TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 12-06-2012

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = \frac{K}{(s+4)^2(s^2+256)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli per quali valore della pulsazione ω la fase di $W(j\omega)$ è pari a 0 e a $\pm\pi$;
4. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Dato il seguente sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Un } \textit{aiutino}\text{: la matrice}\\ \text{degli autovettori destri è:}\\ U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & -j \end{bmatrix}\end{array}\right]$$

se ne calcoli l'evoluzione libera dell'uscita a partire dallo stato iniziale $x(0) = [0 \;\; 1 \;\; 1]^T$.

Problema 3. Dato il sistema a tempo continuo caratterizzato dalla seguente riposta impulsiva

$$w(t) = 2\,e^{-3t},$$

1. si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(2t)$;
2. si calcoli per quale valore di pulsazione ω una sinusoide in ingresso subisce uno sfasamento di $-\pi/2$.

Problema 4. Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si trovi una base per lo spazio degli stati raggiungibili $\mathcal{P}$, una base per lo spazio degli stati inosservabili $\mathcal{Q}$ ed una base per l'intersezione $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

Problema 5. Siano dati i due sistemi

$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2 \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{x_1}{1+x_2^2}, \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2 \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{x_1}{1+x_2^2}. \end{cases}$$

Si studi la stabilità dell'origine di entrambi
(*suggerimento per la funzione di Liapunov:* $V(x) = x_1^2 + \beta\, x_2^2 + \gamma\, x_2^4$*, con* α *e* γ *positivi da determinarsi.*)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.

Gli studenti del corso di Teoria dei Sistemi I (6 CFU) devono rispondere ai quesiti 1, 2 e 3.
