

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani
Compito d'esame del 09-09-2014

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K 10 \frac{(s-1)}{(s+5)^2}.$$

1. Se ne disegnano i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli per quali valori della pulsazione ω la fase di $W(j\omega)$ è esattamente pari a 0;
4. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato un sistema a tempo discreto $x(t+1) = Ax(t)$ ed un sistema a tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t)$ aventi la stessa matrice $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, caratterizzata da una coppia di autovalori complessi coniugati: $\lambda_1 = \sqrt{3}/4 + j/4$, $\lambda_2 = \sqrt{3}/4 - j/4$. L'autovettore destro r_1 e l'autovettore sinistro ℓ_1 associati all'autovalore λ_1 sono, rispettivamente:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ j \end{bmatrix} \quad \ell_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{j}{2} \end{bmatrix}$$

1. Si calcolino la matrice A , e le matrici di transizione A^t e e^{At} dei due sistemi;
2. Si discuta la stabilità dei modi naturali dei due sistemi.

Problema 3. Sia dato il seguente sistema a tempo discreto, dove $u(t)$, $x(t)$ e $y(t)$ sono scalari:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= 0.2x(t) + 0.1u(t), \\ y(t) &= 2x(t), \end{aligned}$$

Si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos((\pi/2)t)$.

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ -1]$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 , \mathcal{X}_3 e \mathcal{X}_4 della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si calcoli uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale che negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2, 3$ l'evoluzione libera dell'uscita sia pari a $y(0) = y(1) = 0$, $y(2) = y(3) = 6$.

Problema 5. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (\alpha - 1)(3x_2(t) + 5x_1(t)x_2^2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = \alpha x_2(t) + x_1(t) + (\alpha - 1)x_2^3(t) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, 0)$ al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio, ed eventualmente il metodo di Lyapunov.
(Suggerimento: si ricordi che per studiare il segno delle radici di un polinomio non è necessario calcolarle in modo esplicito.)