TEORIA DEI SISTEMI
Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 26-06-2013

Problema 1. Si considerino due distinti sistemi di controllo a feedback unitario, caratterizzati dalle seguenti funzioni di trasferimento in catena diretta

$$W_1(s) = K_1 \frac{s-1}{s^2+4\,s+4}, \qquad W_2(s) = K_2 \frac{s-1}{s^2+4},$$

1. Si disegnino i diagrammi di Bode e i diagrammi polari delle due funzioni di trasferimento per $K_1 = K_2 = 1$;
2. si calcolino i denominatori della due funzioni di trasferimento a ciclo chiuso;
3. per **una** delle due funzioni di trasferimenti (a scelta) si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K_i \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh;

Problema 2. Sia dato il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. Si calcoli la matrice di transizione dello stato;
3. Si calcolino la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso-uscita;
4. Si trovi una coppia (B, C) tale da rendere un modo naturale osservabile ma non raggiungible.

Problema 3. Dato il sistema a tempo continuo caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(t) = 3e^{-t} - e^{-2t}.$$

Se ne calcoli la funzione di trasferimento. Inoltre, dato l'ingresso $u(t) = \sin(2\,t)$, si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica del sistema.

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si trovi una base per lo spazio degli stati raggiungibili e una base per lo spazio degli stati inosservabili. Inoltre, si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman.

Problema 5. Sia dato un sistema a tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ed una funzione quadratica $V(x) = \frac{1}{2}x^T Px$ con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \text{e} \qquad P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si verifichi che l'origine è asintoticamente stabile e che la $V(x)$ è una funzione di Lyapunov.
(*Suggerimento: per stabilire se una matrice è definita positiva si utilizzi il criterio di Sylvester.*)

Problema 6. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^2 + (1-\alpha)x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha\, x_2 + x_1 \end{cases}$$

Se ne calcolino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.

Risolvere almeno 5 dei 6 problemi assegnati.
