TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 07-09-2015

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{16}{(s+1)(s-4)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Calcolare la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso–uscita;
2. si trovi lo stato iniziale $x(0)$ tale che l'evoluzione libera dell'uscita sia pari a $y(t) = 2\cos(t) + 3\sin(t)$.

Problema 3. Sia dato un sistema a tempo discreto a un ingresso ed un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = (0.4)^{t-1},\ w(0) = 0.$$

Utilizzando la trasformata $\mathcal{Z}$ si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica alla seguente sequenza di ingresso:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } t \text{ è dispari} \end{cases} \qquad \text{per } t \geq 0, \quad u(t) = 0 \text{ per } t < 0.$$

(Suggerimento: per il calcolo della risposta armonica occorre scrivere l'ingresso come una funzione sinusoidale.)

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si calcoli la funzione di trasferimento ingresso-uscita del sistema sfruttando in modo intelligente la conoscenza dei sottospazi della decomposizione strutturale.

Problema 5. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{1}{3}\, x_1^3(t)\, x_2(t) + k\, x_1(t) \\[2ex] \dot{x}_2(t) = -\, x_1^4(t) - \dfrac{1}{2}\, x_1^2(t)\, x_2(t) - x_2(t) + k\, x_1(t) \end{cases}$$

Dopo aver verificato che l'origine sia un punto di equilibrio per il sistema assegnato, se ne discuta la stabilità al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$, utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
