dell'effetto su un satellite della coppia dovuta al gradiente di gravità è di solito sufficiente includere il coefficiente dell'armonica zonale che tiene conto l'asfericità della Terra, a causa dello schiacciamento dei poli:

$$\mathcal{U}(r, \phi, \lambda) = \frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[1 - \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 J_2 \frac{3 \text{sen}^2 \phi - 1}{2} \right],$$

con J_2 che varia a seconda dell'altezza del satellite.

Per satelliti con grandi appendici flessibili, stabilizzati a tre assi o mediante il gradiente di gravità, l'effetto di J_2 diventa significativo in tutte le manovre d'assetto. Si noti che

$$\mathcal{U}_{J_2} = \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 J_2 \frac{3 \text{sen}^2 \phi - 1}{2}$$

²⁷Si vedano gli Appunti di Astrodinamica Applicata oppure [?], Paragrafo 5, pag. 124 e Appendice G, pag. 775.

grande rispetto agli altri contributi qui trascurati, è però solo lo 0.05 % del valore $\mathcal{U}^* = 1$, come si vede dalla seguente tabella:

Altitudine (Km)	μ_{\oplus}/r (Km ² /s ²)	\mathcal{U}^*	\mathcal{U}_{J_2}
0	62.495	1	0.54×10^{-3}
200	60.595	1	0.51×10^{-3}
500	57.952	1	0.46×10^{-3}
1000	54.025	1	0.40×10^{-3}
2000	47.576	1	0.31×10^{-3}
10000	24.337	1	0.82×10^{-4}
36000	9.401	1	0.13×10^{-4}

in cui 36000 Km è approssimativamente l'orbita geostazionaria.

Si può vedere che le correzioni sono meno significative ad grandi altitudini, e quando ci si avvicina all'orbita geostazionaria le attrazioni della luna e del sole possono diventare più importanti.

Modello del momento dovuto al gradiente di gravità

Qualsiasi oggetto asimmetrico di dimensioni finite è soggetto ad un momento gravitazionale, a causa della variazione della forza gravitazionale della terra agente su di esso. Se il campo gravitazionale fosse uniforme, e non proporzionale all'inverso del quadrato della distanza, tale azione non ci sarebbe.

Si supponga che il tensore d'inerzia J sia noto ed espresso nel riferimento RT la cui origine è nel centro geometrico del satellite, che non coincide necessariamente con il centro di massa. Si supponga poi la terra sferica. La forza gravitazionale $d\vec{F}$, agente sull'elemento di satellite dm determinato dal vettore \vec{R} nel riferimento geocentrico RC , vale:

$$d\vec{F} = -\mu \frac{\vec{R}}{R^3} dm.$$

Il momento attorno al centro geometrico del satellite, dovuto a $d\vec{F}$, vale:

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F},$$

con \vec{r} il vettore che individua la posizione di dm rispetto al centro geometrico. Il momento dovuto al gradiente di gravità si scrive dunque integrando sul volume occupata dal satellite:

$$\vec{M}_G = \int_S d\vec{M} = \int_S \vec{r} \times d\vec{F} = - \int_S \vec{r} \times \mu \frac{\vec{R}}{R^3} dm = \int_S \mu \vec{R} \times \vec{r} \frac{1}{R^3} dm$$

ove

$$\vec{R} = \vec{R}_S + \vec{r}.$$

Per satelliti artificiali reali $R_S \gg r$, per cui:

$$\begin{aligned} R^{-3} &= [\vec{R} \cdot \vec{R}]^{-3/2} = [(\vec{R}_S + \vec{r}) \cdot (\vec{R}_S + \vec{r})]^{-3/2} = [R_S^2 + 2\vec{R}_S \cdot \vec{r} + r^2]^{-3/2} = \\ &= \left[R_S^2 \left(1 + \frac{2\vec{R}_S \cdot \vec{r}}{R_S^2} + \frac{r^2}{R_S^2} \right) \right]^{-3/2} \simeq R_S^{-3} \left(1 - \frac{3\vec{R}_S \cdot \vec{r}}{R_S^2} \right) = \frac{1}{R_S^3} - \frac{3\vec{R}_S \cdot \vec{r}}{R_S^3}, \end{aligned}$$

avendo trascurato $\frac{r^2}{R_S^2}$ e avendo considerato che $(1+x)^n \cong 1+nx$ per $x \ll 1$. Posto poi $\vec{R}_S \cong \vec{R}$:

$$\begin{aligned}\vec{M}_G &\cong \int_S \mu \vec{R}_S \times \vec{r} \frac{1}{R^3} dm \cong \int_S \mu \vec{R}_S \times \vec{r} \left(\frac{1}{R_S^3} - \frac{3\vec{R}_S \cdot \vec{r}}{R_S^3} \right) dm = \\ &= \mu \frac{\vec{R}_S}{R_S^3} \times \int_S \vec{r} dm + \frac{3\mu}{R_S^3} \int_S \vec{r} \times \frac{\vec{R}_S}{R_S} \frac{\vec{R}_S}{R_S} \cdot \vec{r} dm \\ &= \frac{\mu M}{R_S^2} \hat{R}_S \times \vec{q} + \frac{3\mu}{R_S^3} \int_S \vec{r} \times \hat{R}_S \hat{R}_S \cdot \vec{r} dm,\end{aligned}$$

in cui \vec{q} individua il centro di massa del satellite e

$$\int_S \vec{r} dm = \int_S (\vec{q} + \vec{r}') dm = \rho M,$$

avendo considerato che per definizione di centro di massa

$$\int_S \vec{r}' dm = 0,$$

ed essendo \vec{r}' la posizione di dm rispetto al centro di massa del satellite.

Se il centro geometrico coincide con il centro di massa del satellite:

$$\vec{M}_G \cong \frac{3\mu}{R_S^3} \int_S \vec{r} \times \hat{R}_S \hat{R}_S \cdot \vec{r} dm.$$

Coppia dovuta alla resistenza aerodinamica

L'interazione della parte alta dell'atmosfera con la superficie del satellite produce una coppia attorno il centro di massa. Per satelliti al di sotto di circa 400 Km questa è la coppia predominante. La forza dovuta all'impatto delle molecole dell'atmosfera sulla superficie del satellite è modellabile come un urto anelastico senza riflessione, e l'energia delle particelle incidenti è generalmente tutta assorbita. Le particelle, una volta raggiunto l'equilibrio termico con la superficie, sfuggono infatti con una velocità termica uguale a quella delle particelle della superficie. Poiché tale velocità è sostanzialmente inferiore a quella delle molecole incidenti, l'impatto è modellabile come se le particelle incidenti perdessero tutta la loro energia nella collisione.

La forza $d\vec{F}$ agente sulla superficie elementare dS , avente normale \hat{n} uscente da essa, è data da:

$$d\vec{F} = -\frac{1}{2} C_d \rho v^2 \cos \vartheta_a \hat{v} dS,$$

in cui \hat{v} è il versore nella direzione della velocità di traslazione \vec{v} dell'elemento di superficie, relativa al flusso incidente, e ρ è la densità atmosferica. Inoltre C_d è il coefficiente di resistenza (drag); questo è un numero adimensionale, compreso tra 1 e 2^{28} , ed è funzione della struttura della superficie e dell'angolo di attacco locale $\vartheta_a = \arccos(\hat{n} \cdot \hat{v})$.

La coppia aerodinamica agente sul satellite e dovuta alla resistenza aerodinamica vale:

$$\vec{M}_A = \int_S \vec{r} \times d\vec{F} = \int_S \frac{1}{2} C_d \rho v^2 (\hat{n} \cdot \hat{v}) \hat{v} \times \vec{r} dS,$$

in cui \vec{r} è il vettore che va dal centro di massa del satellite all'elemento di superficie dS . L'integrale è calcolato su tutta la superficie del satellite per la quale $\cos \vartheta_a = \hat{n} \cdot \hat{v} > 0$. Nell'ipotesi di corpo rigido, detta $\vec{\omega}$ la velocità angolare del satellite, la velocità di traslazione dell'elemento di superficie dS vale:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

²⁸Se C_d non è disponibile, $C_d = 2$ è una buona stima per satelliti con dimensioni grandi rispetto a percorso libero medio delle molecole atmosferiche.

in cui \vec{v}_0 è la velocità del centro di massa relativamente all'atmosfera. Poiché $|\vec{\omega} \times \vec{r}|$ è piccolo rispetto a v_0 , si possono trascurare tutti i termini del secondo ordine in $\vec{\omega}$. Si ha così:

$$\begin{aligned} \vec{M}_A \simeq & \frac{1}{2} C_d \rho v_0^2 \int_S (\hat{n} \cdot \hat{v}_0) \hat{v}_0 \times \vec{r} dS + \\ & + \frac{1}{2} C_d \rho v_0 \int_S \left[\hat{n} \cdot (\omega \times \vec{r}) \hat{v}_0 \times \vec{r} + (\hat{n} \cdot \hat{v}_0) (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{r} \right] dS. \end{aligned}$$

Il primo termine di \vec{M}_A è la coppia dovuta allo spostamento del centro di pressione del satellite rispetto al centro di massa. Il secondo è la coppia di dissipazione dovuta alla rotazione del satellite. Per satelliti con $\omega r \ll v_0$ esso è circa quattro ordini di grandezza più piccolo del primo termine, e può essere trascurato.

Coppia di disturbo magnetico

1.8.22 Disturbi agenti sul satellite[?]

Hughes, Paragrafo 8, pag. 232

Bla bla

Disturbo gravitazionale

Disturbo aerodinamico

I satelliti lavorano al limite dell'atmosfera o al di là di essa. La loro energia verrebbe prima o poi dissipata dal drag atmosferico, e il satellite inizierebbe a cadere verso la terra. Vi è dunque un limite superiore intrinseco nell'ampiezza delle forze e momenti agenti sui veicoli spaziali. Vi è una banda di altezza per la quale il satellite ha un suo utile tempo di vita, sebbene le coppie atmosferiche non sono trascurabili e possono anzi essere dominanti. Sebbene tale banda sia piuttosto stretta, in quanto la densità diminuisce rapidamente con l'altezza, il costo di collocare carichi utili in orbite più alte e le richieste di missione di molti satelliti per l'osservazione della terra, determinano l'inserzione di importanti classi di satelliti ad orbite relativamente basse.

Ad altezze ove le orbite non decadono immediatamente a causa del drag atmosferico, il percorso libero medio molecolare λ è grande in confronto alle dimensioni tipiche di un satellite. Il percorso libero medio è la distanza percorsa da una molecola prima di avere una collisione con un'altra molecola. Anche per le più basse orbite possibili, λ è dell'ordine di 1 Km. Pertanto si può supporre che le molecole che si avvicinano alla superficie del satellite non interferiscono con quelle che provengono dalla superficie. In altre parole i due flussi di molecole, verso e dal satellite, possono essere supposti indipendenti. Questo porta al modello a flussi molecolari liberi²⁹, che si basa sulla teoria cinetica dei gas.

Quando le molecole arrivano alla superficie del satellite e quando la lasciano si determinano due trasferimenti di momento al satellite. Il modello a flussi molecolari liberi permette di determinare il trasferimento complessivo di momento in modo additivo.

²⁹Questo modello si distingue da quello a flusso continuo.