TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 15-07-2015

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K\,\frac{12\,(s-3)}{s(s^2+6s+36)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Dato un sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con autovalori $\lambda_1 = 1 + j$, $\lambda_2 = 1 - j$ e matrice degli autovettori destri $R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ j & -j \end{bmatrix}$.

1. Si calcolino la matrice A e la matrice di transizione dello stato A^t;
2. si discutano la stabilità, l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi naturali del sistema;
3. si calcolino la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento $W(z)$.

Problema 3. Sia dato un sistema a tempo continuo a un ingresso ed un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(t) = 3\,e^{-2t}.$$

Si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica (se esiste) all'ingresso $u(t) = \cos(2t)$.

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si forniscano, se esistono (motivare la risposta), un ingresso che porti lo stato da $x(0) = [0\ 0\ 0\ 0]^T$ a $x(1) = [0\ 0\ 0\ 1]^T$ e un ingresso che porti lo stato da $x(0) = [0\ 0\ 0\ 0]^T$ a $x(1) = [1\ 0\ 0\ 0]^T$.

Problema 5. Si studi la stabilità dell'origine dello spazio di stato del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 3x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

utilizzando il metodo di Lyapunov con $V(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + \alpha x_1 x_2$.

In particolare:

1. Determinare l'intervallo dei valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ che rendono $V(x)$ definita positiva;
2. determinare un valore di α che consenta di dimostrare la stabilità dell'origine del sistema.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
