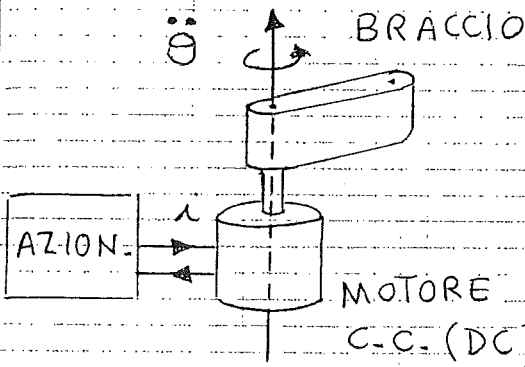


7. \exists algoritmi numerici che risolvono questo pb senza dover inserire la $B(q)$.

Utilizziamo ora la struttura $B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + d(\dot{q}) + g(q) = u$ del modello per dimostrare la stabilità delle leggi di controllo. Come prima legge di controllo esaminiamo la legge PD

LEGGE DI CONTROLLO PD: nelle industrie si fa spesso uso di leggi di controllo proporzionali-derivative perché sono realizzabili con i controllori facili da realizzare, implementare e regolare. Le soluzioni del secondo ordine sono le soluzioni naturali alla maggior parte dei pb di controllo. Si consideri l'azionamento di un braccio meccanico che apre una porta (H_e è l'assenza di gravità).



Nei motori in corrente continua si possono imporre le coppie imponendo la corrente e per mezzo di un opportuno azionamento.

OSS: I motori AC sono migliori di quelli in C.C. ma sono più difficili da controllare.

OSS: In discerremo con τ la coppia (coppia \rightarrow Torque).

Il modello dinamico di questo sistema con un singolo asse è:

$I\ddot{\theta} + d\dot{\theta} = K\lambda$ Modello costituito da una eq. del II ordine differenziale, con due poli tipicamente complessi e coniugati. K è la costante di proporzionalità che trasforma la corrente λ nella coppia τ , mentre il coefficiente d modella l'attrito viscoso.

$$\ddot{\theta} + \frac{d}{I}\dot{\theta} = \frac{K}{I}\lambda \quad \Leftrightarrow \quad s^2\theta + s\frac{d}{I}\theta = \frac{K}{I}\lambda \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \theta = \frac{K/I}{s^2 + \frac{d}{I}s} \lambda$ Se il motore è ben oliato, è attrito viscoso tende ad annullarsi: $d \rightarrow 0$

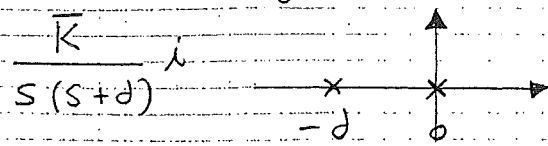
$\Rightarrow \theta = \bar{K}/s^2 \lambda$ con $\bar{K} = K/I$ ottengo una doppia integrazione, cioè anti

Trasformando con Laplace: $\ddot{\theta}(t) = \frac{K}{I}\lambda(t)$

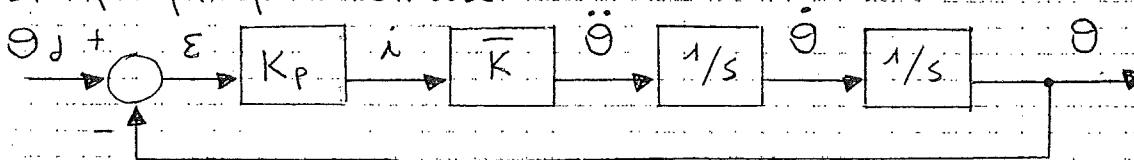
Questa situazione nel luogo delle radici corrisponde ad

avere due poli nell'origine coincidenti. Infatti se è attinto non è nulla $\Rightarrow d \neq 0 \Rightarrow \theta = \frac{\bar{K}}{s(s+d)} i$

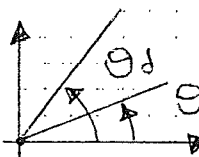
che corrisponde ad



avere un polo nell'origine ed un polo negativo in $-d$. Se il controllo è efficace per $d=0$. (condizione critica per la stabilità) \Rightarrow allora tale controllo sarà sicuramente efficace anche per $d \neq 0$. Utilizziamo perciò un controllore PD sul sistema nel quale si trascuri l'attito viscoso ($d=0$); cominciamo con l'analisi e l'azione di controllo introdotta da un semplice controllore di tipo proporzionale:



Se $\epsilon > 0 \Rightarrow \theta_d > \theta$



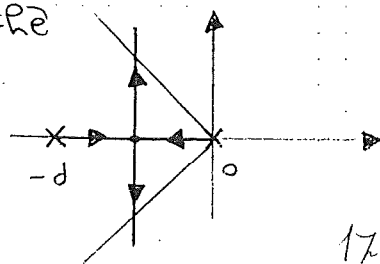
Ma l'accelerazione è: $\ddot{\theta} = \bar{K} i = \bar{K} K_p \epsilon = \bar{K} K_p (\theta_d - \theta) \Rightarrow$

$$\ddot{\theta} = \bar{K} i = \bar{K} K_p \epsilon = \bar{K} K_p (\theta_d - \theta) \Rightarrow$$

\Rightarrow con un controllore solo proporzionale si spostano i poli e uno è anche immaginario del luogo delle radici (senza stabilizzazione il sistema) infatti:

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \bar{K} K_p \theta = \bar{K} K_p \theta_d \Leftrightarrow (s^2 + \bar{K} K_p) \theta = \bar{K} K_p \theta_d \Rightarrow$$

il polinomio caratteristico ha come radici una coppia di poli immaginari $\pm j\sqrt{\bar{K} K_p}$ e $-j\sqrt{\bar{K} K_p} \Rightarrow$ ciò significa che si immescano delle oscillazioni non smorzate. Infatti se si spinge il braccio con una coppia proporzionale all'errore \Rightarrow ogni volta si compiana il punto di equilibrio (desiderato) con una velocità diversa da zero \rightarrow controllore proporzionale senza smorzamento. La eventuale presenza dello smorzamento naturale (dovuto all'attito viscoso) aiuta a stabilizzare la dinamica perché porta i poli a spostarsi nel semipiano negativo del luogo delle radici. La dinamica in questo modo diventa stabile ma potrebbe essere cmq troppo

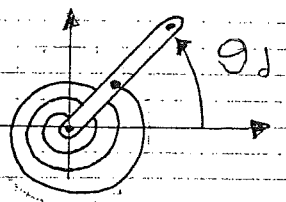


len
fatti
mod
qua
com
zan
toto
gim
dat
di no
Ae
nal
agi
unc
 θ_d
am
zch
 θ_d
+
-
 θ
Lo
cotti
den
nal
ult
 $\ddot{\theta}$
 \Rightarrow
L
L
 \Leftrightarrow
La

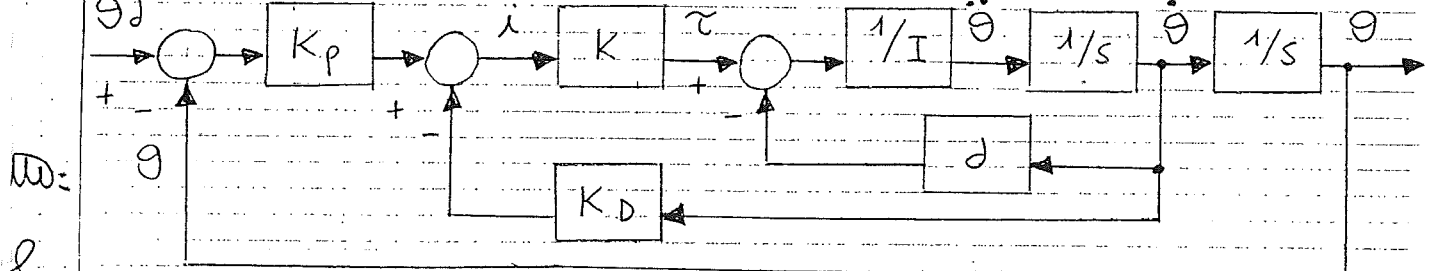
3. Lemta (dinamica oscillante leggermente smorzata, per il fatto che i giunti sono ben oliati o che l'inerzia del braccio è molto grande). La parte reale della radice ci dice in fatto di quanto è smorzato il relativo modo naturale (se la radice è vicina all'asse immaginario come in questo caso lo smorzamento è piccolo ed inoltre è sempre lo stesso perché l'assi⁵ tutto verticale è parallelo a tale asse) mentre la parte immaginaria indica la frequenza del modo naturale stesso.⁵

Data la coppia $- \alpha \pm j\beta \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & \text{puls. di Taglio} \\ A e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) & \text{modo natu.} \end{cases}$

All'aumentare di K_p aumenta la frequenza del modo naturale ma lo smorzamento rimane lo stesso. Il controllore agisce come se sull'albero ci fosse montata una molla (a spinale) con punto di riposo in θ_d (ancorata allo statore del motore e sull'asse o sul braccio).



Consideriamo ora lo schema di reazione completo del controllore PD:



Lo smorzamento naturale $d \neq 0$ è di tipo fisico ed agisce sottraendosi alla coppia motrice, cioè introduce un feedback derivativo (perché dipende da $\dot{\theta}$). Se questo feedback naturale non è sufficiente, quello che si fa è aggiungere un ulteriore feedback derivativo di tipo software:

$$\ddot{\theta} + \frac{d}{I} \dot{\theta} = \frac{K}{I} (K_p (\theta_d - \theta) - K_D \dot{\theta})$$

Questo termine impone una frenatura che si aggiunge all'attrito fisico. Decidiamo così quale smorzamento impone

$$\Rightarrow \left[\ddot{\theta} + \left(\frac{d}{I} + \frac{K K_D}{I} \right) \dot{\theta} = \frac{K K_p}{I} (\theta_d - \theta) \right]$$

$\Rightarrow (s^2 + \left(\frac{d}{I} + \frac{K K_D}{I} \right) s) \theta = 0$ $\rightarrow K_p = 0 \rightarrow$ studio del luogo delle radici a sistema aperto.

La forma del luogo delle radici è la stessa, ma è asintoto

Totale verticale può essere spostato a SX

in modo che al crescere di K_D , la

radice $-\frac{d}{I} - \frac{KK_D}{I}$ si sposti verso

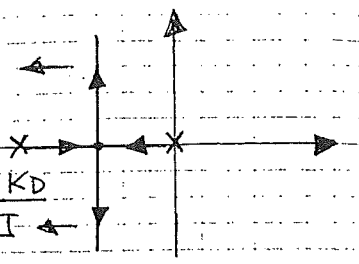
SX e trascuri con se anche è asim.

Totale verticale. Il sistema di

controllo PD è interpretabile come un sistema molla +

smorzatore (implementati via SW). L'equazione caratte-

ristica completa, con $K_P \neq 0$ è la seguente:



$$\left(s^2 + \left(\frac{d + KK_D}{I} \right) s + \frac{KK_P}{I} \right) \theta = \frac{KK_P}{I} \theta_d$$

Il sistema è stabile (\Rightarrow)

$\Rightarrow s^2 + as + b$ ha soluzioni a $\text{Re} < 0 \Leftrightarrow a > 0$ e $b > 0$.

OSS: $(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 + (-\lambda_1 - \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 > 0 \rightarrow \text{La somma con segno cambiato di segno è positiva} \\ \lambda_1\lambda_2 > 0 \rightarrow \text{Le radici hanno lo stesso segno} \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda_1$ e λ_2 sono a $\text{Re} < 0 \Rightarrow$ con il PD è sufficiente anche a garantire i coefficienti positivi. Si riesce a stabilizzare un sistema del II° ordine (\Rightarrow 2 gradi di libertà) che ci permettano di scegliere λ_1 e $\lambda_2 \rightarrow a, b$, risolvendo le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} a = \frac{d + KK_D}{I} \\ b = \frac{KK_P}{I} \end{cases}$$

Risolvendo le eq. in funzione di K_D e K_P si possono assegnare gli autovalori del sistema controllato. È facile se si conoscono K, I e d (in particolare quest'ultimo ha un effetto stabilizzante sul sistema. Possiamo dimostrare che il controllo PD funziona correttamente anche nel controllo contemporaneo di tutti gli assi del robot, ma non si può dimostrare per mezzo del luogo delle radici perché il modello del robot è non lineare \Rightarrow perde di significato il concetto di polo e di zero nonché quello di g.d.t. Si potrebbe applicare se facessi un'analisi della stabilità per piccoli spostamenti.

OSS: Nel caso lineare $\dot{x} = Ax + Bu \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow (sI - A)X(s) = x_0 + BU(s)$$

Se invece ho un sistema non lineare:

$\dot{x} =$
Ha
oper
SIS
COI
PD
Dat
des
nabr
min
AE
zio
u
am
il c
equ
tip
dia
u
gee
sul
è e
Per
del
RIC

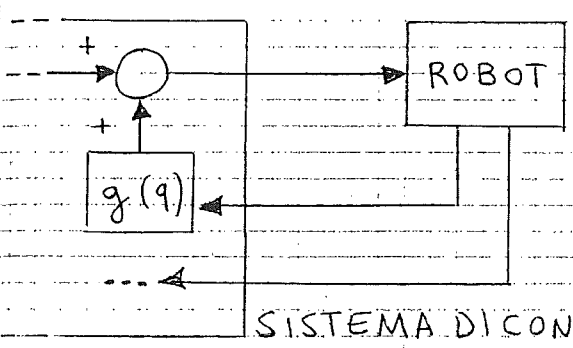
$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \iff sX(s) - x(0) = L(f(x)) + L(g(x))u$$

Ha senso parlare di luogo delle radici in questo caso, solo se si opera una linearizzazione intorno ad un punto di lavoro \bar{x}

SISTEMA DI CONTROLLO PD PER ROBOT CON COMPENSAZIONE ESATA DELLA GRAVITA'

PD $B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + d(q) + g(q) = u$

Data una configurazione q_d desiderata \Rightarrow tale posizione deve come prima cosa essere una posizione di equilibrio del robot: affinché ciò sia possibile bisogna compensare il termine di gravità mediante un opportuno feedback: $u = g(q)$



In questo modo la coppia $\begin{pmatrix} q_d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$ costituisce uno stato di equilibrio del sistema, cioè zero compensare la gravità, tutti gli stati a velocità nulla sono stati di equilibrio.

Al feedback bisogna aggiungere inoltre il termine proporzionale e derivativo del controllo PD:

$$u = g(q) + K_p(q_d - q) - K_D \dot{q} \text{ con } K_p \text{ e } K_D \text{ matrici} \Rightarrow$$

analogamente a quanto visto in precedenza, si dimostra che il controllo PD rende asintoticamente stabile il punto di equilibrio $\begin{pmatrix} q_d \\ 0 \end{pmatrix}$ purché risulti:

$$\begin{cases} K_p = K_p^T > 0 \\ K_D = K_D^T > 0 \end{cases}$$

Tipicamente queste matrici sono diagonali cioè risulta che:

$$u_i = \underbrace{g_i(q)}_{\text{feedback globale}} + \underbrace{K_{p_i}(q_{d_i} - q_i) - K_{D_i}\dot{q}_i}_{\text{feedback locale}}$$

feedback globale: la coppia sul giunto i -mo dipende da evoluzione di tutti i giunti
 feedback locale: la coppia sul giunto i -mo dipende da ciò che succede sul tale giunto

Per dimostrare la stabilità asintotica si usa una estensione del Teorema di Lyapunov, e cioè il Teorema di La Salle.

RIC = LYAPUNOV \rightarrow Il Teorema di Lyapunov afferma che il

il punto x_e è un punto di equilibrio stabile se \exists una funzione $V(x) > 0$ con $V(x_e) = 0$ ed $x \in S(x_e) \subseteq \mathbb{R}^m$ e tale che $\dot{V}(x) < 0$. Il punto è di equilibrio ed ha stabilità locale se $S(x_e) \subset \mathbb{R}^m$ mentre è di stabilità globale se $S(x_e) \equiv \mathbb{R}^m$.

LA SALLE \rightarrow Il Teorema di La Salle dice che se \exists una $V(x) > 0$, $V(x_e) = 0 \forall x \in S(x_e)$ tale che $\dot{V}(x) \leq 0$ (semi definita negativa \Rightarrow per Lyapunov asintoticamente semplice stabilità), chiamando $L_V = \{x \in S(x_e) : \dot{V}(x) = 0\}$

ed $L_{V/f} = \max \{x \in L_V \text{ ed } f \text{ invarianti}\}$, allora risulta che se $x \in L_{V/f}$, non esce più da tale insieme, cioè la sua evoluzione (evoluzione dello stato) è contenuta in tale insieme e non ne esce fuori.

SSS = $L_{V/f}$ è il massimo degli insiemi f invarianti che annullano $\dot{V}(x) \rightarrow$ nei sistemi lineari considerati sotto (ad esempio se lo stato è diretto lungo la direzione di un autovettore permanente in quella direzione).

Il Teorema di La Salle afferma quindi che se $\dot{V}(x) \leq 0$ in $S(x_e)$ ed $x \in L_{V/f} \Rightarrow$ la traiettoria $x(t)$ converge e permane in un insieme di punti in cui $\dot{V} = 0$.

RIC: Dato il modello dinamico del robot:

$$B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + d(\dot{q}) + g(q) = u + J^T \cancel{F} \in \rightarrow$$

\cancel{F} forze esterne, cioè robot non ha contatti con esterne

Il bilancio energetico totale del robot è il seguente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + U(q) \right) = \dot{q}^T u - \dot{q}^T d(\dot{q}) \quad \text{con } g(q) = \left(\frac{\partial U}{\partial q} \right)^T$$

\downarrow Variazione dell'energia totale del robot (derivata della somma dell'energia cinetica e delle potenziale).
 \downarrow energia prodotta dagli attuatori (coppie motorici per velocità di giunto)
 \rightarrow energia dissipata in calore dall'attrito (coppia di attrito per velocità di giunto)

OSS: In genere $\dot{q}^T d(\dot{q}) \geq 0$, è uguale a zero solo quando il motore è perfettamente oliato. Nella realtà per $\dot{q} \neq 0$ ho sempre una coppia di attrito frenante non nulla ($d \neq 0$).

Se è attinto è viscoso, allora $d(\dot{q})$ è una forma quadratica =
 $d(\dot{q}) = D\dot{q} = \begin{bmatrix} d_1 \dot{q}_1 \\ \vdots \\ d_m \dot{q}_m \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{q}^T d(\dot{q}) = \dot{q}^T D \dot{q} = \begin{bmatrix} d_1 \dot{q}_1^2 \\ \vdots \\ d_m \dot{q}_m^2 \end{bmatrix}$

Lo schema di controllo PD con compensazione esatta della gravità è il seguente = $\boxed{u = g(q) + K_p(q_d - q) - K_D \dot{q}}$

Sostituendo questo controllo nel modello si ottiene:
 $B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = g(q) + K_p(q_d - q) - K_D \dot{q}$

Mediante la sola compensazione della gravità, il punto è di equilibrio per il robot, mentre se consideriamo anche il controllo PD lo stato di equilibrio diventa il seguente $\begin{pmatrix} q_e \\ \dot{q}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_d \\ 0 \end{pmatrix}$

Per sempre a patto che $K_p = K_p^T > 0$ e $K_D = K_D^T > 0$.

Per verificare questo, dobbiamo dimostrare che tale stato di equilibrio è un punto invariante del robot. Se consideriamo un sistema non lineare in forma canonica $\dot{x} = f(x) \Rightarrow$ possiamo dire che un insieme f invariante è un insieme di stato di questo sistema tale che $\forall x \in$ all'insieme f invariante \Rightarrow la dinamica di x è contenuta nell'insieme stesso.

Per ora consideriamo solo $q_d(t) = q_d$ punto statico con una traiettoria. Si può anche assegnare una traiettoria desiderata $q_d(t)$. Questa dimostrazione verifica solo la stabilità e non dà delle informazioni sulla dinamica. Se sostituisco a q, \dot{q} i valori $q_d, 0 \Rightarrow$

$$B(q_d)\ddot{q} = K_p(q_d - q_d) \Rightarrow \boxed{\ddot{q} = 0}$$

Matrice simmetrica e definita positiva. Eq. omogenea con matrice dei coefficienti $B(q_d)$ non singolare.

\Rightarrow necessariamente è \ddot{q} a dover essere nullo.

OSS: Il modello del robot scritto in forma canonica è:
 $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -B^{-1}(x_1)N(x_1, x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B^{-1}(x_1) \end{pmatrix} u = f(x) + g(x)u$

Il punto di equilibrio è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_d \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ sostituendolo nella forma canonica si ottiene $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = 0$.

Si deve dimostrare che tale punto è stabile asintoticamente. Con la compensazione della

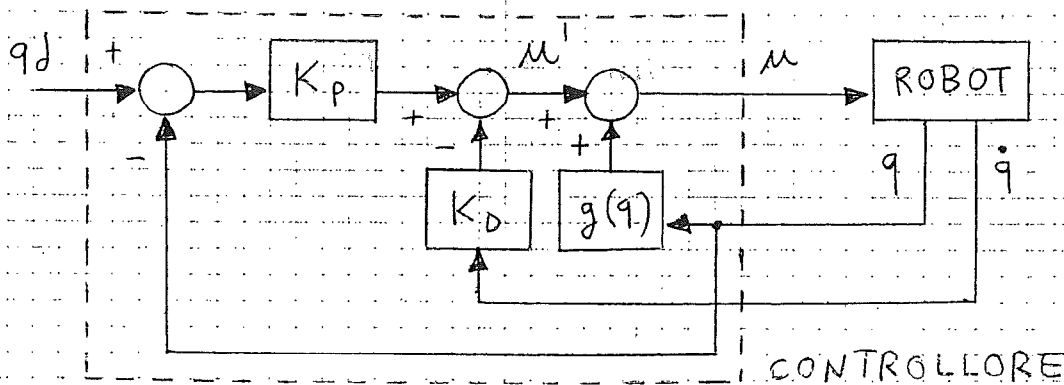
gravità, il robot vive in uno spazio senza gravità, per cui il bilancio energetico può essere scritto nella forma =

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} \right) = \dot{q}^T M' - \dot{q}^T d(\dot{q})$$

avendo indicato:

$$\begin{cases} \mu = g(q) + M' = \text{COMPENSAZIONE} + \text{CONTROLLO PD} \\ M' = K_p (q_d - q) - K_d \dot{q} \end{cases}$$

mentre il modello diventa: $B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + d(\dot{q}) = \mu'$ e lo schema a blocchi:



La variazione dell'energia totale coincide con la variazione dell'energia cinetica. La funzione di Lyapunov che utilizzeremo per dimostrare la stabilità asintotica del punto di equilibrio è:

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + \frac{1}{2} (q_d - q)^T K_p (q_d - q)$$

La $V(q, \dot{q})$ è l'energia cinetica del robot più l'energia associata all'errore di posizionamento. Se K_p fosse una costante elastica di una molla sul giunto con posizione di riposo in q_d ⇒ il secondo termine della $V(q, \dot{q})$ rappresenterebbe la sua energia elastica = $\frac{1}{2} K x^2$

La $V(q, \dot{q})$ è una funzione di Lyapunov perché ho $V(q, \dot{q}) = 0$ per $\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_d \\ 0 \end{pmatrix}$ cioè nel punto di equilibrio.

Inoltre $V(q, \dot{q})$ è semidefinita positiva in funzione dello stato (q, \dot{q}) , si osservi in fatto che:

OSS: $\dot{q}^T H \dot{q}$ con $H > 0$ è una forma quadratica che in funzione di \dot{q} è definita positiva mentre in funzione di $(q, \dot{q})^T$ è semidefinita positiva perché tutti gli stati

è che hanno la componente $\dot{q} = 0$ e $q \neq 0$ annullano la forma quadratica. Complessivamente quindi la $V(q, \dot{q})$ è ~~semidefinita~~ definita positiva in funzione di $\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$. Dobbiamo ora dimostrare che la legge di controllo è da una \dot{V} semidefinita negativa (temporaneamente si può avere una energia cinetica che aumenta, ma in corrispondenza è energia elastica associata all'errore di posizionamento si riduce, ed il bilancio complessivo è sempre negativo o nullo). Il modello dinamico del sistema robot è:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + d(\dot{q}) = u' \quad \text{avendo indicato con } u' = K_p(q - q_d) - K_D\dot{q}, \text{ la derivata di } V(q, \dot{q}) \text{ è:}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V(q, \dot{q})) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} \right) + (q_d - q)^T K_p (-\dot{q}) = \\ &= \underbrace{\dot{q}^T u'}_{\substack{\text{energia fornita in ingresso da } u' \\ \text{energia dissipata in calore dall'attrito}}} + \underbrace{\dot{q}^T d(\dot{q})}_{\text{energia dissipata in calore dall'attrito}} - (q_d - q)^T K_p \dot{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt}(V(q, \dot{q})) &= \cancel{\dot{q}^T K_p (q_d - q)} - \dot{q}^T K_D \dot{q} - \dot{q}^T d(\dot{q}) - \cancel{(q_d - q)^T K_p \dot{q}} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(V(q, \dot{q})) &= -\dot{q}^T K_D \dot{q} - \dot{q}^T d(\dot{q}) \leq 0 \Rightarrow \boxed{\dot{V}(q, \dot{q}) \leq 0} \end{aligned}$$

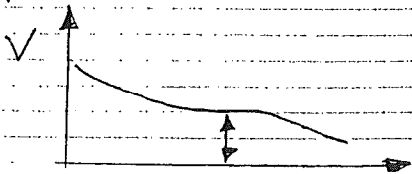
dissipazione SW analoga a quella dissipazione friczionale sempre positiva o nulla

dovuta all'attrito viscoso. La $\dot{V}(q, \dot{q})$ è semidefinita negativa perché la forma quadratica è definita in relazione a $\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$ e non solo a $\dot{q} \Rightarrow \dot{V} = 0$ per stati $\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

L'insieme degli stati che annullano la \dot{V} è:

$$\mathcal{L}_V = \left\{ q \in \mathbb{R}^m, \dot{q} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } q \in \mathbb{R}^m \right\} \Rightarrow \text{per il Teorema di Lyapunov} \text{ possiamo dire solo che il punto di equilibrio è un punto semplicemente stabile. Se consideriamo il Teorema di La Salle (estensione del Teorema di Lyapunov)} \Rightarrow \text{possiamo dimostrare anche l'asintotica stabilità.}$$

Si può avere $\dot{V}(t) = 0$ con $V(t) \neq 0$, cioè in presenza di un errore di posizione. Se sono in \mathcal{L}_V cioè $\dot{q} = 0$ ma $q \neq q_d$



allora sono buoni da usare insieme simultaneamente \Rightarrow
cioè $L_{v/f} = \left\{ \begin{pmatrix} q_d \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow$ rappresenta il punto di stabilità asintotica μ

Per dimostrare che se sono in L_v , tendo al punto di A.S. si consideri che in L_v ho $\dot{q} = 0$ (cioè $\dot{V} = 0$) ma $q \neq q_d$ cioè $V \neq 0 \Rightarrow$ c
 pe
 im

$$\Rightarrow B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = K_p(q_d - q) - K_d\dot{q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(q)\ddot{q} = K_p(q_d - q) \Rightarrow \ddot{q} = \boxed{B^{-1}(q)K_p}(q_d - q) \Rightarrow$$

\Rightarrow l'accelerazione è $\neq 0$ \neq perché $q \neq q_d$ so
diversa da zero per cui la o

velocità cambia \Rightarrow ci si sposta in L_v fino ad arrivare μ
in $L_{v/f}$ cioè nello stato di equilibrio asintoticamente pu
stabile (q_d) in modo che l'accelerazione sia nulla pe
e si permane così in tale stato. I punti in cui lo stato è \Rightarrow
 (q) con $q \neq q_d$ corrispondono a punti della $V(q, \dot{q})$ nei quali

ho degli asintoti orizzontali dai quali si esce per andare pb
nei punti di minimo (q_d) . \exists quindi istanti nei quali la de
velocità si annulla (ad esempio per una inversione del μ
senso di rotazione). Nonostante $\dot{V}(q, \dot{q}) \leq 0 \rightarrow$ si riesce la
cmq a dimostrare la A.S. del punto di equilibrio. B

Con questa dimostrazione non si riesce a determinare ed
la velocità di convergenza al punto di equilibrio.

Quando $q \approx q_d$ (è valida l'approssimazione del sistema os
non lineare con un sistema lineare nell'intorno di q_d) $(m$
possiamo calcolare gli autovalori del sistema linearizzato
per avere un'idea della velocità di convergenza locale.
Questo schema di controllo:

$u = g(q) + K_p(q_d - q) - K_d\dot{q}$ ha una parte complessa da q
calcolare $g(q)$ perché si

desidero conoscere le masse e le posizioni dei baricentri \Rightarrow
di tutti i bracci in una determinata configurazione \Rightarrow

\exists un certo numero di calcoli da effettuare in linea retta pe
per linea mentre il robot si sta muovendo. La restante pe
parte del controllo è realizzata con calcoli facili da ese- 5
guire se K_p e K_d sono delle matrici diagonali \Rightarrow 186

Te \Rightarrow complementivamente ea coppia da applicare al giunto i -mo:

τ
 $M_i = \underbrace{g_i(q)}_{\text{calcolo globale}} + \underbrace{K_{p_i}(q_{d_i} - q_i) - K_{D_i}\dot{q}_i}_{\text{questo è un coop locale che per essere calcolato ha bisogno solo delle informazioni relative all' i-mo giunto.}}$

1-S
Id
calcolo globale per cui servono le informazioni sugli altri giunti
questo è un coop locale che per essere calcolato ha bisogno solo delle informazioni relative all' i -mo giunto.

Una versione semplificata di questa legge di controllo è:
CONTROLLO PD CON COMPENSAZIONE DELLA GRAVITÀ
SOLO SUL PUNTO FINALE DELLA TRAIETTORIA

$\tau \neq q$
 $M = g(q_d) + K_p(q_d - q) - K_D\dot{q}$ Si calcola una volta per tutte ea compensazione solo nel

Te punto finale (momento come richiesto calcola in linea). È più semplice perché i calcoli da svolgere in linea sono solo quelli locali \Rightarrow

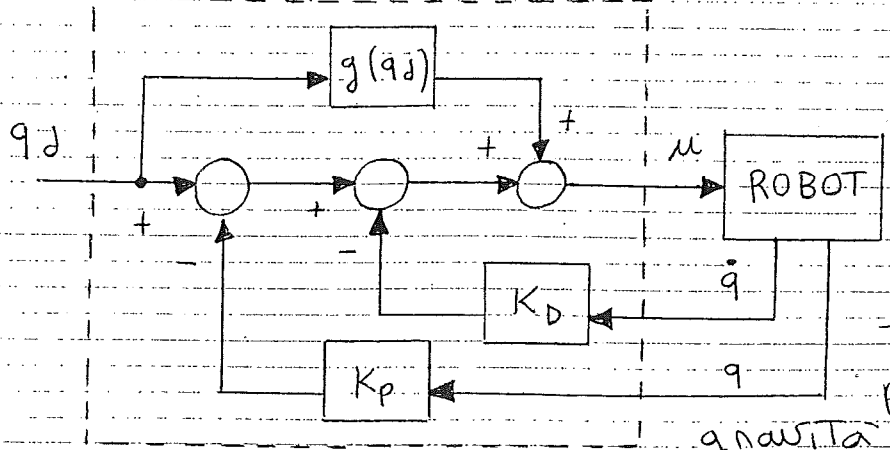
è
alt
one
 $\Rightarrow M_i = g_i(q_d) + K_{p_i}(q_{d_i} - q_i) - K_{D_i}\dot{q}_i$

Pb: È un controllo stabile? Sì solo però sotto certe Hp dipende dalle matrici K_p e K_D . OSS: Questa volta quando sostituisco M nel modello dinamico non ho una compensazione esatta della gravità perché non posso semplificare i termini di gravità \Rightarrow

$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + d(\dot{q}) + g(q) = M = g(q_d) + K_p(q_d - q) - K_D\dot{q}$

ed il bilancio energetico è: $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + U(q) \right) = \dot{q}^T M - \dot{q}^T d(\dot{q})$

OSS: $g(q_d)$ è costante ed è calcolato all'inizio della traiettoria (momento calcolato in linea): lo schema a blocchi è:

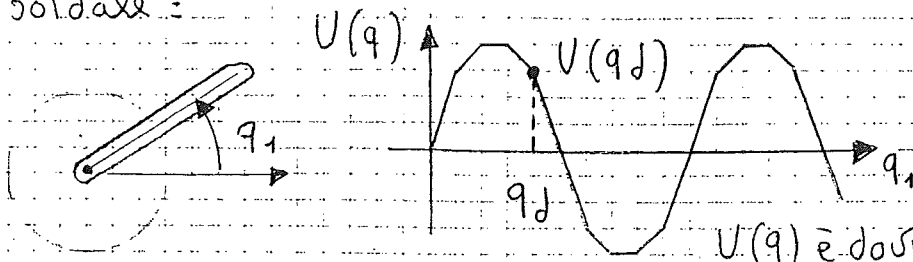


Se i calcoli in linea di minimizzano si può adottare un passo di campionamento più breve \Rightarrow

Pb: In questo controllo, \exists energia potenziale perché la gravità non viene compensata esattamente \Rightarrow

CONTROLLORE

deve comporre nella $V(q, \dot{q})$. P_b = L'energia potenziale di un braccio in cernierato dipende da q con andamento sinusoidale:



Nei giunti a cerniera è presente di minimi e massimi della

$U(q)$ è dovuta solo all'orientamento del braccio, mentre nei giunti prismatici è dovuta al fatto che la corsa del braccio è limitata. Nella $V(q, \dot{q})$ si dovrebbe tener conto della energia potenziale con un termine che sia un minimo quando $q = q_d$. Dobbiamo trasformare opportunamente la $U(q)$ definendo la seguente funzione:

$$P(q) = U(q) - U(q_d) + g^T(q_d)(q_d - q)$$

Consideriamo ora lo sviluppo in serie di Taylor di $U(q)$ arrestato al II° ordine attorno a q_d :

$$U(q) = U(q_d) + \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q_d}}_{g^T(q_d)}(q - q_d) + \frac{1}{2}(q - q_d)^T \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\bigg|_{q_d} (q - q_d)$$

OSS: Una funzione scalare f di una variabile scalare x ha uno sviluppo in serie di Taylor del secondo ordine in \bar{x} :

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}\bigg|_{\bar{x}}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(x - \bar{x})^2$$

mentre se f è scalare ma la variabile x è vettoriale:

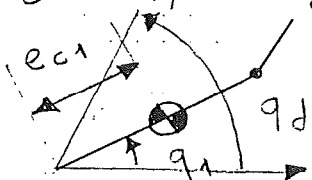
$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\bar{x}}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{\bar{x}}(x - \bar{x})$$

cioè si generalizza utilizzando la matrice Jacobiana delle derivate prime e la matrice Hessiana delle derivate seconde.

La funzione $\bar{P}(q)$ è tale che: $\bar{P}(q_d) = 0$ ed inoltre:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial q}\bigg|_{q_d} = \frac{\partial U}{\partial q}\bigg|_{q_d} + g^T(q_d)(-I) = \frac{\partial U}{\partial q_d} - g^T(q_d) = 0 \Rightarrow$$

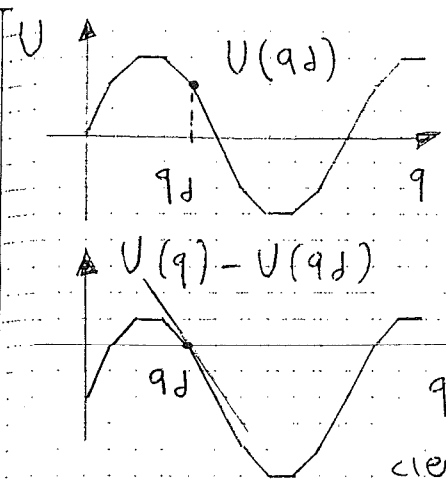
$\Rightarrow \bar{P}(q)$ ha gradiente nullo in $q = q_d$.



L'energia potenziale associata ad un singolo braccio è:

$$U(q) = m_1 g l_{c1} \sin(q_1) \Rightarrow$$

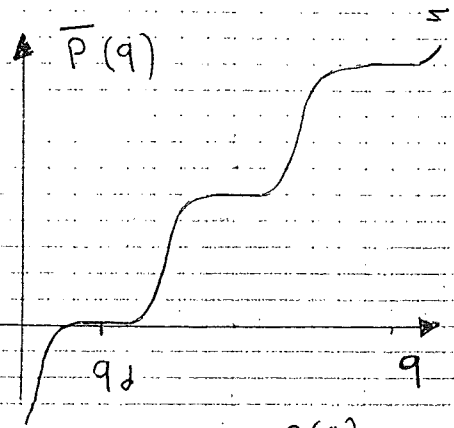
di
mu
s
em
s
de
ita
s



Se voglio imporre una q_d componendo in quel punto la gravità, la funzione deve annullarsi in $q_d \rightarrow 0$.
 Trasla perciò la $\bar{P}(q)$ verso il basso in modo che $U(q_d) = 0$. Si misura o si calcola la pendenza della funzione $U(q) - U(q_d)$ in q_d e si somma a tale funzione una retta con coefficiente angolare opposto alla derivata calcolata.

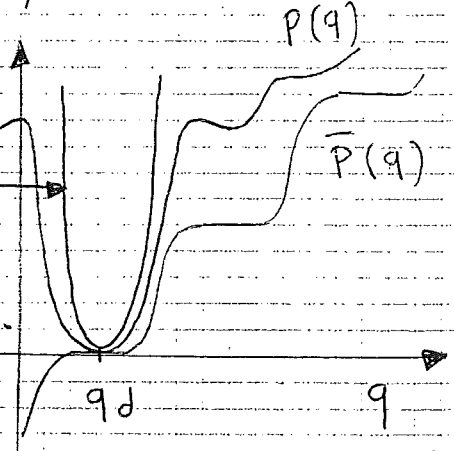
si
ve
pa
s
e
di

Ta sopra: otteniamo in questo modo la funzione $\bar{P}(q)$ definita in precedenza:
 $\bar{P}(q) = U(q) - U(q_d) + g^T(q_d)(q_d - q)$
 che si annulla in q_d ed ha derivata nulla in q_d . A partire da questa funzione che ha un punto di stazionarietà in q_d (creato artificialmente) si può definire un'altra funzione:



si
i:

$P(q) = \bar{P}(q) + \frac{1}{2}(q_d - q)^T K_p (q_d - q)$
 Se K_p è sufficientemente elevata, la somma $P(q)$ è ancora nulla in q_d ed è definita positiva attorno a q_d . Inoltre ha ancora derivata nulla in q_d .
 L'Hessiana della $P(q)$ e la sua Jacobiana sono le seguenti:



de
nde
re:

$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q} - g^T(q_d) - (q_d - q)^T K_p \rightarrow$ La Jacobiana si annulla in q_d .
 $\frac{\partial^2 P}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} + K_p > 0 \forall q \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow K_p$ è maggiore di $\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \Rightarrow$
 in tal modo è Hessiana e sempre positiva \Rightarrow

riesco ad imporre artificialmente (prendendo K_p sufficientemente grande) un minimo globale (se è Hessiana e sempre positiva) o un minimo locale (se $H < 0$ in qualche zona) nel punto q_d . Nei robot con giunti a cerniera gli angoli di giunto compaiono come argomenti di funzioni trigonometriche \Rightarrow è sempre possibile trovare K_p

tale che $\partial^2 P > 0$. La $P(q)$ può essere messa nella funzione di ∂q^2 Lyapunov per tener conto del contributo della energia potenziale (infatti $P(q)$ è definita positiva rispetto a q e si annulla in q_d) \Rightarrow

$$\Rightarrow V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + U(q) - U(q_d) + g^T(q_d)(q - q_d) + \frac{1}{2} (q_d - q)^T K_p (q_d - q)$$

È una funzione di Lyapunov candidata se K_p è suff. grande.

Inoltre il punto $(q_d, 0)$ è ancora un punto di equilibrio. Sostituendo l'espressione del controllo con compensazione della gravità nel punto finale nella $\dot{V}(q, \dot{q})$

$$\begin{aligned} \dot{V}(q, \dot{q}) &= \dot{q}^T \mu - \dot{q}^T d(\dot{q}) - g^T(q_d) \dot{q} - (q_d - q)^T K_p \dot{q} \\ &= \cancel{\dot{q}^T g(q_d)} + \cancel{\dot{q}^T K_p (q_d - q)} - \dot{q}^T K_D \dot{q} - \dot{q}^T d(\dot{q}) - \cancel{g^T(q_d) \dot{q}} + \\ &\quad - \cancel{(q_d - q)^T K_p \dot{q}} = -\dot{q}^T K_p \dot{q} - \dot{q}^T d(\dot{q}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$\dot{V}(q, \dot{q}) = -\dot{q}^T K_p \dot{q} - \dot{q}^T d(\dot{q})$ Per mezzo del Teorema di La Salle dimostriamo che è l'unico punto invariante che annulla \dot{V} è il punto di equilibrio $(q_d, 0)$. I punti che annullano \dot{V} sono:

$(q, 0)$ con $q \in \mathbb{R}^m$. Si dimostra che se $q \neq q_d$ e $\dot{q} = 0 \rightarrow \ddot{q} \neq 0$ cioè il punto risulta essere non invariante. Infatti:

$$\begin{aligned} B(q) \ddot{q} + g(q) &= g(q_d) + K_p (q_d - q) \Rightarrow \\ \Rightarrow B(q) \ddot{q} &= g(q_d) - g(q) + K_p (q_d - q) = -\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left(U(q) - U(q_d) + g^T(q_d)(q - q_d) + \frac{1}{2} (q - q_d)^T K_p (q - q_d) \right)$$

$$= \frac{\partial U}{\partial q} - g^T(q_d) + (q - q_d)^T K_p \Rightarrow \quad g(q) = \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)^T$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T = -\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)^T + g(q_d) + K_p (q_d - q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T = -g(q) + g(q_d) + K_p (q_d - q)$$

$$\Rightarrow B(q) \ddot{q} = -\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)^T + g(q_d) + K_p (q_d - q) \Rightarrow$$

\Rightarrow Se $q \neq q_d$ allora risulta $\ddot{q} \neq 0$. Questo risultato, assieme all'HP che K_p è sufficientemente elevato per cui risulta che $K_p + \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0$ cioè è Hessiana di $P(q)$

è sempre positiva, ci permette di assicurare l'EMZA e la unicità del punto di stabilità globale. Un obiettivo più semplice è maggiorare l'Hessiana di $U(q)$ solo nel punto desiderato nel caso in cui la traiettoria $q(t)$ parte da un

$K_p + \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \Big|_{q_d} > 0$ punto q vicino a q_d . In conclusione, possiamo dire che il controllo PD con compensazione della gravità solo sul punto finale è asintoticamente stabile, purché K_p sia sufficientemente elevata. Impatto se ad esempio q_0 che q_d è la configurazione con il braccio esteso sulla testa del robot (compensazione di gravità nulla), mentre il punto di partenza q è con il braccio abbassato \Rightarrow affinché il braccio possa arrivare fino a q_d senza alcuna compensazione, il guadagno proporzionale dovrà essere molto elevato.

RIC: Il modello del robot dinamico:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + d(\dot{q}) + g(q) = u, \text{ mom è stato sgravitato}$$

appreso per realizzare il controllo: abbiamo utilizzato l'impatto solo la $g(q)$ per realizzare la compensazione esatta di gravità: la stabilità asintotica si dimostra con la:

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + \frac{1}{2} (q_d - q)^T K_p (q_d - q)$$

Com $u = g(q) \Rightarrow$ il robot appare in un ambiente privo di vibrità. Aggiungendo anche il controllo PD con compensazione esatta è allora il seguente:

$u = g(q) + K_p (q_d - q) - K_D \dot{q}$ con $q(t) \rightarrow q_d$ per dimostrare questa convergenza asintotica si usa la con punto di equilibrio $u_e = \begin{pmatrix} q_d \\ 0 \end{pmatrix}$. L'altra legge di controllo è quella PD con compensazione della gravità nel punto finale:

$u = g(q_d) + K_p (q_d - q) - K_D \dot{q}$ è più facile da calcolare delle precedenti (come leggi simili se $q \approx q_d$). È un controllo stabile nello spazio dei giunti a patto che:

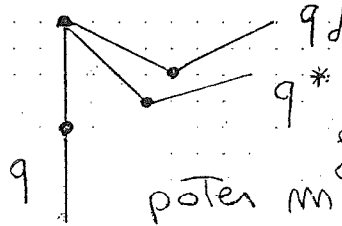
$K_p + \frac{\partial U}{\partial q^2} > 0$ Questa condizione può essere vera in tutto \mathbb{R}^m oppure in un sottospazio di \mathbb{R}^m .

Pb: K_p troppo grande crea problemi perché aumenta la BW, si vanno ad eccitare modi particolari che non permettiamo di trascurare e elastici, il numero è amplificato, ci sono pb di saturazione degli attuatori per cui saturano le leggi di controllo. Per dimostrare che, per K_p sufficientemente grande, questo controllo realizza la stabilità asintotica: $q(t) \rightarrow q_d$, si utilizza la $V(q)$ che stavolta però contiene il termine relativo alla energia potenziale modificato:

$$\odot V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + U(q) - U(q_d) + g^T(q_d)(q_d - q) + \frac{1}{2} (q_d - q)^T K_p (q_d - q) \quad \text{con } K_D = K_D^T > 0 \text{ e } K_p \rightarrow \text{grande}$$

OSS: Nella compensazione esatta è sufficiente che si abbia: $K_p = K_p^T > 0$ e $K_D = K_D^T > 0$. Una terza legge di controllo è la PD pura senza compensazione della gravità:

CONTROLLO PD SENZA COMPENSAZIONE DELLA GRAVITÀ

 $\mu = K_p (q_d - q) - K_D \dot{q}$ Per passare da q a q_d , la coppia che applico dipende da $q_d - q \Rightarrow$ cioè il grm, giacché in q_d la coppia è nulla \Rightarrow per poter mantenere la posizione q_d , è necessario che ci sia un errore diverso da zero che possa compensare la gravità, cioè la configurazione non è q_d ma q^* tale che: $\mu^* = K_p (q_d - q^*) = g(q^*) \rightarrow$ A velocità nulla

Cio' fa sì che \exists un errore di posizionamento \Rightarrow

$$\Rightarrow q_d - q^* = K_p^{-1} g(q^*) \Rightarrow q^* = q_d - K_p^{-1} g(q^*)$$

L'errore di posizionamento è tanto più piccolo quanto più $K_p^{-1} \approx 0 \rightarrow K_p$ è elevato. Segue che: $q_i^* = q_d - \frac{1}{K_{p_i}} g_i(q^*) \rightarrow$ Se K_p è una matrice diagonale Cioè il termine di gravità che

agisce sul giunto i -mo. Viene di viso per K_{pi} . Il controllo PD puro produce un punto di equilibrio che non è q_d ma q^* che è tanto più prossimo a q_d quanto più $K_p^{-1} \approx 0$.
 Studiamo ora la stabilità del punto di equilibrio q^* (cerchiamo δ piccoli per K_p nel caso peggiore). Cerchiamo cioè sotto quali condizioni su K_p ho che $q(t) \rightarrow q^*$. Si usa la funzione di Lyapunov analoga alla \odot della facciata precedente, però incentrata su q^* e con punto di equilibrio $\begin{pmatrix} q^* \\ 0 \end{pmatrix} = x_e$.

$$\odot V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + \underbrace{U(q) - U(q^*) + g^T(q^*)(q^* - q) + \frac{1}{2} (q^* - q)^T K_p (q^* - q)}_{P(q)}$$

de $\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q} - g^T(q^*) - (q^* - q)^T K_p$ considerando che:

n' $g^T(q^*) = \frac{\partial U}{\partial q} |_{q^*} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial q} |_{q^*} = 0}$ Imgatti risulta:

A' $\frac{\partial P}{\partial q} |_{q^*} = \frac{\partial U}{\partial q} |_{q^*} - g^T(q^*) - (q^* - q)^T K_p |_{q^*} = 0 \quad \square$

Imortae risulta:

ze $\boxed{\frac{\partial^2 P}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} + K_p > 0}$ Condizione analoga a quella trovata nella compensazione non esatta, salvo che il punto di

equilibrio (come imponentemente punto di minimo e punto di zero) è q^* unico $(\Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial q^2} > 0 \Rightarrow K_p$ è sufficientemente grande in modo che ea condizione valga da in tutto $\mathbb{R}^m \rightarrow q^*$ è un punto eq. globale A.S. oppure in un sotto spazio di $\mathbb{R}^m \rightarrow q^*$ è un punto di equilibrio locale A.S. Abbiamo quindi il criterio secondo il quale dimensionare K_p in modo da avere asintotica stabilità per il punto di eq. x_e . K_p deve essere suff. elevato per due motivi:

- 1) avere un errore di posizione piccolo $(q_d - q^*) \rightarrow 0$
- 2) avere il punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Dimostriamo ea AS derivando ea funzione di Lyapunov:

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = \underbrace{\dot{q}^T u}_{(1)} - g^T(q^*) \dot{q} - (q^* - q)^T K_p \dot{q} - \underbrace{\dot{q}^T d(\dot{q})}_{(2)}$$

La derivata della energia cinetica (variazione) è espressa come potenza in ingresso sugli attuatori (1) meno la potenza dissipata in calore per effetto dell'attrito (2).

$$\Rightarrow \dot{V}(q, \dot{q}) = \dot{q}^T K_p (q_d - q) - \dot{q}^T K_D \dot{q} - g^T(q^*) \dot{q} = (q^* - q)^T K_p \dot{q} + \dot{q}^T d(\dot{q})$$

OSS: Nel paragrafo precedente si è sostituita l'espressione del controllo: $u = K_p (q_d - q) - K_D \dot{q}$. Si ricorre al modello che q^* è tale che $K_p (q_d - q^*) = g(q^*)$.

$$\Rightarrow \dot{V}(q, \dot{q}) = \underbrace{-\dot{q}^T K_D \dot{q} - \dot{q}^T d(\dot{q})}_{\text{Termini dissipativi} < 0} + (q_d - q - q^* + q)^T K_p \dot{q} - g^T(q^*) \dot{q}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(q, \dot{q}) = -\dot{q}^T K_D \dot{q} - \dot{q}^T d(\dot{q}) + \underbrace{[(q_d - q^*)^T K_p - g^T(q^*)]}_{\text{Per la proprietà della configurazione } q^* \text{, la qta. indicata è nulla}} \dot{q}$$

Per la proprietà della configurazione q^* , la qta. indicata è nulla $\Rightarrow \dot{V}(q, \dot{q}) \leq 0$

La \dot{V} è semidefinita negativa (il controllo è dissipativo non appena la velocità è diversa da zero) \Rightarrow per il Teorema di Lyapunov è assicurata la semplice stabilità. L'asintotica stabilità è garantita dall'estensione del Teorema di La Salle: è unico punto a velocità nulla che sia invariante $\hat{e} (q^*)$, infatti un altro punto (q) con $q \neq q^*$ annulla $\dot{V}(q, \dot{q})$ ma dal modello dinamico del robot risulta:

$$B(q)\ddot{q} + g(q) = K_p (q_d - q) \Rightarrow \ddot{q} \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} \text{ non è}$$

$$\text{invariante perché } B(q)\ddot{q} + g(q) = K_p (q_d - q^* + q^* - q) =$$

$$= \underbrace{K_p (q_d - q^*)}_{g(q^*)} + K_p (q^* - q) \Rightarrow \text{il modello dinamico del robot diventa il seguente:}$$

$$\Rightarrow B(q)\ddot{q} + g(q) = g(q^*) + K_p (q^* - q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{q} = B^{-1}(q) [g(q^*) - g(q) + K_p (q^* - q)]$$

na OSS = La quantità tra parentesi quadre è nulla $\Leftrightarrow q = q^*$
 ⇒ ea \ddot{q} si annulla solo in $q = q^*$ (unico punto in via
 stante) nel sottospazio in cui vale ea:

+ $K_p + \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0$ Questo perché la qta tra parentesi quadre
 è pari a meno il gradiente della $P(q)$:

me $-\frac{\partial P}{\partial q} = g(q^*) - g(q) + K_p(q^* - q)$ che si annulla solo
 per $q = q^*$.

l Quindi se $q \neq q^* \Rightarrow \ddot{q} \neq 0 \Rightarrow q^*$ è un punto di A.S. perché
 è l'unico in cui $\ddot{q} = 0$.

OSS: Il controllo PD puro non viene applicato mai ma serve
 solo per capire. ∃ infatti una quarta possibilità che è una
 via di mezzo tra questi primi tre tipi di controllo (con
 compensazione: esatta → calcolo $g(q)$ istante per istante,
 finale → meno calcoli da fare in linea, pura → meno
 compensa affatto) che consiste nel compensare la gravità
 con un modello che non corrisponde esattamente a

quello vero:
$$u = \begin{cases} \tilde{g}(q) + K_p(q_d - q) - K_D \dot{q} \\ \tilde{g}(q_d) \end{cases}$$

CONTROLLO CON MODELLO NON ESATTO PER LA
 COMPENSAZIONE DELLA GRAVITÀ

Se disponiamo di un modello non esatto, per dimostrare la
 stabilità asintotica del controllo servono le dimostrazioni
 effettuate in precedenza, in particolare dell'ultima. L'Hp

è che non conosco esattamente $U(q) \rightarrow \frac{\partial U}{\partial q} = g(q)$
 ma conosco un modello che

lo approssima: $\tilde{U}(q) \rightarrow \frac{\partial \tilde{U}}{\partial q} = \tilde{g}(q)$

L'idea è avere le differenze $\rightarrow \begin{cases} U(q) - \tilde{U}(q) \\ g(q) - \tilde{g}(q) \end{cases}$
 tanto più piccole quanto più conosco

la cinematica e la dinamica del robot.

La legge con compensazione della gravità e PD, con il
 modello approssimato diventa la seguente:

$u = \tilde{g}(q) + K_p(q_d - q) - K_D \dot{q}$ che non dà come punto di
 equilibrio q_d ma un q^* tale che il modello è:

$g(q^*) = \tilde{g}(q^*) + K_p(q_d - q^*) - K_D \dot{q}$ (con $\dot{q} = \ddot{q} = 0$)

$$\Rightarrow K_p (q_d - q^*) = g(q^*) - \tilde{g}(q^*) \Rightarrow$$

OSS: Se il modello fosse esatto allora $q_d = q^*$ ($\tilde{g} = g$)

$$\Rightarrow q^* = q_d - K_p^{-1} (g(q^*) - \tilde{g}(q^*))$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g_E(q)}$

\leftarrow Si spera che è errore sia inferiore rispetto a quello che si commette non compensando affatto.

Si dimostra la stabilità asintotica considerando una gravità ridotta: $\begin{cases} U(q) - \tilde{U}(q) = U_E(q) \\ g(q) - \tilde{g}(q) = g_E(q) \end{cases}$ Il controllore vede il robot in un ambiente a gravità ridotta.

In particolare la condizione su K_p diventa la seguente:

$K_p + \frac{\partial^2 U_E}{\partial q^2} > 0$ Se il modello è fedele (compensazione esatta) la condizione degenera in $K_p > 0$ mentre se il modello non c'è proprio (controllo senza compensazione della gravità) la condizione è:

$K_p + \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0$ cioè le tre leggi di controllo viste precedentemente possono essere tutte

inquadrate su un modello di gravità che differisce da quello reale (modello approssimato). Ad esempio il modello del controllo con compensazione della gravità nel punto finale è:

$$\tilde{U}(q) = -g^T(q_d)(q_d - q) \Rightarrow \frac{\partial \tilde{U}}{\partial q} = g^T(q_d) \rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial q^2} = 0$$

Tutti i controllori si possono sintetizzare con la legge generale:

$$u = \tilde{g}(q) + K_p(q_d - q) - K_D \dot{q}$$

Il punto finale si ricava dalla: $K_p(q_d - q^*) = g(q^*) - \tilde{g}(q^*)$
 La dimostrazione della A.S. si fa con la di 3 facciate prima.

PB: Non è bene che sia presente l'errore di posizionamento finale $q_d - q^* \Rightarrow$ questo è il motivo per cui è previsto sempre il termine integrale, per il quale però non abbiamo dimostrazione per la stabilità:

$$u = \tilde{g}(q) + K_p(q_d - q) - K_D \dot{q} + K_I \int (q_d - q) dt$$

In questo modo la gravità è compensata in parte dal mo.

dello approssimato $\tilde{g}(q)$ ed in parte dall'integrale. In particolare all'equilibrio risulta che (eq. asintotico) =

$$g(q_d) = \tilde{g}(q_d) + K_I \int_{t_0}^{\infty} (q_d - q(\tau)) d\tau$$

In questo modo sappiamo quanto vale l'integrale dell'errore e all'equilibrio asintotico si arriva in q_d . Non studia la stabilità di tale punto perché un polo in più nell'origine destabilizza il sistema. In genere K_I è piccolo per disturbare poco. OSS = Per avere un'idea del valore della costante di tempo del sistema (autovalori del sistema a ciclo chiuso) si può fare in questo modo:

$\dot{x} = f(x) + g(x)u$ con stato accessibile $x = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$

ed $u = K(x, x_d)$ è il feedback (statico) dallo stato perché non introduce dinamiche ulteriori. Sostituendo:

$\dot{x} = f(x) + g(x)K(x, x_d)$; x_d è punto di equilibrio tale che:

$$0 = f(x_d) + g(x_d)K(x_d, x_d) \rightarrow \text{nel robot } x_d = \begin{pmatrix} q_d \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nella compensazione esatta $x^* = x_d$ mentre in quella non esatta $x^* \approx x_d$ ed ho che x^* è il punto di equilibrio tale che:

$$0 = f(x^*) + g(x^*)K(x^*, x_d)$$

Come fare per avere una idea della dinamica del sistema attorno al punto di equilibrio? \rightarrow Linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio = il caso generale è:

SISTEMA $\rightarrow \dot{x} = f(x) + g(x)K(x, x_d)$

LEGGE DI CONTROLLO $\rightarrow 0 = f(x^*) + g(x^*)K(x^*, x_d)$ Definiamo:

$\zeta = x - x^* \Rightarrow \dot{\zeta} = \dot{x}$ perché $x^* = \text{cost.}$

$\Rightarrow \dot{\zeta} = f(x) - f(x^*) + [g(x)K(x, x_d) - g(x^*)K(x^*, x_d)]$

Lo sviluppo di Taylor al primo ordine se $x \approx x^*$ è:

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^*} (x - x^*) + \frac{\partial g(x)K(x, x_d)}{\partial x} \Big|_{x^*} (x - x^*) \rightarrow SI$$

$$\Rightarrow \dot{\zeta} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^*} \zeta + \left[\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x^*} K(x^*, x_d) + g(x^*) \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{x^*} \right] \zeta =$$

$\Rightarrow \dot{z} = A z$ La matrice dinamica è la somma delle ed
Jacobiano di f più il termine $T_{ra} [\dots]$ del

Se il sistema ha più ingneri (MI) risulta che: tal

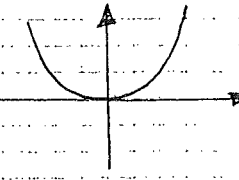
$\dot{u} = f(u) + \sum_{i=1}^p g_i(u) K_i(u, x_d)$ e la matrice dinamica B

$A = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u^*} + \sum_{i=1}^p \left[\frac{\partial g_i}{\partial u} \Big|_{u^*} K_i(u^*, x_d) + g_i(u^*) \frac{\partial K_i}{\partial u} \Big|_{u^*} \right]$ + J

Nel robot è operazione è semplificata dal fatto che il modello nella forma non canonica è il seguente: eq

$B(q) \ddot{q} + \underbrace{C(q, \dot{q}) \dot{q} + d(\dot{q}) + g(q)}_{N(q, \dot{q})} = \tilde{g}(q) + K_p(q_d - q) - K_D \dot{q}$ ps

OSS: La linearizzazione attorno al punto di eq. $\begin{pmatrix} q^* \\ 0 \end{pmatrix}$ ci consente di non considerare la $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ perché è costituita da termini quadratici che hanno tangente nulla nell'origine (infinitesimi di ordine superiore). L'altro viene approssimato con un termine lineare: $d(\dot{q}) \cong F \dot{q}$.

In questo modo la forma canonica è:  \Rightarrow

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -B^{-1}(x_1) N(x_1, x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -B^{-1}(x_1) \end{bmatrix} u$ con di no

La linearizzazione è attorno al punto $\begin{pmatrix} q^* \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2^* = 0$ con $N(x_1, x_2) = F x_2 + g(x_1)$ not

CEDEVOLEZZA DEL ROBOT CONTROLLATO CON PD
Quando sul robot agisce una forza esterna, il modello dinamico diventa il seguente: \Rightarrow

$B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + d(\dot{q}) + g(q) = \tilde{g}(q) + K_p(q_d - q) - K_D \dot{q} + J_K^T(q) F$ Il contributo della forza esterna può essere integrato nel termine di gravità $g(q)$ \Rightarrow

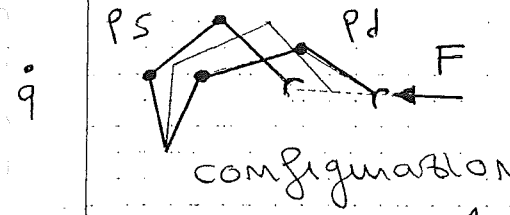
In gatti è effetto di F e quello di applicare una forza in più sui giunti. Se la componi potrei compensarla esattamente e non ci sarebbero pb. In realtà non è nota e provoca uno spostamento dal punto di equilibrio. Supponiamo che dal esterno agisca un vettore di forze (rappresentato sui giunti = \Rightarrow l'altro è il Jacobiano analitico trasposto $J_K^T(q)$ costante. \Rightarrow

ed H_p che la legge di controllo dia una compensazione esatta dell'agnavia cioè $\tilde{g}(q) = g(q) \Rightarrow$ lo spostamento prodotto da tale forza esterna è allora il seguente. (con $\dot{q} = \ddot{q} = 0$):

mic $B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + d(q) + g(q) = g(q) + K_p(q_d - q) - K_D\dot{q} + J_K^T(q)F \Rightarrow \boxed{K_p(q_d - q_s) = -J_K^T(q)F}$ $\oplus \begin{cases} P_d = K(q_d) \\ P_s = K(q_s) \end{cases}$

com P_d e P_s posizione cartesiana desiderata
 e quella dovuta allo spostamento prodotto dalle forze esterne F .

Se è valida e approssimabile (piccolo spostamento) $\Rightarrow P_d - P_s = J_K(q_s)(q_d - q_s)^T$
 Considerando il robot quadrato con configurazione tale da avere Jacobiano invertibile:



ci $\Rightarrow q_d - q_s = J_K^{-1}(q_s)(P_d - P_s)$ Sostituendo nella $\oplus \Rightarrow$

Tu, $\Rightarrow K_p J_K^{-1}(q)(P_d - P_s) = -J_K^T(q_s)F \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{F = J_K^T(q_s) K_p J_K^{-1}(q_s)(P_s - P_d)}$ La forza applicata ha causato uno

spostamento cartesiano. È una relazione lineare tra forza e spostamento prodotto. Il robot si comporta sostanzialmente come una molla (con costante elastica pari alla matrice di rigidità). Matrice di rigidità (STIFFNESS) del

robot: $\boxed{J_K^T(q_s) K_p J_K^{-1}(q_s)}$ Lo spostamento è centrato sulla

posizione desiderata P_d del robot (punto di riposo delle molle). Un controllore PD realizzato nello spazio dei giunti dà una rigidità che

dipende da q (è ∞ nelle configurazioni singolari quando applicando una forza F diretta nella direzione delle reazioni vincolari, ho uno spostamento nullo):

(9) L'inversa della rigidità è la CEDEROLEZZA \Rightarrow

u $\Rightarrow \boxed{J_K^T(q_s) K_p^{-1} J_K(q_s) F = P_s - P_d}$ Il robot è tanto più cedevole quanto

ms può la cedevolezza è alta e la rigidità è bassa. Nelle configurazioni singolari la cedevolezza è nulla (perché ∞ è la rigidità ∞). Con controllori nello spazio cartesiano è possibile imporre una cedevolezza costante al variare di q .

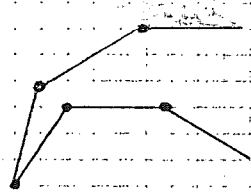
Ric: Il modello dinamico del robot completo è:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + d(\dot{q}) + g(q) = u \quad \odot$$

La legge di controllo PD con compensazione delle gravità, fa uso del modello solo per quanto riguarda l'energia potenziale ed usa poi un termine derivativo ed uno proporzionale:

$$u = \tilde{g}(q_d) + K_p(q_d - q) - K_d\dot{q} \quad \text{SSS: è una legge di controllo di posizione perché } q_d = \text{cost.}$$

Una legge di controllo di Traiettonia prevede una $q_d = q_d(t)$, non aggiunta nel corso. La Traiettonia fisica va distinta



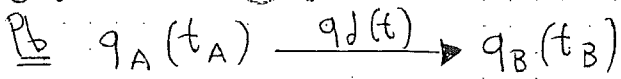
dalla legge di moto. Un pianificatore di Traiettonie deve identificare una legge di perconnenza di moto in base alle Traiettonia da realizzare.

Per il PD con una compensazione delle gravità $\forall \tau$ è dimostrata la stabilità solo nel caso di controllo di posizione. Se si vuole realizzare un controllo di Traiettonia bisogna utilizzare una legge di controllo del tipo:

$$u = \tilde{g}(q) + K_p(q_d - q) + K_d(\dot{q}_d - \dot{q})$$

Il termine di smorzamento K_d

assume le sembianze di un controllo proporzionale anche sulla velocità, tuttavia si dimostra che tale controllo sia asintoticamente stabile, ma viene comunque utilizzato. Per la legge di controllo di Traiettonia, si può fare di meglio di un semplice controllo PD modificato, se si conosce il modello del robot \odot :



Data una Traiettonia $q_d(t)$ specificata nello spazio dei giunti, si può ottenere come

inversione di una Traiettonia nello spazio cartesiano. Se conosciamo esattamente il modello dinamico, potremmo risalire al vettore di coppie motoriali $u_m(t)$ che realizza questa Traiettonia nel seguente modo:

$$u_m(t) = \tilde{B}(q_d(t))\ddot{q}_d(t) + \tilde{C}(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + \tilde{d}(\dot{q}_d) + \tilde{g}(q_d)$$

Questa è una "storia" basata su un modello ipotizzato

che potrebbe non essere quello vero. Questo implica che $u_m(t)$ applicata al robot vero non produce la traiettoria $q_d(t)$ ma una traiettoria diversa (è attinto bilancia parte della coppia nominale). Si compensa questo comportamento in due modi:

1) Filosofia del controllo di posizione con compensazione sul punto finale ($u = u_m + K_p(q_d - q) - K_D \dot{q}$) applicata al controllo di $g(q_d)$ PRECOMPUTED TORQUE

$$u(t) = u_m(t) + K_p(q_d - q) + K_D(\dot{q}_d - \dot{q})$$

Compensazione di posizione o di velocità.

Il feedback è nullo se il modello è coincidente con quello reale (perché la configurazione finale è q_d). Questo controllo è fondamentalmente basato sul modello dinamico del robot ed è chiamato controllo a coppia precalcolata (PRE-COMPUTED TORQUE) perché solo i termini di compensazione di velocità e posizione sono calcolati in linea, mentre la maggior parte dei conti (relativi al calcolo della coppia nominale $u_m(t)$) sono effettuati preventivamente fuori linea. A una dim. per la stabilità asintotica di questo controllo. Il controllo a coppia precalcolata funziona tanto meglio quanto più il modello dinamico a disposizione è affidabile.

oss: La condizione sul guadagno cioè: $K_p + \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0$ non è utilizzata nella pratica, ma si preferisce fare delle simulazioni per settare i guadagni sul campo. Analogamente in questo controllo i guadagni si calcolano a partire dallo stato di partenza q_A sulle traiettorie, attraverso simulazioni.

2) L'altro controllo è il COMPUTED TORQUE (controllo inverso, o controllo a coppia calcolata) nel quale si effettuano tutti i calcoli in linea, a partire dal modello:

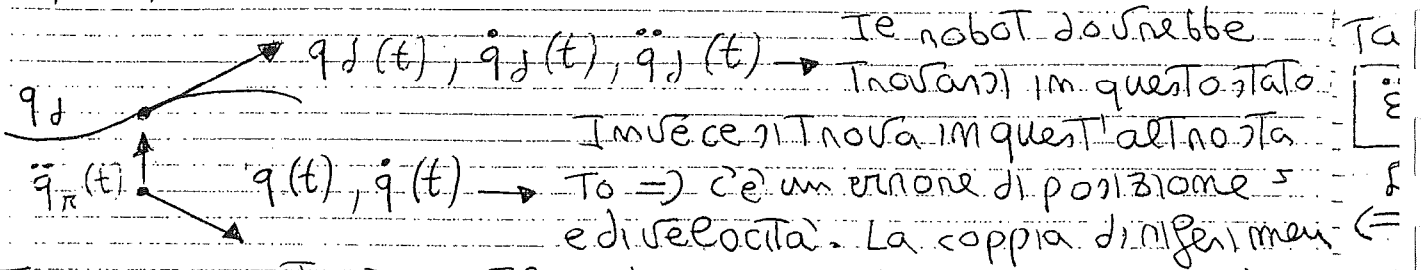
$$B(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = u \Rightarrow \ddot{q} = -B^{-1}(q)N(q, \dot{q}) + B^{-1}(q)u$$

Se applico al robot un'accelerazione di quanto di riferimento: \ddot{q}_r , devo poi misurare lo stato (q, \dot{q}) del robot e calcolare una u_r imponendo $\ddot{q} = -B^{-1}(q)N(q, \dot{q}) + B^{-1}(q)u_r \Rightarrow$

$$\Rightarrow u_r = B(q)\ddot{q}_r + N(q, \dot{q})$$

Ritroviando il modello

dinamico (che di per sè è già un modello in senso della dinamica del robot). Ciò significa che posso accelerare il robot imponendo delle accelerazioni di riferimento sul giunto per portarlo su una traiettoria desiderata:



T_0 mi imporrà un valore di \ddot{q}_π tale da riavvicinarmi alla traiettoria desiderata (lungo la direzione in verde). Cioè quando sono in $q_d(t), \dot{q}_d(t)$, allora la accelerazione da impostare è semplicemente $\ddot{q}_d(t)$ che mi fa proseguire lungo la traiettoria desiderata; ma se sono in un punto $q(t), \dot{q}(t) \neq q_d(t), \dot{q}_d(t) \Rightarrow$ è accelerazione da imporre è quella di riferimento:

$$\ddot{q}_\pi = \ddot{q}_d + K_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_P(q_d - q) \rightarrow \text{cioè è accelerazione cambia in modulo e direzione.}$$

Legge di controllo proporzionale-derivativa, sull'accelerazione da imporre al robot. La μ_π impone che $\ddot{q} = \ddot{q}_\pi$. Impatto dalla operazione seguente:

OSS: La relazione: $\mu = B(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q})$ è il modello del robot mentre la relazione: $\mu_\pi = B(q)\ddot{q}_\pi + N(q, \dot{q})$ è un semplice calcolo. Operando la sostituzione di μ_π nel modello \Rightarrow

$$B(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = \mu_\pi = B(q)\ddot{q}_\pi + N(q, \dot{q}) \Rightarrow \Rightarrow B(q)\ddot{q} = B(q)\ddot{q}_\pi \Rightarrow \underbrace{B(q)}_{\text{matrice non singolare}}(\ddot{q} - \ddot{q}_\pi) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{q} = \ddot{q}_\pi}$$

Quindi la relazione implica che:

$$\ddot{q}_\pi = \ddot{q}_d + K_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_P(q_d - q) = \ddot{q} \Rightarrow \Rightarrow \ddot{q}_d - \ddot{q} + K_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_P(q_d - q) = 0 \Rightarrow \epsilon(t) = q_d - q$$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{\epsilon}(t) + K_D \dot{\epsilon}(t) + K_P \epsilon(t) = 0}$ Ho una dinamica dell'errore $\epsilon(t)$ lineare e stabile asintoticamente a cui posso assegnare gli autovalori. Doi

com $K_p, K_D > 0$. La eq. di dinamica dell'errore può essere suddivisa in m eq. scalari \Rightarrow gli errori di posizione, velocità ed accelerazioni relativi alla coordinata i -esima vengono governati da una eq. scalare analoga a quella settoriale evidenziata precedentemente: (K_p e K_D diagonali)

$$\ddot{\epsilon}_i + K_{D_i} \dot{\epsilon}_i + K_{P_i} \epsilon_i = 0 \quad \text{com } i = 1, \dots, m \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 + K_{D_i} \lambda + K_{P_i}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) =$$

$= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2 \rightarrow$ Posso assegnare la dinamica dell'errore su \forall coordinata (costanti di tempo assegnate) mediante il sistema di due equazioni in due incognite \rightarrow

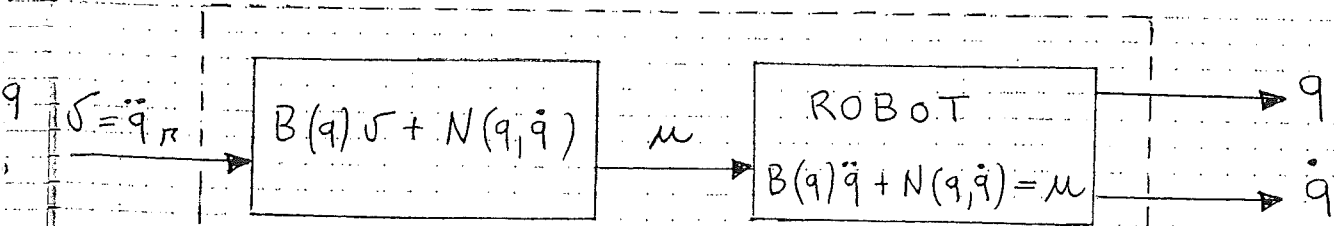
$$\begin{cases} K_{D_i} = -\lambda_1 - \lambda_2 \\ K_{P_i} = \lambda_1 \lambda_2 \end{cases}$$

OSS: Si possono assegnare le dinamiche dell'errore perché ho effettuato un controllo con dinamica imbenza (o controllo COMPUTED TORQUE a coppia calcolata) che compensa la dinamica non lineare del sistema. È il controllo che opera la linearizzazione esatta (mediante controreazione dallo stato) vista nel corso di ITSC in cui ho $v = \ddot{q}_r$. Se K_D e K_P sono matrici diagonali (come si è visto sopra) \rightarrow le dinamiche di \forall giunto non dipende dalle dinamiche degli altri giunti (controllo e linearizzante e disaccoppiante).

$$\text{OSS: } \begin{cases} \ddot{u} = f(u) + g(u)u \rightarrow u = \frac{1}{L_g L_f^{m-1} h} (v_i - L_f^m h) \\ y = h(u) \end{cases}$$

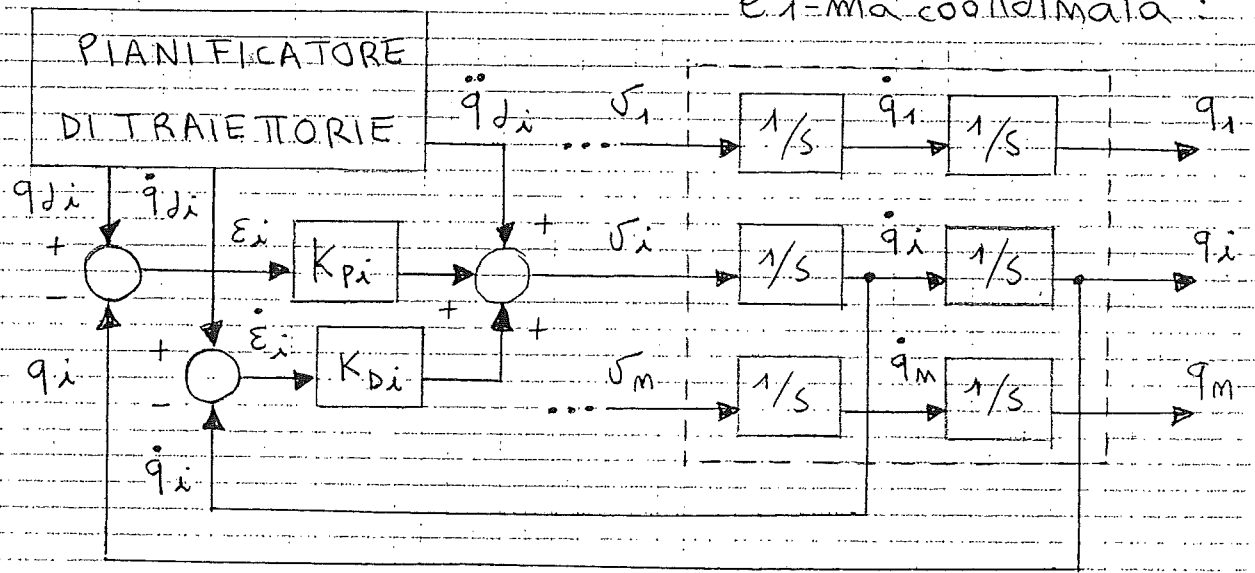
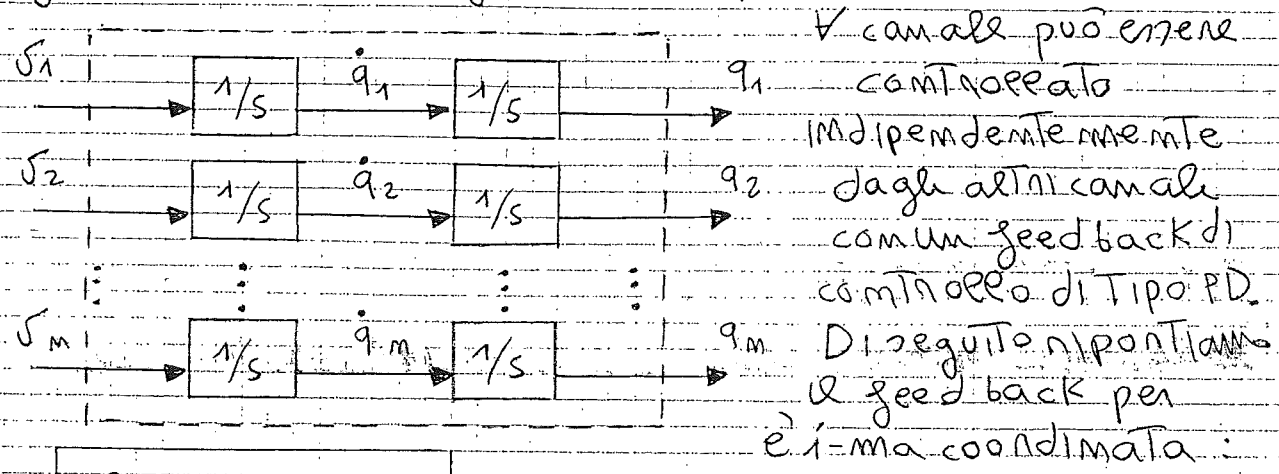
$$\text{com } y^{(m)} = v = -K_0 y - K_1 \dot{y} + \dots - K_{m-1} y^{(m-1)}$$

Lo schema a blocchi è il seguente, ricordando che quando si linearizza $v = \ddot{q}_r = \ddot{q} \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \ddot{q} = v$



Dove v è un vettore ad m componenti (m accelerazioni di riferimento)

Alimento). Risultano disaccoppiati i canali ingresso-uscita, cioè ho un sistema di m catene di doppi integratori, visto che il grado relativo di ogni uscita è pari a 2.



Questa è la situazione nell' H_p in cui si sta utilizzando il modello esatto del robot. Se il modello non è esatto è come se ci fosse un disturbo additivo = cioè in presenza di modello inesatto:

$$\ddot{\epsilon} + K_D \dot{\epsilon} + K_P \epsilon = d(t)$$

L'eq. differenziale stabile (quella omogenea vista precedentemente) è forzata dalla differenza $d(t)$ che esiste tra modello reale e quello disponibile.

Pb ①: Il modello completo del robot è:

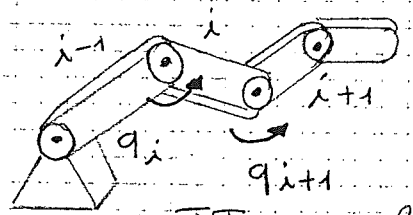
$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + d(q) + g(q) = u + J_K^T(q)F$$

Visto che i gradi di libertà n sono $5 \div 6$ o anche più, e $B(q)$ può essere molto complessa da calcolare per cui può non essere conveniente effettuare un controllo

di Tipo COMPUTED TORQUE (che fa uso del modello e subege
 che i calcoli in meca) = $\ddot{q}_i = \ddot{q}_d + K_D (\dot{q}_d - \dot{q}) + K_P (q_d - q)$

L'accelerazione di riferimento può essere calcolata in questo modo, ma questo non è il modo migliore di procedere. È un metodo alternativo chiamato → FORMULAZIONE DEL MODELLO dinamico secondo NEWTON-EULERO, secondo il quale si effettua un bilancio di forze e coppie al braccio e si scrivono le eq. che le legano alle velocità lineari ed angolari dei giunti stessi. Tali eq. possono essere risolte con un algoritmo ricorsivo (per il calcolo della dinamica inversa) detto

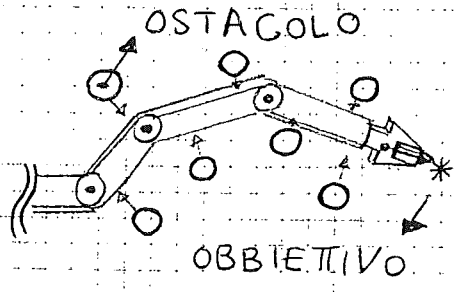
ALGORITMO DI LUH-WALKER-PAUL che agisce avanti ed indietro. Date le q, \dot{q}, \ddot{q} e la cinematica in avanti si trova le eq. della cinematica per ricavare posizione, velocità ed accelerazione del centro di massa: $\pi_{ci}, \dot{\pi}_{ci}$ ed $\ddot{\pi}_{ci}$, nonché ${}^0R_i, \omega_i$ ed $\dot{\omega}_i$. Se conosco tali informazioni per il braccio i , le posso usare per il braccio $i+1$. Se conosco lo stato di moto (q, \dot{q}) complessivo dell'accelerazione \ddot{q} , è algoritmo



restituisce il vettore di forze e coppie che produce quello stesso stato di moto. È un modello algoritmico che $(q, \dot{q}, \ddot{q}) \rightarrow \mu$. È più veloce del modello dinamico classico.

Mediante l'azione all'indietro, dall'effetto si deriva la causa come μ separandola dalle reazioni vincolari.

Pb ② GENERAZIONE DI TRAIETTORIE IN PRESENZA DI OSTACOLI

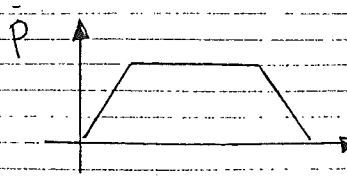


Il robot si muove tra gli ostacoli senza toccarli. Per fare questo il robot deve essere intelligente. Questo comportamento si realizza con un modello virtuale di molle attrattive per il punto di

intenzione e repulsive per gli ostacoli ⇒ il robot si muove in un campo di forze virtuale. Simile anche con i grafi.

Pb ③ GENERAZIONE DELLE LEGGI DI MOTO SULLA TRAIETTORIA

Il profilo che si tende ad utilizzare per le velocità è quello a trapezio tipico delle metropoli: accelerazione



costante, velocità costante e decelerazione di costante. È il SW dell'unità di governo del robot che gestisce il profilo della velocità. In fase di addestramento del

robot, ai valori \bar{a} e \bar{v} si possono applicare dei coefficienti di OVERRIDE JOG (JOG → addestramento). Nella fase di addestramento tutti i parametri sono scalati opportunamente con dei coefficienti di override.

Pb (4) CONTROLLO D'INTERAZIONE CON L'AMBIENTE

In un robot controllato con un sistema di controllo PD, lo spostamento che si riesce ad imporre dall'esterno mediante una forza F dipende dalla matrice di cedevolezza:

$$P_s - P_d = J_K(q_s) K_p^{-1} J_K^T(q_s) F$$

La matrice di cedevolezza è definita anche per robot nei Tangolani, e mi dà informazioni sullo spostamento costante del robot rispetto alla configurazione desiderata dovuto alla forza F applicata al robot stesso dall'esterno. Il robot si comporta come una molla con coefficiente di smorzamento finito. Tanto più grande è la relazione ai disturbi quanto più K_p è grande. Se il controllo è di tipo PID ⇒ si accumula l'errore di posizione per generare una coppia che reagisce alla F esterna cioè:

$u = \dots + K_I \int (q_d - q) dt$ ⇒ la cedevolezza finale è quindi nulla. In robotica avanzata non è previsto il controllo PID (si usa il PD) perché il robot diventa rigido e rompe ciò che gli è attorno (o se stesso). Nei compiti in cui è previsto un contatto con strutture o oggetti esterni è bene avere una cedevolezza elevata nelle direzioni in cui avremo i contatti e costante in funzione di q . È richiesto allora il controllo PD non nello spazio dei giunti ma in quello cartesiano. Si può fare solo quando il robot non è il dominante e la relazione $p = K(q)$ è biunivoca (ad esempio in certi sottospazi, ad esempio nelle configurazioni gomito su o in quelle gomito giù) ⇒ $q = K^{-1}(p)$ → si può pensare come un cambio

zione di coordinate. Definiamo il modello del robot nello spazio cartesiano
 no siamo:
$$\bar{B}(p)\ddot{p} + \bar{C}(p, \dot{p})\dot{p} + \bar{d}(q) + \bar{g}(p) = \bar{u} + F$$

del OSS: $J \rightarrow$ Tre coordinate di controllo
 di $J_k \rightarrow$ un altro modello prodotto dagli attuatori
 nel L'utilità di questa scelta deriva dal fatto che il controllo PD con compensazione esatta della gravità nello spazio cartesiano è:

$$\bar{u} = \bar{g}(p) + K_p(p_d - p) - K_D\dot{p}$$

nte la dimostrazione della stabilità di questo controllo è la stessa della versione analogica nello spazio dei giunti, mentre la matrice di cedevolezza è:

$$P_s - P_d = K_p^{-1} F$$

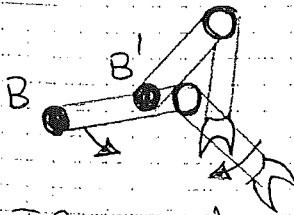
La cedevolezza K_p^{-1} è una matrice costante \mathbb{I} dalla configurazione q del robot.
ES: Se devo pungere un tavolo \Rightarrow le componenti z di K_p devono essere piccole (in modo da avere una grande cedevolezza lungo la direzione \perp al tavolo) mentre devono essere grandi lungo xy .

$$K_p = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Po posso così specificare una traiettoria che è 10 cm sotto il tavolo di modo che il robot schiacci sul tavolo con una forza di 1N mentre

para il pannello per pungere il tavolo steno \Rightarrow lo così una SELECTIVE COMPLIANCE (cedevolezza selettiva) \Rightarrow il controllo è effettuato nello spazio cartesiano.

Pb 5 Il modello dinamico visto finora non è più valido per la robotica spaziale perché se non \exists una posizione di riferimento fissa rispetto a cui muoversi, il robot muovendosi nello spazio muove anche la sua base (per la legge di conservazione della quantità di moto) in modo che il baricentro rimane invariato. Questo problema è risolvibile accoppiando le eq. dinamiche con quelle cinematiche in modo da tener conto di questi spostamenti, oppure utilizzando lo stesso modello visto finora, ma compensando i movimenti indesiderati (tenendo cioè la base fissa).

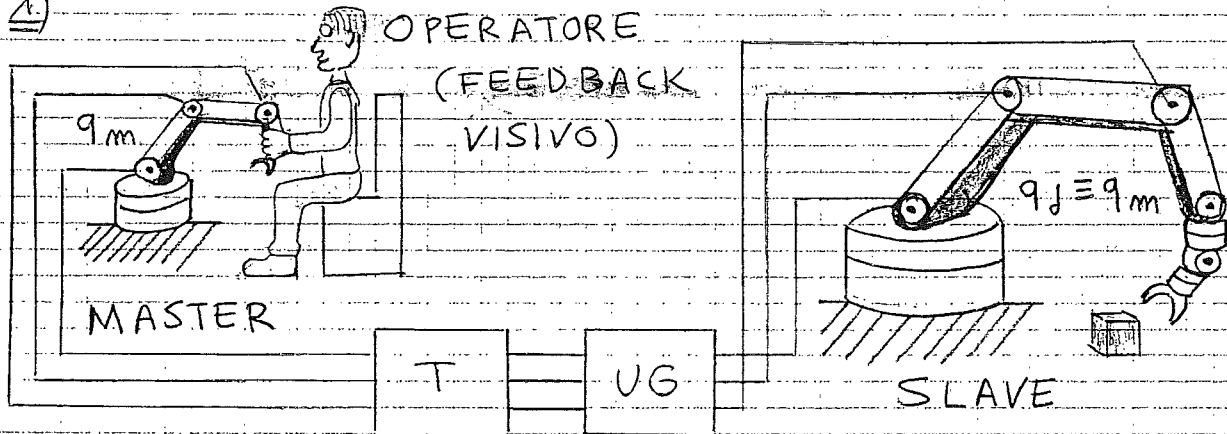


Il fatto che ho un controllo di anello, non devo curarmi dei
 simboli di matrici. Questo problema è sentito anche nei
 robot sottomarini (in questi robot \exists anche molti proble-
 mi di tipo tecnologico).

Pb ⑥ TELEROBOTICA \rightarrow TELEMANIPOLATORI

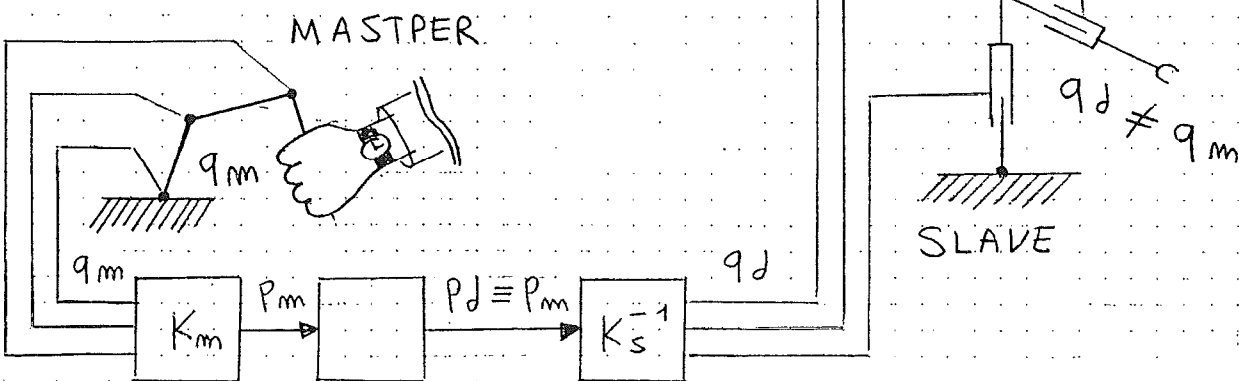
Un telemanipolatore è composto da un master più uno
 slave (questo è il robot studiato finora) con $M \equiv S$ oppure
 $M \neq S$. \exists Tre tipi di telemanipolatori:

1)



Nella telerobotica tradizionale il master è una riprodu-
 zione scalata dello slave ed inoltre $q_d \equiv q_m$ cioè la con-
 figurazione dello slave e quella del master sono sempre
 coincidenti. \exists problemi di generazione delle traiettoria
 (ci vuole un operatore con feedback visivo). Per i carichi
 pesanti $\alpha > 1$ ($M < S$) mentre nelle operazioni chirurgi-
 che $\alpha < 1$ ($M > S$).

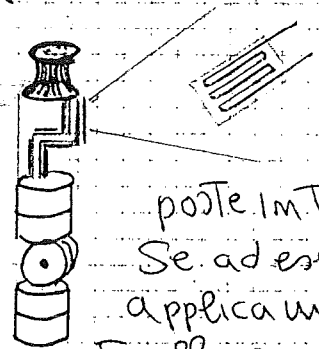
2) Non è strettamente necessario che il master abbia esat-
 ta forma dello slave



Anche se la geometria del master e dello slave è diversa,
 ciò che viene tradotta è solo la posizione cartesiana
 208

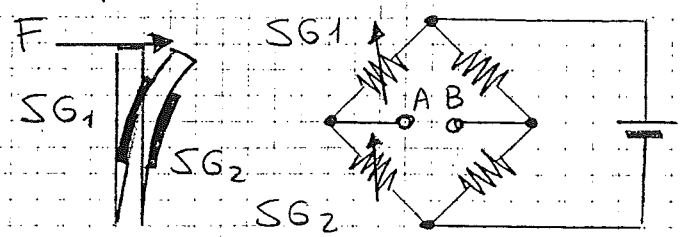
dell'end effector. La conoscenza delle cinematiche di master e slave dal dover utilizzare le stene geometriche. Anche in questo caso il feedback è di tipo visivo. Per lo studio della stabilità del sistema a ciclo chiuso è necessario modellare il comportamento dell'operatore (uomo) che fa parte dell'anello di reazione.

3) Master-Slave con riflessione di forza. Nei manipolatori si fa forza, l'operatore che manipola il master non si accorge e non sa se è l'ostacolo che lo slave incontra opponendo una forza più o meno elevata. Si mettono perciò sullo slave dei sensori di forza che lavorano per deflessione e variazione della costante elastica del materiale. Tale segnale prodotto viene trasmesso indietro al master ed applicato attraverso il Jacobiano trasposto: $J_m^T F_s$ ai motori montati sullo slave. Si utilizza un fattore β per scalare queste forze con $\beta < 1$ nelle operazioni che hanno a che fare con grandi forze e $\beta > 1$ nelle operazioni chirurgiche. La riduzione delle forze dà guoni β di stabilità (a causa dei ritardi di propagazione dei segnali (il feedback visivo è immediato mentre quello dinamico è ritardato). La f.d.t. del ritardo è $e^{-j\omega t}$ con modulo unitario e fase che decresce linearmente con ω . Se il controllo ha un $m_p = 60^\circ$, con la riduzione delle forze ed il ritardo di propagazione \Rightarrow si riduce m_p e si destabilizza e intero sistema controllato.



I sensori di coppia e di forza sono realizzati con delle STRAIN GAGE incollate in maniera opportuna e variano la loro resistenza a seconda che vengano poste in trazione o compresse.

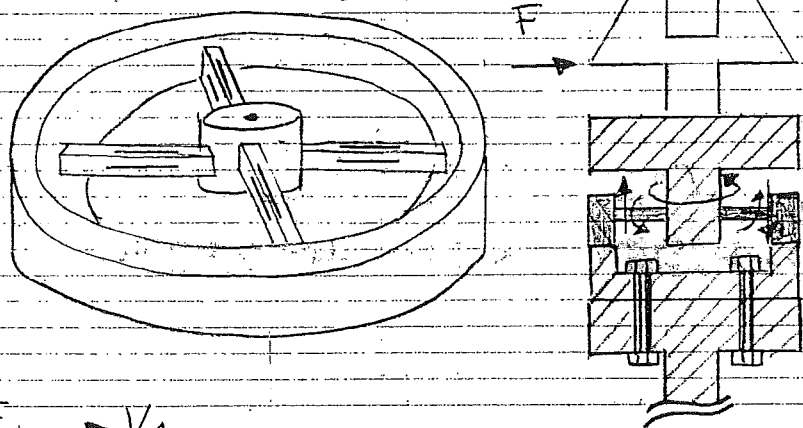
Se ad esempio si applica una forza F alla lamina a DX ho che la SG_1 aumenta la sua resistenza mentre la



o, SG_2 che è compressa e diminuisce $\Rightarrow V_{AB} \neq 0$ ed il segno di V_{AB} ci indica la direzione della forza. Per il resto è le

Le forze e le coppie si usano un sensore a croce di Malta con 16 strain gauge per misurare 6 forze (componenti) e la coppia applicata all'end-effector:

4 strain gauge V nazza della croce di Malta



Per identificare le forze e le coppie agenti in base al segnale misurato, applicando forze e coppie note si procede con un meccanismo di identificazione:

- $F_1 \rightarrow V_1$
- $F_2 \rightarrow V_2$
- $F_3 \rightarrow V_3$
- \vdots
- $F_m \rightarrow V_m$

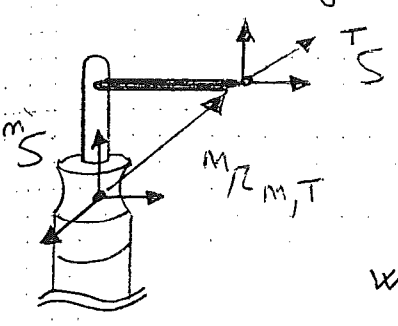
$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AV_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ AV_m \end{pmatrix}$$

È un legame lineare tra V ed F del tipo $F = AV$. Si ottiene un pb del tipo:

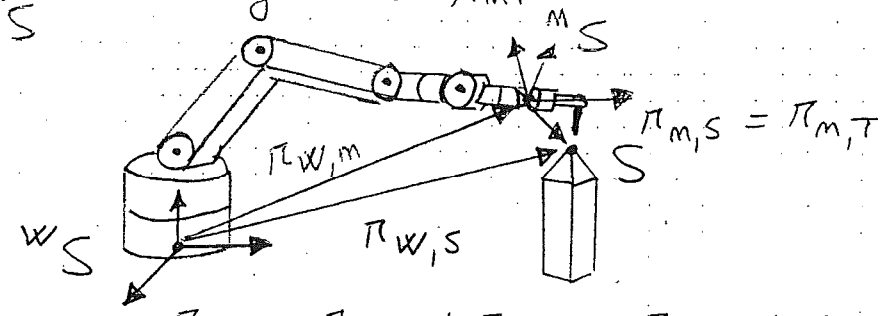
$b = S \pi$ dove π è un vettore che contiene tutte le colonne della matrice A una sotto l'altra.

⇒ risolto il pb con una pseudo inversa: $\pi = S^+ b$
 I master slave con il sensing di forza non sono molto usati. Non sono utilizzati in loop di controllo, ma solo per il monitoraggio delle forze di contatto. In futuro è inserirli in loop di controllo di forze ⇒ controllo simultaneo di posizione e forza.

La SOLUZIONE DEL EX DI CINEMATICA
 II) (proposto pag 30 del quaderno 2).



L'incognita è ${}^m \pi_{m,T}$



$${}^W \pi_{W,S} = {}^W \pi_{W,M} + {}^m \pi_{m,S} = {}^W \pi_{W,M} + {}^m \pi_{m,T}$$

Se con la punta del Tool (punto su S) $\Rightarrow {}^m \pi_{m,S} = {}^m \pi_{m,T}$
 L'operazione nel KUKA si effettua posizionando la punta del Tool in S con 4 differenti configurazioni: 4 config. giocabili si registrano orientamento delle Terme ${}^m S$ rispetto al mondo e posizione del centro geometrico cioè:

${}^W R_m(q_A), {}^W R_m(q_B), {}^W R_m(q_C), {}^W R_m(q_D)$ ed inoltre:
 ${}^W \pi_{Wm}(q_A), {}^W \pi_{Wm}(q_B), {}^W \pi_{Wm}(q_C), {}^W \pi_{Wm}(q_D)$ ovvero

le quattro matrici di rototraslazione:

$${}^W T_m(q_c) = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^W R_m(q_c) & {}^W \pi_{Wm}(q_c) & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} {}^W T_m(q_A) \\ {}^W T_m(q_B) \\ {}^W T_m(q_D) \end{array}$$

$${}^W \pi_{W,S} = {}^W T_m(q_A) \cdot {}^m \pi_{m,T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{{}^W \pi_{W,S} = {}^W R_m(q_A) \cdot {}^m \pi_{m,T} + {}^W \pi_{W,m}(q_A)} \quad \odot$$

\swarrow
 ${}^W \pi_{m,T}(q_A)$

La \odot insieme alle altre 3 analoghe per le altre config. giocabili, costituisce un sistema di 12 equazioni (3 v. equazione $\rightarrow A, B, C, D$) in sei incognite (coordinate di ${}^W \pi_{W,S}$ ed ${}^m \pi_{m,T}$).

$$\Rightarrow {}^W \pi_{W,m}(q_A) = {}^W \pi_{W,S} - {}^W R_m(q_A) \cdot {}^m \pi_{m,T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {}^W \pi_{W,m}(q_A) = [I_3; {}^W R_m(q_A)] \begin{bmatrix} {}^W \pi_{W,S} \\ \pi_{m,T} \end{bmatrix} \Rightarrow b_A = A_A x$$

classico pb di 3 eq. in 6 incognite.

In maniera vettoriale (compilando le altre 3 equazioni):

$$\begin{bmatrix} b_A \\ b_B \\ b_C \\ b_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_A \\ A_B \\ A_C \\ A_D \end{bmatrix} x$$

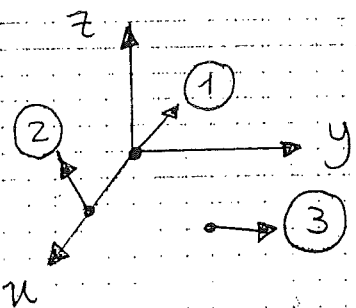
Mi riconduco a un sistema di 12 equazioni in 6 incognite che posso risolvere con la pseudo inversa della matrice A.

OSS: In generale $b = Ax + N$ perché $b \notin R(A)$, si risolve minimizzando la norma di $N \Rightarrow$

$$\hat{x} = A^+ b \text{ tale che } b = A\hat{x} + \hat{N} \text{ con}$$

$\|\hat{N}\|^2 = (b - A\hat{x})^T (b - A\hat{x})$ è minima. Il programma nel kuka in base a questo valore \hat{N} sceglie se la procedura di riferimento effettuata è corretta o meno. \exists anche un algoritmo per il calcolo del riferimento di base, che si basa sulla posizione del pallet. È sufficiente programmare un'unica volta il robot in una base per poi spostare il riferimento di base. Il procedimento per impostare S è:

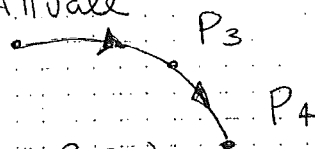
ISTRUZIONI DEL KUKA



PTP P1 (point to point motion, dal punto attuale a P1)

ELM P2 (lineare nel cartesiano dall'attuale a P2)

circ P3 P4 \rightarrow Attuale



Si possono specificare dei parametri come la massima velocità oppure programmare selezioni e cicli (if, while) ed avere input analogici o digitali if $in(3) = \emptyset$...

OSS: ROBOT MOBILI

AGV \rightarrow Automatic Guided Vehicles, portano imballaggi e materiali nelle fabbriche, oppure prodotti e 212

reguomo: percorsi indicati da fili elettrici interrati sotto
il pavimento. C'è un gestore software intelligente per
gestire incroci, richieste di pezzi ---

11):

2

no

si

mm

5

5

2

2

5

gio