

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Soluzioni del compito d'esame del 15-07-2015

A cura di V. De Iuliis¹

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K \frac{12(s-3)}{s(s^2+6s+36)}.$$

1. Se ne disegnano i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Svolgimento.

Per $K = 1$ la funzione di trasferimento da graficare è $\widetilde{W}(s) = \frac{12(s-3)}{s(s^2+6s+36)}$.

È facile riconoscere i seguenti termini:

- $(s-3) = -3(1 - \frac{s}{3}) \implies \omega_\tau = 3 \text{ rad/s}$ termine binomio al numeratore; esso contribuisce al diagramma dei moduli mediante una pendenza di $+20 \text{ dB/dec}$ a partire da ω_τ , mentre nel diagramma delle fasi genera una pendenza di $-\pi/4 \text{ rad/s}$ nell'intervallo $[0.1\omega_\tau, 10\omega_\tau]$.
- s , termine monomio al denominatore; contribuisce al diagramma dei moduli con una pendenza di -20 dB/dec da 0 rad/s in poi, mentre contribuisce al diagramma delle fasi mediante uno sfasamento globale del diagramma di $-\pi/2 \text{ rad}$.
- $s^2 + 6s + 36 = 36(1 + \frac{2\frac{1}{2}s}{6} + \frac{s^2}{6^2}) \implies \omega_n = 1 \text{ rad/s}$, $\zeta = 1/2$, termine trinomio smorzato al denominatore, la cui presenza si traduce in una pendenza di -40 dB/dec da ω_n in poi sul diagramma dei moduli, e in un'azione che può essere descritta con varie approssimazioni per quanto concerne il diagramma delle fasi; una prima approssimazione consiste nel considerare una pendenza di $-\pi/2 \text{ rad/dec}$ nell'intervallo $[0.1\omega_n, 10\omega_n]$. Un'approssimazione più precisa consiste nel calcolare le pulsazioni in corrispondenza delle quali l'errore di approssimazione del diagramma asintotico è minimo: ω_n/α , $\omega_n \cdot \alpha$, simmetriche rispetto a ω_n e ottenibili calcolando $\alpha = 5\zeta + \sqrt{25\zeta^2 + 1}$. Si ha: $\alpha \approx 5.2 \implies \omega_n/\alpha = 1.15 \text{ rad/s}$, $\omega_n \cdot \alpha = 31.2$, e la pendenza del diagramma asintotico nell'intervallo $[\omega_n/\alpha, \omega_n \cdot \alpha]$ è pari a $(-)\frac{\pi}{2\log_{10}(\alpha)} = -2.20 \text{ rad/dec}$.

Possiamo allora riscrivere la funzione di trasferimento $\widetilde{W}(s)$ come

$$\widetilde{W}(s) = -1 \frac{1 - \frac{s}{3}}{s(1 + \frac{s}{6} + \frac{s^2}{36})}.$$

che mette in evidenza il guadagno di $\widetilde{W}(s)$, pari a $K_W = -1$, che nel diagramma dei moduli non causa traslazioni globali ($20 \log_{10} |-1| = 0 \text{ dB}$), ma genera invece uno sfasamento uniforme

¹Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica – vittorio.deiuliis@graduate.univaq.it

di $\pm\pi$ nel diagramma delle fasi (scegliamo $+\pi$ per comodità grafica essendo presente anche lo sfasamento del termine monomio al denominatore, pari a $-\pi/2$). Prima di procedere al tracciamento dei diagrammi, occorre fare altre due osservazioni importanti: innanzitutto, il termine trinomio con smorzamento $1/2$ al denominatore non genera rilevanti scostamenti del diagramma reale rispetto al diagramma asintotico dei moduli in corrispondenza di ω_n , mentre è necessario prestare attenzione al fatto che utilizzando l'approssimazione più grossolana (segmento di pendenza $-\pi/4$ rad/dec in $[0.1\omega_n, 10\omega_n]$) l'imprecisione del diagramma asintotico va quantomeno corretta ad occhio nel tracciamento del grafico finale; inoltre, essendo nullo il guadagno $|K_W|_{dB}$ il diagramma dei moduli passa per il punto $(\omega, |W(j\omega)|_{dB}) = (1 \text{ rad/s}, 0 \text{ dB})$.

Quanto ottenuto è riepilogato dalle seguenti tabelle:

Intervallo	Pendenza
$\omega < 3 \text{ rad/s}$	-20 dB/dec
$3 \text{ rad/s} < \omega < 6 \text{ rad/s}$	0 dB/dec
$6 \text{ rad/s} < \omega$	-40 dB/dec

Tabella 1: Descrizione dei diagrammi di Bode asintotici del modulo di $\widetilde{W}(s)$.

Intervallo	Pendenza	Intervallo	Pendenza
$\omega < 0.3 \text{ rad/s}$	0 rad/dec	$\omega < 0.3 \text{ rad/s}$	0 rad/dec
$0.3 \text{ rad/s} < \omega < 0.6 \text{ rad/s}$	$-\pi/4 \text{ rad/dec}$	$0.3 \text{ rad/s} < \omega < 1.15 \text{ rad/s}$	$-\pi/4 \text{ rad/dec}$
$0.6 \text{ rad/s} < \omega < 30 \text{ rad/s}$	$-3\pi/4 \text{ rad/dec}$	$1.15 \text{ rad/s} < \omega < 30 \text{ rad/s}$	-3 rad/dec
$30 \text{ rad/s} < \omega < 60 \text{ rad/s}$	$-\pi/2 \text{ rad/dec}$	$30 \text{ rad/s} < \omega < 31.2 \text{ rad/s}$	-2.20 rad/dec
$60 \text{ rad/s} < \omega$	0 rad/dec	$31.2 \text{ rad/s} < \omega$	0 rad/dec

Tabella 2: Descrizione dei diagrammi di Bode asintotici della fase di $\widetilde{W}(s)$ ottenuti utilizzando l'approssimazione di primo ordine (a sinistra) e quella di secondo ordine (a destra).

Osservando con attenzione gli andamenti combinati dei diagrammi di Bode (Figura 1) è possibile tracciare il diagramma polare di $\widetilde{W}(s)$. Occorre prestare particolare attenzione alla chiusura all'infinito, che va sempre tracciata in modo da essere percorsa in senso orario. Il diagramma polare è riportato in Figura 2.

I punti 2 e 3 del problema riguardano lo studio della stabilità del sistema controeazionato, al variare di K . La funzione di trasferimento a ciclo chiuso è data da:

$$W_{CH}(s) = \frac{W_{AP}(s)}{1 + W_{AP}(s)} = \frac{K\widetilde{W}(s)}{1 + K\widetilde{W}(s)} = \frac{K \cdot \frac{12(s-3)}{s(s^2+6s+36)}}{\frac{s(s^2+6s+36)+K \cdot 12(s-3)}{s(s^2+6s+36)}} = \frac{K \cdot 12(s-3)}{s(s^2+6s+36) + K \cdot 12(s-3)}$$

Indicato allora con $d_{CH}(s)$ il denominatore di $W_{CH}(s)$, si ha

$$d_{CH}(s) = s^3 + 6s^2 + (36 + 12K)s - 36K.$$

La stabilità del sistema controeazionato dipende, al variare di K , dalla posizione dei poli di $d_{CH}(s)$: per avere stabilità asintotica essi devono trovarsi tutti nel semipiano complesso negativo (\mathbb{C}^-). Il criterio di Nyquist lega la stabilità del sistema controeazionato allo studio del diagramma del sistema a catena aperta (o diretta) al variare di K . Al contrario, il criterio di Routh permette di studiare il segno delle radici di un polinomio senza calcolarle direttamente, e può dunque essere applicato a $d_{CH}(s)$ per sancire la stabilità del sistema controeazionato.

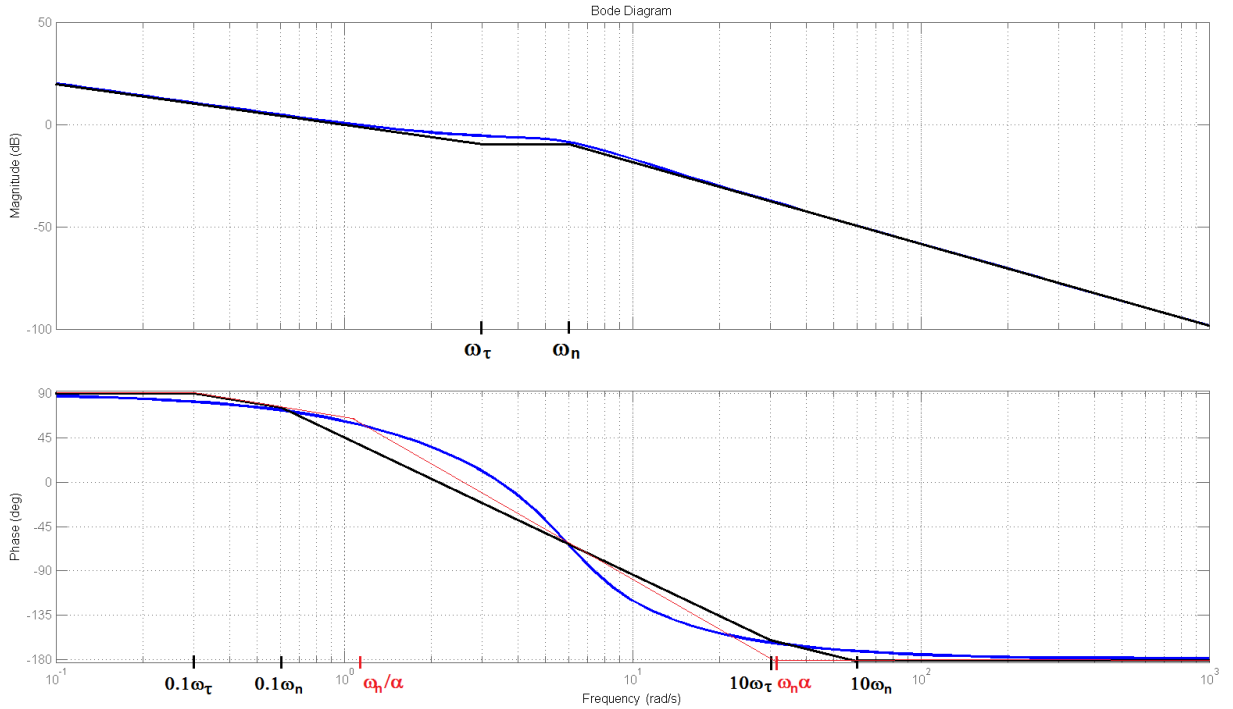


Figura 1: Diagrammi di Bode di $\widetilde{W}(s)$: in nero e rosso gli andamenti asintotici, in blu l'andamento reale.

La formula del criterio di Nyquist è la seguente:

$$P_{CH} = P_{AP} - N \quad (1)$$

dove P_{CH} e P_{AP} sono, rispettivamente, il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso e aperto, e N è il numero di giri compiuti dal diagramma attorno al punto "critico" contati positivi in senso *antiorario* (dunque i giri orari vanno considerati negativi).

Poiché $W_{AP}(s) = \frac{K \cdot 12(s-3)}{s(s^2+6s+36)}$ non ha alcun polo a parte reale positiva (ha un polo a parte reale nulla, $p_1 = 0$, e due poli complessi coniugati a parte reale negativa, $p_{2,3} = -3 \pm j \cdot 3\sqrt{3}$), segue subito che $P_{AP} = 0$. Il diagramma polare di W_{AP} al variare di $K > 0$ è ottenibile immaginando di ingrandire o rimpicciolire la scala del diagramma in Figura 1 (il diagramma di $\widetilde{W}(s)$ è semplicemente il diagramma di $W_{AP}(s)$ per $K = 1$): è dunque evidente che qualsiasi sia $K > 0$, il diagramma è sempre esterno al punto critico $-1 + j0$, che peraltro è sempre interno alla chiusura all'infinito ($N = -1$). Al contrario, per $K < 0$ il diagramma polare, per effetto del guadagno negativo, ruota di π attorno all'origine, e diviene quello rappresentato in Figura 3. In questo caso, al variare di $K < 0$, sono possibili due situazioni:

- **A**, il punto critico è esterno al tracciato del diagramma e non è circondato da alcuna chiusura all'infinito ($N = 0$);
- **B**, il punto critico è interno al diagramma, che compie due giri in senso orario attorno ad esso ($N = -2$).

Occorre determinare il preciso valore di $K < 0$ che separa le due situazioni. Per farlo, è necessario innanzitutto calcolare per quali pulsazioni ω^* il diagramma di $\widetilde{W}(j\omega)$ attraversa l'asse reale,

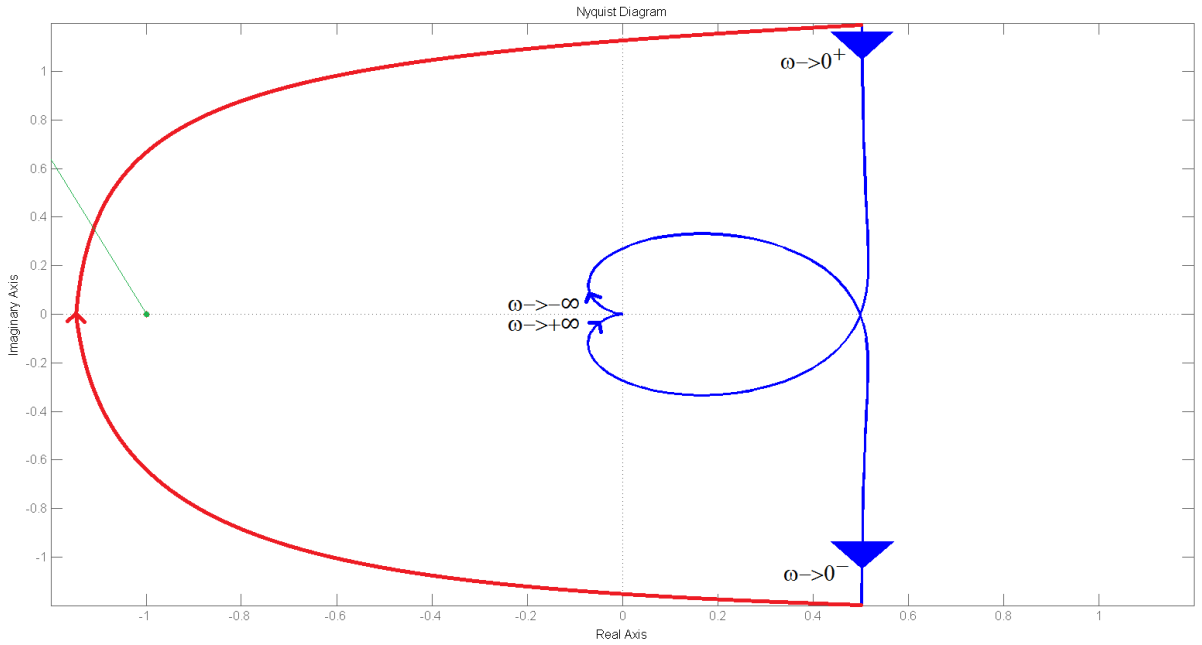


Figura 2: Diagramma polare di $\widetilde{W}(s)$.

risolvendo l'equazione $Im \left\{ \widetilde{W}(j\omega) \right\} = 0$. Una volta ottenute tali pulsazioni, è facile calcolare quanto valga $|W_{AP}(j\omega^*)|$ al variare di K , e determinare dunque per quali valori di K il punto critico è dentro o fuori il diagramma.

Si ha:

$$Im \left\{ \widetilde{W}(j\omega) \right\} = 0 \iff Im \left\{ \frac{12(j\omega - 3)}{j\omega(-\omega^2 + 6j\omega + 36)} \right\} = Im \left\{ \frac{12(j\omega - 3)}{-6\omega^2 - j(\omega^3 - 36\omega)} \right\} = 0$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato di quest'ultimo, otteniamo:

$$Im \left\{ \frac{12(j\omega - 3) \cdot [-6\omega^2 + j(\omega^3 - 36\omega)]}{[-6\omega^2 - j(\omega^3 - 36\omega)] \cdot [-6\omega^2 + j(\omega^3 - 36\omega)]} \right\} = 0$$

Chiaramente, il denominatore così ottenuto è reale, e possiamo trascurarlo nella risoluzione dell'equazione $Im(\cdot) = 0$, al pari del fattore 12 che moltiplica tutto il numeratore. Otteniamo:

$$Im \left\{ (j\omega - 3) \cdot [-6\omega^2 + j(\omega^3 - 36\omega)] \right\} = Im \left\{ (-6j\omega^3 - \omega^4 + 36\omega^2 + 18\omega^2 - 3j\omega^3 + 108j\omega) \right\} = 0$$

Da cui, estraendo le sole componenti immaginarie, si ha l'equazione:

$$-9\omega^3 + 108\omega = 0 \iff \omega(\omega^2 - 12) = 0.$$

Scartando la soluzione nulla otteniamo le pulsazioni di attraversamento del diagramma di $\widetilde{W}(j\omega)^2$: $\omega^* = \pm 2\sqrt{3}$.

²Non sorprenda la presenza delle pulsazioni negative: come noto, il diagramma di Nyquist per le pulsazioni negative si ottiene semplicemente specchiando quello per le pulsazioni positive rispetto all'asse reale, dunque ad ogni attraversamento del primo diagramma corrisponde un attraversamento del secondo.

Calcoliamo subito il modulo di $\widetilde{W}(j\omega^*)$ con $\omega^* = 2\sqrt{3}$:

$$\widetilde{W}(j\omega^*) = \frac{12|j\omega^* - 3|}{|j\omega^*| \cdot |-\omega^{*2} + 6j\omega^* + 36|} = \frac{12\sqrt{12+9}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{(36-12)^2 + (6 \cdot 2\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}.$$

Sappiamo già che per $K > 0$ il punto $-1 + j0$ è sempre esterno al diagramma. Per $K < 0$ è sufficiente calcolare per quali valori di guadagno il modulo di W_{AP} è inferiore (o superiore) a 1, ciò si ottiene risolvendo:

$$\begin{cases} |K| \cdot |\widetilde{W}(j\omega^*)| < 1 \\ K < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -K < \frac{1}{|\widetilde{W}(j\omega^*)|} = 2 \\ K < 0 \end{cases} \iff -2 < K < 0.$$

Dunque se $K \in (-2, 0)$ siamo nella situazione **A** di Figura 3, altrimenti siamo nel caso **B**.

Riassumiamo tutte le informazioni a nostra disposizione applicando il criterio di Nyquist:

- per $K > 0$:
 $P_{CH} = P_{AP} - N = 0 - (-1) = 1$, W_{CH} ha 1 polo a parte reale positiva \implies instabilità.
- per $K \in (-2, 0)$:
 $P_{CH} = P_{AP} - N = 0 - 0 = 0$, W_{CH} non ha poli a parte reale positiva \implies stabilità;
- per $K < -2$:
 $P_{CH} = P_{AP} - N = 0 - (-2) = 2$, W_{CH} ha due poli a parte reale positiva \implies instabilità.

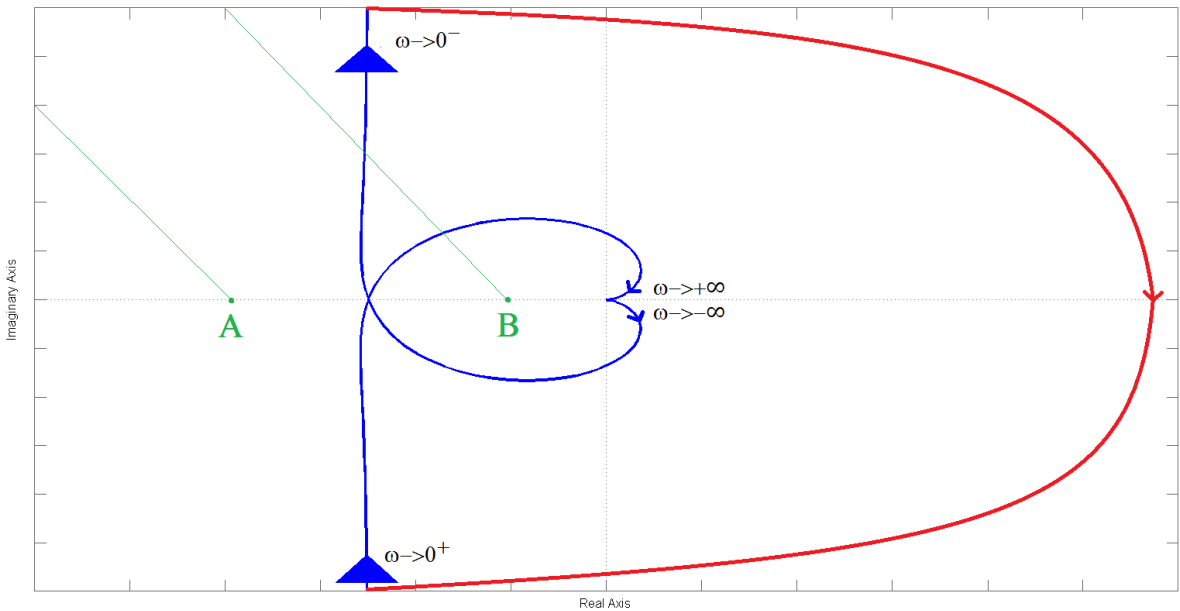


Figura 3: Diagramma polare di $W_{AP}(s)$ per $K < 0$.

Alle stesse conclusioni si arriva applicando il criterio di Routh al polinomio $d_{CH}(s) = s^3 + 6s^2 + (36 + 12K)s - 36$. Costruiamo la tabella:

$$\begin{array}{l|l}
3 & 1 \qquad 36 + 12K \\
2 & 6 \qquad -36K \\
1 & \frac{-36K - 6(36 + 12K)}{-6} \\
0 & -36K
\end{array}$$

semplifichiamo ora la frazione presente nella riga 1 e, per semplicità, dividiamo la riga 0 per 36 (si può sempre moltiplicare una riga per un coefficiente positivo):

$$\begin{array}{l|l}
3 & 1 \qquad 36 + 12K \\
2 & 6 \qquad -36K \\
1 & 18K + 36 \\
0 & -K
\end{array}$$

Chiaramente possiamo semplificare ulteriormente la riga 1 dividendola per 18. Dovremo dunque studiare il segno della prima colonna della tabella:

$$1 \qquad 6 \qquad K + 2 \qquad -K.$$

A questo punto è chiaro che per $K > 0$ si ottiene una sola variazione di segno (tra $K + 2$ e $-K$), per $K \in (-2, 0)$ si ottengono tutti coefficienti positivi, dunque nessuna variazione di segno, e infine per $K < -2$ si hanno due variazioni di segno (tra 6 e $K + 2$ e tra $K + 2$ e $-K$). Poiché ogni variazione di segno corrisponde a una radice a parte reale positiva in $d_{CH}(s)$, ciò conferma esattamente quanto trovato in precedenza con il criterio di Nyquist: si ha stabilità solo scegliendo $K \in (-2, 0)$ e instabilità per ogni altra scelta di $K \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

Problema 2. Dato un sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

con autovalori $\lambda_1 = 1 + j$, $\lambda_2 = 1 - j$ e matrice degli autovettori destri $R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ j & -j \end{bmatrix}$.

1. Si calcolino la matrice A e la matrice di transizione dello stato A^t ;
2. si discutano la stabilità, l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi naturali del sistema;
3. si calcolino la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento $W(z)$.

Svolgimento.

Per calcolare A va ricordato che essa è esprimibile in funzione degli autovalori e degli autovettori mediante la decomposizione spettrale. Dette R e $L = R^{-1}$ le matrici degli autovettori destri e sinistri, rispettivamente, e Λ la matrice diagonale degli autovalori, si ha, se A è diagonalizzabile:

$$A = R\Lambda L = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot r_i \cdot l_i^T. \quad (2)$$

Inoltre, la matrice di transizione dello stato, che per sistemi lineari stazionari a tempo discreto è pari a A^t , si può facilmente calcolare utilizzando:

$$A^t = R\Lambda^t L = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t \cdot r_i \cdot l_i^T. \quad (3)$$

Occorre dunque calcolare innanzitutto $L = R^{-1}$, in modo da disporre di tutti gli ingredienti necessari per ottenere A e A^t . Si ha:

$$L = R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ j & -j \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-j} \begin{bmatrix} -j & -\frac{1}{2} \\ -j & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{j}{2} \\ 1 & \frac{j}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^T \\ l_2^T \end{bmatrix}$$

Ora, si noti che il calcolo di A e A^t mediante le (2)-(3) si semplifica notando che gli autovalori assegnati nell'esercizio sono complessi coniugati (e lo sono dunque anche gli autovettori destri e sinistri). Ciò consente di ottenere:

$$A = R\Lambda L = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \cdot r_i \cdot l_i^T = \lambda_1 \cdot r_1 \cdot l_1^T + \lambda_2 \cdot r_2 \cdot l_2^T = 2 \operatorname{Re} \{ \lambda_1 \cdot r_1 \cdot l_1^T \}$$

$$A^t = 2 \operatorname{Re} \{ \lambda_1^t \cdot r_1 \cdot l_1^T \}.$$

Si ha:

$$A = 2 \operatorname{Re} \left\{ (1+j) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ j \end{bmatrix} \cdot [1 \quad -\frac{j}{2}] \right\} = 2 \operatorname{Re} \left\{ (1+j) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{4} \\ j & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^t = 2 \operatorname{Re} \left\{ (1+j)^t \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ j \end{bmatrix} \cdot [1 \quad -\frac{j}{2}] \right\} = 2 \operatorname{Re} \left\{ (1+j)^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{4} \\ j & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

Per completare il calcolo di A^t , che dev'essere reale in quanto potenza di una matrice reale, è bene ricorrere alla rappresentazione modulo e fase ed esprimere $\lambda_1^t = (1+j)^t$ come:

$$\lambda_1^t = |\lambda_1|^t e^{j\angle\lambda_1 \cdot t} = \sqrt{2}^t e^{j \cdot \arctan(1) \cdot t} = \sqrt{2}^t e^{j\frac{\pi}{4}t} = \sqrt{2}^t \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \right]$$

da cui:

$$\begin{aligned} A^t &= 2 \operatorname{Re} \left\{ (1+j)^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{4} \\ j & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\} = 2\sqrt{2}^t \operatorname{Re} \left\{ \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{4} \\ j & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\} \\ \implies A^t &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}^t \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) & \frac{\sqrt{2}^t}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -2\sqrt{2}^t \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) & \sqrt{2}^t \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Il secondo quesito riguarda le proprietà dei modi naturali. Il sistema è a tempo discreto, dunque per stabilire se i modi associati agli autovalori λ_1 e $\lambda_2 = \lambda_1^*$ siano o meno stabili è necessario studiarne il modulo. Vale: $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{2} > 1$ e per questo entrambi i modi naturali sono *instabili*. Altrettanto semplice è concludere se i modi siano eccitabili per impulsi in ingresso e osservabili in uscita. Si verifica a vista d'occhio che $C \cdot r_i \neq 0$, $l_i^T \cdot B \neq 0$ per $i = 1, 2$, e quindi entrambi i modi sono sia eccitabili che osservabili.

Calcoliamo infine la risposta impulsiva del sistema e la sua trasformata \mathcal{Z} , la funzione di trasferimento ingresso uscita.

$$w(t) = \begin{cases} CA^{t-1}B & \text{se } t > 0 \\ D = 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

Abbiamo, per $t > 0$:

$$w(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}^{t-1} \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) & \frac{\sqrt{2}^{t-1}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) \\ -2\sqrt{2}^{t-1} \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) & \sqrt{2}^{t-1} \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{2}^{t-1} \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right).$$

Il calcolo di $W(z)$ è reso più agevole se si ricorda una delle più note proprietà della trasformata \mathcal{Z} , la trasformata di una funzione ritardata: $\mathcal{Z}\{f(t-1)\} = F(z)/z$.

Da cui:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{\mathcal{Z}\{\sqrt{2}^t \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\}}{z} = \frac{1}{2z} \mathcal{Z}\left\{ \left(e^{j\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\right)^t + \left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\right)^t \right\} = \\ &= \frac{1}{2z} \left\{ \frac{z}{z - \left(e^{j\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\right)} + \frac{z}{z - \left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\right)} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{z - (1+j)} + \frac{1}{z - (1-j)} \right\}. \end{aligned}$$

Che dopo aver messo tutto a denominatore comune diviene:

$$W(z) = \frac{z-1}{z^2 - 2z + 2}.$$

Problema 3. Sia dato un sistema a tempo continuo a un ingresso ed un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(t) = 3e^{-2t}.$$

Si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica (se esiste) all'ingresso $u(t) = \cos(2t)$.

Svolgimento.

Iniziamo dalla risposta forzata all'ingresso $u(t) = \cos(2t)$, procedendo nel dominio della frequenza, dove la risposta forzata è data da:

$$Y_{for}(s) = W(s)U(s)$$

con

$$W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = 3\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{3}{s+2}$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{\cos(2t)\} = \frac{s}{s^2+4}.$$

Quindi:

$$Y_{for}(s) = \frac{3s}{(s+2)(s^2+4)}.$$

Per ottenere la risposta forzata nel dominio del tempo, antitrasformiamo $Y_{for}(s)$:

$$y_{for}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{for}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R_1}{s+2} + \frac{R_2}{s-2j} + \frac{R_2^*}{s+2j}\right\} = R_1e^{-2t} + R_2e^{2jt} + R_2^*e^{-2jt}$$

con

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)Y_{for}(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{3s}{s^2+4} = -\frac{3}{4}$$

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow 2j} (s-2j)Y_{for}(s) = \lim_{s \rightarrow 2j} \frac{3s}{(s+2)(s+2j)} = \frac{3}{8} - j\frac{3}{8}$$

$$R_2^* = \frac{3}{8} + j\frac{3}{8}.$$

Dunque si ha:

$$y_{for}(t) = -\frac{3}{4}e^{-2t} + \left(\frac{3}{8} - j\frac{3}{8}\right)e^{2jt} + \left(\frac{3}{8} + j\frac{3}{8}\right)e^{-2jt} =$$

$$= -\frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{2jt} + e^{-2jt}}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{2jt} - e^{-2jt}}{2j}\right) =$$

$$= -\frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}\cos(2t) + \frac{3}{4}\sin(2t).$$

Passiamo al secondo punto. La risposta armonica è la risposta a regime permanente per ingressi sinusoidali: essa esiste se il sistema in esame è asintoticamente stabile, ovvero se ha autovalori tutti a parte reale negativa, condizione soddisfatta³ dal sistema in esame, che ha autovalore $\lambda = -2$.

³In questo caso, avendo a disposizione la risposta impulsiva (e quindi la funzione di trasferimento), conosciamo unicamente gli autovalori relativi alle componenti raggiungibili e osservabili dello stato, e non è possibile sapere se vi siano state in $W(s)$ cancellazioni tra poli e zeri che nascondano la presenza di modi naturali instabili. Per questo, possiamo concludere che la parte raggiungibile e osservabile del sistema, che ha autovalore $\lambda = -2$, è senz'altro asintoticamente stabile, e ai fini del senso fisico della risposta armonica non possiamo far altro che confidare nel fatto che eventuali componenti non raggiungibili né osservabili siano anch'esse stabili, oppure che il sistema sia in forma minima (sia completamente raggiungibile e osservabile).

La risposta armonica all'ingresso $u(t) = M \cos(\omega t + \varphi)$ è

$$y_{arm}(t) = M |W(j\omega)| \cos\left(\omega t + \varphi + \underline{\angle W(j\omega)}\right).$$

In questo esercizio $u(t)$ è caratterizzata da $M = 1$, $\omega = 2$, $\varphi = 0$. Calcoliamo i valori del modulo e della fase di $W(s) = W(j\omega)$ con i dati in esame:

- $|W(j\omega)|_{\omega=2} = \left| \frac{3}{j\omega+2} \right|_{\omega=2} = \frac{3}{|j2+2|} = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.
- $\underline{\angle W(j\omega)}|_{\omega=2} = \underline{\angle \frac{3}{j\omega+2}}|_{\omega=2} = \underline{\angle 3} - \underline{\angle j2 + 2} = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$.

In definitiva, otteniamo:

$$y_{arm}(t) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\
 y(t) &= Cx(t),
 \end{aligned}
 \quad \text{dove} \quad
 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}
 \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \quad C = [1 \quad 1 \quad -1 \quad 0]$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ e \mathcal{X}_4 della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si forniscano, se esistono (motivare la risposta), un ingresso che porti lo stato da $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ a $x(1) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ e un ingresso che porti lo stato da $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ a $x(1) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Svolgimento.

Calcoliamo⁴ innanzitutto R , la matrice di raggiungibilità associata alla coppia $[A, B]$ del sistema:

$$R = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

R ha rango 1. Poiché lo spazio degli stati raggiungibili \mathcal{P} è definito come $\mathcal{P} = \text{Im}(R)$, si ha subito:

$$\mathcal{P} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Lo spazio degli stati inosservabili I è definito come $I = \mathcal{N}(Q)$. Calcoliamo dunque la matrice di osservabilità Q :

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Q ha rango 3, dunque ci aspettiamo che il nullo di Q abbia dimensione 1 (sia generato da un solo vettore). In effetti, il nullo di Q è soluzione del sistema:

$$Q \cdot x = 0 \iff \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

⁴Capita spesso che gli studenti calcolino i generici termini $A^i B$ e CA^i delle matrici di raggiungibilità e osservabilità passando per il calcolo esplicito della potenza di matrice A^i . Non è sbagliato, ma è una gran perdita di tempo: basta semplicemente calcolare ricorsivamente $A^i B = A(A^{i-1} B)$ e $CA^i = (CA^{i-1})A$.

Dal quale è semplice⁵ ottenere la soluzione $x = [0 \ \alpha \ \alpha \ 0]^T$ e scegliendo per semplicità $\alpha = 1$ otteniamo il vettore che funge da base per lo spazio degli stati inosservabili:

$$\mathcal{I} = \mathcal{N}(Q) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Siamo pronti per rispondere al secondo quesito, calcolando i quattro sottospazi della decomposizione strutturale di Kalman. Richiamiamone brevemente definizioni e proprietà:

- $\mathcal{X}_1 = \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, sottospazio degli stati raggiungibili e non osservabili;
- \mathcal{X}_2 t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{P}$, sottospazio degli stati raggiungibili e osservabili;
- \mathcal{X}_3 t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I}$, sottospazio degli stati non raggiungibili e non osservabili;
- \mathcal{X}_4 t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{C}^n$, sottospazio degli stati non raggiungibili e osservabili.

Il calcolo esplicito dei sottospazi non offre particolari difficoltà. \mathcal{X}_1 è facilmente ottenibile osservando che \mathcal{P} e \mathcal{I} hanno il solo vettore nullo come intersezione:

$$\mathcal{X}_1 = \{0\}.$$

Ciò implica che \mathcal{X}_2 e \mathcal{X}_3 siano pari rispettivamente a \mathcal{P} e \mathcal{I} :

$$\mathcal{X}_2 = \mathcal{P} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{X}_3 = \mathcal{I} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Infine, \mathcal{X}_4 si ottiene osservando i sottospazi fin qui generati e completando la base che essi formano (una base di \mathbb{C}^2) in modo da costruire una base per \mathbb{C}^4 . È piuttosto immediato convincersi che con una combinazione lineare dei generatori di \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 non è in alcun modo possibile ottenere i vettori $v = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ e $w = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ e dunque v, w completano la base cercata:

$$\mathcal{X}_4 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Il calcolo dei quattro sottospazi ci consente di rispondere al terzo quesito. Dei due stati proposti, solo il secondo, $x(1) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ appartiene a \mathcal{P} , spazio degli stati raggiungibili, e dunque sappiamo che è possibile trovare una sequenza di ingressi che permetta allo stato

⁵In realtà non è nemmeno necessario risolvere il sistema, basta osservare che per annullare il prodotto $Q \cdot x$, data la struttura delle colonne di Q , è necessario sommare seconda e terza colonna.

di raggiungere tale configurazione a partire da $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. L'ingresso desiderato si ottiene risolvendo l'equazione:

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = Bu(0) \iff \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(0)$$

da cui, chiaramente, $u(0) = 1$.

Problema 5. Si studi la stabilità dell'origine dello spazio di stato del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 3x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

utilizzando il metodo di Lyapunov con $V(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + \alpha x_1 x_2$.

In particolare:

1. Determinare l'intervallo dei valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ che rendono $V(x)$ definita positiva;
2. determinare un valore di α che consenta di dimostrare la stabilità dell'origine del sistema.

Svolgimento.

Le ipotesi del teorema di Lyapunov richiedono che la funzione candidata $V(x)$ sia definita positiva in un certo intorno di x_e , che essa debba annullarsi in x_e , e inoltre che abbia derivata $\dot{V}(x)$ semidefinita negativa (stabilità semplice) o definita negativa (stabilità asintotica) in detto intorno, con $\dot{V}(x_e) = 0$. Verifichiamo per quale scelta di $\alpha \in \mathbb{R}$ $V(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + \alpha x_1 x_2$ è definita positiva, utilizzando il criterio di Sylvester:

$$V(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + \alpha x_1 x_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} > 0 \iff Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & 3 \end{bmatrix} > 0$$

Quest'ultima condizione è verificata se i minori principali di Q sono positivi, ovvero:

$$\begin{cases} 2 > 0 \\ 6 - \frac{\alpha^2}{4} > 0 \implies \alpha^2 < 24 \end{cases}$$

da cui si ha che affinché $V(x)$ sia definita positiva in tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_e\}$ dev'essere $\alpha \in (-\sqrt{24}, \sqrt{24})$.

Verifichiamo ora la condizione sulla derivata di $V(x)$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 + \alpha x_2 & 6x_2 + \alpha x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \\ &= (4x_1 + \alpha x_2)(-x_1 - 3x_2) + (6x_2 + \alpha x_1)(2x_1 + x_2) = \\ &= -(4 - 2\alpha)x_1^2 - (3\alpha - 6)x_2^2 - (\alpha + 12 - 12 - \alpha)x_1 x_2 = \\ &= -(4 - 2\alpha)x_1^2 - (3\alpha - 6)x_2^2. \end{aligned}$$

Cerchiamo un valore di α che renda $V(x) < 0$:

$$\begin{cases} 4 - 2\alpha > 0 & \iff \alpha < 2 \\ 3\alpha - 6 > 0 & \iff \alpha > 2 \end{cases}$$

Dunque non esiste valore di α che renda $V(x) < 0$ e che permetta (almeno con la $V(x)$ assegnata!) di dedurre l'asintotica stabilità di x_e . Esiste però un valore, $\alpha = 2$, che rende $V(x) \leq 0$, infatti sostituendo $\alpha = 2$ nell'espressione di $\dot{V}(x)$ poc'anzi trovata si ha $\dot{V}(x) = 0$, che è senz'altro una funzione semidefinita negativa. Possiamo allora concludere che scegliendo $\alpha = 2 \in (-\sqrt{24}, \sqrt{24})$ è possibile soddisfare tutte le ipotesi del teorema di Lyapunov e dimostrare che x_e è semplicemente stabile.

Nota: il testo dell'esercizio richiedeva esplicitamente l'applicazione del criterio di Lyapunov, ma lo studente smalzato avrebbe potuto trovare una semplice conferma del risultato ottenuto osservando che il sistema assegnato è lineare, e che la matrice A di esso è pari a

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{5}$, coppia di autovalori a parte reale nulla \implies l'origine è semplicemente stabile.