TEORIA DEI SISTEMI: svolgimento dell'esercizio n. 2 del compito del 24/09/2009.

Esercizio 2. Si considerino i due sistemi lineari e stazionari a tempo continuo nella forma esplicita

$$x(t) = \Phi_a(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H_a(t,\tau)u(\tau)d\tau, \qquad \text{e} \qquad x(t) = \Phi_b(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H_b(t,\tau)u(\tau)d\tau,$$

dove

$$\Phi_a(t,t_0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} + e^{-2(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} \\ e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} + e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix}, \quad \Phi_b(t,t_0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} + e^{-2(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} + e^{-2(t-t_0)} \\ e^{-(t-t_0)} + e^{-2(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} + e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix},$$

$$H_a(t,\tau) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} + e^{-2(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}, \qquad H_b(t,\tau) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} + e^{-2(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} + e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}.$$

Utilizzando le proprietà della matrice di transizione dello stato e della matrice delle risposte impulsive dello stato, individuare quale delle due formule esplicite rappresenta un sistema (e quale no), e se ne trovi una rappresentazione in forma implicita (matrici A e B).

Soluzione. Innanzitutto, poiché le matrici $\Phi(t,t_0)$ dipendono da $t-t_0$, e le matrici $H(t,\tau)$ dipendono da $t-\tau$ si vede subito che *potebbero definire* sistemi stazionari. Possiamo quindi scrivere:

$$\Phi_a(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad \Phi_b(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-2t} & e^{-t} + e^{-2t} \\ e^{-t} + e^{-2t} & e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix},$$

$$H_a(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}, \qquad H_b(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-2t} \\ e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Per quanto riguarda le matrici di transizione occorre verificare le proprietà di semigruppo:

$$\Phi(0) = I, \qquad \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_1 + t_2).$$

Si vede subito che $\Phi_a(0) = I$, mentre $\Phi_b(0) \neq I$. Pertanto $\Phi_b(t)$ e $H_b(t)$ NON definiscono un sistema. È facile poi verificare che $\Phi_a(t_1)\Phi_a(t_2) = \Phi_a(t_1 + t_2)$, e pertanto $\Phi_a(t)$ definisce una matrice di transizione.

Per quanto riguarda la matrice delle rsposte impulsive dello stato $H_a(t)$, occorre verificare che

$$\Phi_a(t_1)H_a(t_2) = H_a(t_1 + t_2).$$

Per quanto riguarda il calcolo di A e B si ha

$$A = \frac{d\Phi_a(t)}{dt}\Big|_{t=0}, \qquad B = H_a(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

e quindi $$A = \frac{d\Phi_a(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -e^{-t} - 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}_{t=0} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1-2 & -1+2 \\ -1+2 & -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

INVECE di svolgere le due verifiche $\Phi_a(t_1)\Phi_a(t_2) = \Phi_a(t_1 + t_2)$ e $\Phi_a(t_1)H_a(t_2) = H_a(t_1 + t_2)$, si sarebbe potuto procedere prima al calcolo di A e B e poi verificare che $\Phi_a(t) = e^{At}$ e $H_a(t) = e^{At}B$. A questo scopo, si comincia con il calcolare gli autovalori:

$$|\lambda I - A| = \left|\begin{bmatrix} \lambda + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda + \frac{3}{2} \end{bmatrix}\right| = \left(\lambda + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

da cui $$|\lambda I - A| = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\lambda + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda + 3/2 = \pm 1/2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -3/2 \pm 1/2 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -2. \end{matrix}$$

Si noti che i due autovalori calcolati corrispondono alle leggi di moto e^{-t} e e^{-2t} presenti nella $\Phi_a(t)$. Gli autovettori e la decomposizione spettrale $e^{At})e^{-t}u_1v_1^T + e^{-2t}u_2v_2^T$ sono:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_1^T = \frac{1}{2}[1 \quad 1], \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; v_2^T = \frac{1}{2}[1 \quad -1], \quad e^{At} = e^{-t}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + e^{-2t}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \Phi_a(t).$$

La verifica che $H_a(t) = e^{At}B$ è immediata.