TEORIA DEI SISTEMI

Compito scritto del 10/02/2011

Esercizio 1. Disegnare i diagrammi di Bode e il diagramma polare della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{1}{s(s^2 - 3s + 2)}$$

Si ponga il sistema in controreazione unitaria, con un guadagno variabile K in catena aperta. Si discuta la stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso e si calcoli il numero di poli a parte reale positiva al variare di $K \in \mathbb{R}$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario a **tempo continuo**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

i) Discutere le proprietà dei modi naturali;
ii) calcolare la funzione di trasferimento e la risposta del sistema al gradino unitario;
iii) calcolare l'evoluzione dell'uscita del sistema, eccitato dall'ingresso $u(t) = \sin(3t)$, e a partire dallo stato iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Esercizio 3. Sia dato il seguente sistema lineare stazionario tempo-discreto:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t), \qquad x(0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Calcolare una trasformazione di coordinate che decomponga la matrice A a blocchi di Jordan;
ii) calcolare la potenza di matrice A^t;
iii) calcolare per quali valori dello stato iniziale x_0, l'evoluzione libera dell'uscita è pari a $y_l(t) = (-1)^t$.

Esercizio 4. Sia dato il seguente sistema lineare a tempo continuo stazionario rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i) Si discutano le proprietà strutturali del sistema e si calcoli una base dello spazio degli stati inosservabili ed una base dello spazio degli stati raggiungibili.
ii) si dica (motivando la risposta) se i seguenti vettori dello spazio di stato sono raggiungibili e/o osservabili:

$$x_1 = [1\ 0\ 0\ 0]^T, \quad x_2 = [0\ 1\ 0\ 0]^T \quad x_3 = [0\ 0\ 1\ 0]^T, \quad x_4 = [0\ 0\ 0\ 1]^T, \quad x_5 = [1\ 0\ 1\ 0]^T$$

iii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati raggiungibili e non raggiungibili;
iv) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati osservabili e inosservabili;
v) si determini un cambiamento di coordinate che decomponga il sistema in forma canonica di Kalman, se ne individui la rappresentazione in forma minima e se ne calcoli la funzione di trasferimento.

NB:

- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi (9 CFU)" svolgano i punti 1), 2), 4-i), 4-ii)**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi I (6 CFU)" svolgano i punti 1), 2)**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi II (6 CFU)" svolgano i punti 3), 4)**

TEMPO A DISPOSIZIONE (PER TUTTI): 2 ORE – LIBRI CHIUSI.